Biuletyn WAT
Vol. LVIII, Nr 4, 2009

Symetrie unitarne w polarymetrycznej dekompozycji celów

JERZY KAPELEWSKI, ANDRZEJ DUKATA

Wojskowa Akademia Techniczna, Wydział Elektroniki, Instytut Radioelektroniki,
00-908 Warszawa, ul. S. Kaliskiego 2

Streszczenie. W pracy rozpatrzono genezę dekompozycji celów w bazach generatorów grup unitarnych SU(2) (baza Pauliego) bądź SU(3) (baza Gell-Manna). W rozważaniach wykorzystano podejście Hamiltona wyprowadzające własności tzw. specjalnych grup unitarnych z symetrii rzutowej. Wspólną cechą generatorów obu tych grup unitarnych jest ich unimodularność wyrażająca się w jednostkowym wyznaczniku i zerowym śladzie. Własności te stanowią bezpośrednią konsekwencję charakterystycznej symetrii radarów polarymetrycznych w wersji monostatycznej. Są one zgodne z antyabelowym charakterem przedmiotowych grup symetrii, homomorficznych z grupą obrotów R_3 i charakterystyczną dla nich relacją komutacji (jak dla macierzy Pauliego).Wspomniany wariant z racji szczególnie wyraźnych i głębokich korzeni teorio-grupowych w sposób istotny ułatwia wyodrębnienie praktyczne dominującego fizycznego mechanizmu rozpraszania. W pracy przeanalizowano genezę związków symetrii unitarnej zachodzących w trakcie rozpraszania polarymetrycznego SAR na różnej klasy obiektach. Umożliwia to spojrzenie na problem z bardziej ogólnego punktu widzenia, stwarzając jednocześnie podstawy dla uogólnienia metody na bardziej złożone przypadki, obejmujące zarówno cele zlokalizowane, jak i rozłożone. Przeprowadzone rozważania z racji założonej monostatyczności SAR koncentrują się na przypadku rozpraszania wstecznego z odpowiadającym mu symetrią macierzy rozpraszania.
Słowa kluczowe: elektronika, radar polarymetryczny, dekompozycja celów, macierze Pauliego, macierze Gell-Manna
Symbole UKD: 621.396.9

1. Wstęp

Niniejsza praca dotyczy genezy modeli dekompozycji celów w bazach generatorów specjalnych grup unitarnych. Wspólną cechą generatorów tych grup jest unimodularność wyrażająca się w jednostkowym wyznaczniku i zerowym śladzie.

Własności te stanowią bezpośrednią konsekwencję charakterystycznej symetrii radarów polarymetrycznych w wersji monostatycznej. Są one zgodne z antyabelowym charakterem przedmiotowych grup symetrii homomorficznych z grupą obrotów R_3 i charakterystyczną dla nich relacją komutacji (jak dla macierzy Pauliego) [1-4].

Wariant ten z racji szczególnie wyraźnych i głębokich korzeni teorio-grupowych w sposób istotny ułatwia wyodrębnienie praktyczne dominującego fizycznego mechanizmu rozpraszania. W pracy przeanalizowano genezę związków symetrii unitarnych zachodzących w trakcie rozpraszania polarymetrycznego SAR, bazując na własnościach tzw. zwrotu Hamiltona z jego odniesieniem do obrotów generowanych odbiciami na nachylonych względem siebie płaszczyznach wirtualnych. Wskazano kluczową rolę tych własności dla generacji grup klasy SU jako grup specjalnego rodzaju obrotów (*wewnętrznych*) istotnie różnych od klasycznej grupy obrotów (*zewnętrznych*) izometrycznych jednak dla obu rodzajów algebr. Podkreślono znaczenie ustalonej już przez Hamiltona kwaternionowej metody określenia operacji zwrotu [5]. Umożliwia to spojrzenie na problem z bardziej ogólnego punktu widzenia i stwarza jednocześnie podstawy dla uogólnienia metody na bardziej złożone przypadki, obejmujące zarówno cele zlokalizowane, jak i rozłożone. Szczególnie interesująca wydaje się możliwość zastosowania bazy SU(3) dla wyjścia poza klasyczny w polarymetrycznym SAR przypadek monochromatycznej fali płaskiej, a także do dekompozycji macierzy koherencji w radarach wielokanałowych i w szeregu innych zastosowań polarymetrycznego SAR.

2. Baza SU(2) jako reprezentacja rzutowa

Obroty właściwe euklidesowej przestrzeni 3D wokół początku kartezjańskiego układu współrzędnych (x, y, z), tzn. rzeczywiste transformacje ortogonalne z wyznacznikiem +1 wygodnie jest wyrazić przez *rzut stereograficzny* na płaszczyznę równikową (x' y', 0) *sfery jednostkowej* S^3 ze środkiem w początku układu współrzędnych. Centrum rzutowania wybieramy w punkcie bieguna południowego tej sfery. Sam rzut wyraża wówczas zmienna $s = x + \mathrm{i}y$. Odpowiednie formuły operacji rzutowania można wówczas zapisać w postaci [4]

$$x + \mathrm{i}y = \frac{2s}{1+|s|^2}, \quad x - \mathrm{i}y = \frac{2s^*}{1+|s|^2}, \quad z = \frac{1-|s|^2}{1+|s|^2}. \tag{1}$$

Na tym etapie zamiast jednej zmiennej s można wprowadzić dwie zmienne ξ i η związane relacją $s = \eta/\xi$. Zabieg ten rozszerza opis także na biegun południowy sfery (jako osobliwości generującej geometrię rzutowania), przez dodanie punktu o współrzędnych $(\xi, \eta) = (0,1)$. W rezultacie mamy

$$x + \mathrm{i}y = 2\eta\xi^*, \quad x - \mathrm{i}y = 2\xi\eta^*, \quad z = |\xi|^2 - |\eta|^2, \quad 1 = |\xi|^2 + |\eta|^2. \tag{2}$$

Z powyższych równań wynika, że każda transformacja unitarna współrzędnych ξ i η

$$\xi' = \alpha\xi + \beta\eta, \quad \eta' = \gamma\xi + \delta\eta \tag{3}$$

odpowiada pewnemu obrotowi sfery jednostkowej S^3, której punkty wyrażają tzw. *promienie* ξ i η dwuwymiarowej przestrzeni unitarnej. Z drugiej strony łatwo zauważyć, że dowolny punkt na sferze wraz z wybraną orientacją stycznej w tym punkcie można przekształcić w dowolną inną konfigurację na tej sferze za pomocą ww. obrotów (bez wyjątku). Wobec faktu, że mamy tu do czynienia jedynie ze stosunkiem współczynników $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ można wybrać współczynnik proporcjonalności, tak żeby wyznacznik macierzy transformacji był równy 1, co oznacza ograniczenie się do wzmiankowanych obrotów właściwych.

3. Baza SU(2) w grupie Lorentza

Wprowadźmy w euklidesowej przestrzeni 3D tzw. jednostkowe współrzędne rzutowe x_α

$$x = \frac{x_1}{x_0}, \quad y = \frac{x_2}{x_0}, \quad z = \frac{x_3}{x_0}. \tag{4}$$

Wówczas równanie sfery jednostkowej ma postać

$$-x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0, \tag{5}$$

zaś relacje dla ww. rzutu stereograficznego przyjmą postać:

$$x_0 = |\xi|^2 + |\eta|^2, \quad x_1 = \xi^*\eta + \eta^*\xi, \quad x_2 = \mathrm{i}(\eta^*\xi - \xi^*\eta), \quad x_3 = |\xi|^2 - |\eta|^2. \tag{6}$$

Łatwo rozpoznać w x_i parametry Stokesa, zaś w ξ i η składowe polarymetryczne pola **E**.

Dla dowolnej transformacji unitarnej σ (współrzędnych ξ i η) z wyznacznikiem +1, współrzędne x_α podlegają rzeczywistej transformacji liniowej, która nie zmienia równania (5).

Zgodnie z teorią względności (szczególną), normalne układy współrzędnych w czasoprzestrzeni związane są ze sobą przez transformację Lorentza, tj. stanowią rzeczywistą transformację liniową niezmieniającą formy (5). Transformacje te tworzą grupę — *pełną grupę Lorentza*. Grupa składa się z transformacji *dodatnich* (wyznacznik +1) oraz *ujemnych* (wyznacznik –1). Pierwsze z nich stanowią *redukowalną* grupę Lorentza, z której można uzyskać grupę pełną, dodając odbicia przestrzenne (obroty niewłaściwe)

$$x_0 \to x_0, \quad x_\alpha \to -x_\alpha, \quad \alpha = 1, 2, 3. \tag{7}$$

Transformacje w (6) są formami hermitowskimi z macierzami

$$\hat{\sigma}_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma}_2 = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{8}$$

Oznaczmy przez $\hat{s}$ macierz-kolumienkę o elementach (ξ, η), tj.

$$\hat{s} = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}. \tag{9}$$

Wówczas (6) można zapisać w postaci

$$x_\alpha = \hat{s}^{\dagger} \hat{\sigma}_\alpha \hat{s}. \tag{10}$$

gdzie † oznacza sprzężenie hermitowskie.

4. Obrót jako złożenie symetrii względem dwóch nierównoległych płaszczyzn (*zwrot Hamiltona*)

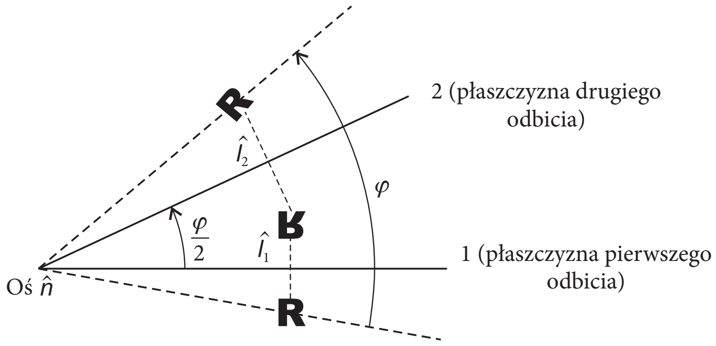
Aby opisać obrót $R(\varphi, \hat{\mathbf{n}})$ możemy go rozpatrywać jako wynik uporządkowanego odbicia na dwóch fikcyjnych (wirtualnych) płaszczyznach, których przecięciem jest oś $\hat{\mathbf{n}}$, tworzących kąt dwuścienny $\varphi/2$ z dodatnim kierunkiem obrotu od płaszczyzny 1 do 2 (czyli z orientacją $\hat{\mathbf{n}}$ zgodną z regułą prawej dłoni) [4]. Jest to tzw. *zwrot Hamiltona* [6]. Generuje on obrót wokół osi $\hat{\mathbf{n}}$ o kąt φ, czyli dwa razy większy od kąta dwuściennego (tj. od długości łuku na sferze jednostkowej). Jak wykazali Klein i Sommerfeld jeszcze w XIX wieku [7, 8] taki model odbicia odpowiada zastąpieniu zwykłej trójwymiarowej grupy obrotów *R* (SO(3)) przez odpowiednią algebrę grupy SU(2) izomorficzną z grupą *R*. Należy podkreślić, że izomorfizm ten dotyczy algebry, a nie grupy SU(2).

Z przedstawionych rozważań wynika, że zadany zwrot (obrót) można określić poprzez podanie uporządkowanej pary punktów (*głowa* i *ogon* zwrotu) na sferze jednostkowej. W celu bliższego opisu analitycznego operacji zwrotu, zamienimy dwa punkty na wersory $\hat{\mathbf{a}}$ i $\hat{\mathbf{b}}$ łączące środek sfery jednostkowej z końcem zwrotu. Takie dwa wersory określają iloczyn skalarny i wektorowy

$$s = \hat{\mathbf{a}} \cdot \hat{\mathbf{b}} = \cos\left\|\hat{T}\right\|, \quad \mathbf{v} = \hat{\mathbf{a}} \times \hat{\mathbf{b}} = \hat{\mathbf{n}} \sin\left\|\hat{T}\right\|, \tag{11}$$

gdzie $\hat{\mathbf{n}}$ — wersor wzdłuż osi obrotu związanego ze zwrotem $\hat{T}$, $\left\|\hat{T}\right\|$ — długość *l* wektora zwrotu (zob. rys.). Te dwie wielkości (tj. *s* i **v**) można uważać za parametry zwrotu $\hat{T} = \hat{T}(s, \mathbf{v})$. Z definicji (11) wynika

$$s^2 + \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = 1. \tag{12}$$



Rys. Obrót o kąt φ wokół osi $\hat{n}$ generowany jest przez dwa kolejne odbicia $\hat{l}_1$ i $\hat{l}_2$ względem dwóch przecinających się płaszczyzn o kącie dwuściennym $\varphi/2$

Związek ten ilustruje utożsamienie (*s*, **v**) z konkretnym punktem na powierzchni sfery jednostkowej S^3 w euklidesowej czteroprzestrzeni. Długość zwrotu $\left\|\hat{T}\right\|$ może przyjmować dowolne wartości w przedziale $(0, \pi)$, zaś $\hat{\mathbf{n}}$ może być dowolnym kierunkiem w przestrzeni 3D. Wynika stąd, że parametry wyznaczające całą rozmaitość możliwych operacji zwrotu pokrywają się z całą sferą S^3. Każdemu zwrotowi można zatem przypisać reprezentację algebraiczną

$$\hat{T} = \hat{T}(s, \mathbf{v}) = \hat{T}(s, v_1, v_2, v_3), \tag{13}$$

gdzie (s, v_1, v_2, v_3) — dowolny punkt na sferze S^3.

Zwrot geometryczny odpowiadający punktowi na S^3 można wyrazić poprzez podanie długości $\left\|\hat{T}\right\|$ $(0 \le \left\|\hat{T}\right\| \le \pi)$ wektora zwrotu z relacji $\cos\left\|\hat{T}\right\| = s$ oraz wektora $\hat{\mathbf{n}}$ ze związku

$$(n_1, n_2, n_3)\sin\left\|\hat{T}\right\| = (v_1, v_2, v_3). \tag{14}$$

5. O algebrze grup Lie

Każdej funkcji *x*(*s*) z danej grupy Lie przyporządkowuje się macierz jej uogólnionych współczynników Fouriera (albo widmowych, Hilberta itp.) tzw. macierz grupową

$$X = \sum_s x(s)U(s), \quad s - \text{element grupy}, \tag{15}$$

gdzie $\tilde{G} : s \rightarrow U(s)$ reprezentacja danej grupy *g*. Ślad *t*(Tr*X*) macierzy *X*

$$t = \sum_s x(s)X(s) \tag{16}$$

jest wtedy uogólnionym współczynnikiem Fouriera funkcji *x*(*s*) względem charakterów *X*(*s*) reprezentacji *G*. Wygodnie jest rozpatrywać funkcję *x*(*s*) jako wielkość **x** w rozmaitości grupowej, tj. *x*(*s*) jest *s*-tą składową wielkości **x**. Symbolicznie można to zapisać w postaci:

$$\mathbf{x} = \sum_s x(s)\hat{s}. \tag{17}$$

W reprezentacji *G* macierz *X* jest przyporządkowana wielkości $\mathbf{x} : \mathbf{x} \rightarrow X$ względem *G*.

Wprowadzone wielkości grupowe zachowują się jak wektory w przestrzeni grupowej. Z równości (17) wynika następująca definicja iloczynu dwóch dowolnych wielkości grupowych **x** i **y**:

$$\mathbf{z} = \mathbf{xy} = \sum_{t,t'} x(t)y(t')\hat{t}\hat{t}' = \sum_s z(s)\hat{s}, \tag{18}$$

gdzie

$$z(s) = \sum_{t,t'=s} x(t)y(t'). \tag{19}$$

Dodawaniu i mnożeniu wielkości grupowych odpowiada dodawanie i mnożenie macierzy grupowych związanych z nimi przez relację (15).

Operacje, które można wykonywać z wielkościami grupowymi (i) dodawanie, (ii) mnożenie przez liczbę i (iii) mnożenie przez inną wielkość grupową, odpowiadają znanym prawom zwykłej algebry z dwoma wyjątkami: mnożenie nie jest (na ogół) przemienne, zaś dzielenie (też na ogół) niemożliwe. Oznacza to, że równanie **ax** = **b** nie ma jednoznacznego rozwiązania (lub nie ma go w ogóle). Jednakże zawsze istnieje wielkość $\mathbf{1}$ o własnościach macierzy jednostkowej $\hat{1}$:

$$\mathbf{1} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{1} = \mathbf{a}, \tag{20}$$

której wszystkie składowe zerują się za wyjątkiem jednej równej 1, odpowiadającej *s* = 1.

Zbiór opisanych wyżej wielkości nazywa się algebrą, zaś *wielkości grupowe* są elementami algebry. Nie należy ich utożsamiać z elementami grupy.

Przyporządkowanie $\mathbf{x} \to X$ w reprezentacji G spełnia warunki:

1. elementowi **1** odpowiada macierz jednostkowa $\hat{1}$;
2. jeśli $\mathbf{x} \to X$, $\mathrm{y} \to \mathrm{Y}$, a α jest liczbą to $\mathbf{x} + \mathbf{y} \to X + Y$, $\alpha\mathbf{x} \to \alpha X$, $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} \to X \cdot Y$.

Reprezentacja G naszej grupy jest w jednakowym stopniu realizacją, tj. reprezentacją algebry grupowej przez macierze, dla której spełnione są powyższe warunki.

Powyższe uwagi dotyczą przejścia od macierzy $U(s)$ odpowiadającej oddzielnym elementom grupy, do liniowej rozmaitości macierzy, dla której macierze $U(s)$ stanowią bazę.

6. Reprezentacja rzutowa w SU(2)

Geneza reprezentacji rzutowej wiąże się z faktem, że w opisie kwantowym mamy do czynienia z reprezentacjami w przestrzeni stanów układu, które można rozpatrywać jako przestrzeń promieni (zorientowanych łuków), a nie zwykłych wektorów 2D lub 3D. Reprezentacja rzutowa przyporządkowuje każdemu elementowi s grupy abstrakcyjnej g unitarny obrót (*zwrot*) $U(s)$ — promień n-wymiarowej przestrzeni reprezentacji.

Dla każdej macierzy unitarnej $U(s)$ można wybrać dowolnie współczynnik cechowania: $\varepsilon : U \to \varepsilon U$, jednak jeśli g jest grupą ciągłą, to należy zapewnić ciągłość zależności $U(s)$. Wówczas reprezentację charakteryzuje warunek:

$$U(s)U(t) \sim U(st), \quad \text{tj.} \quad U(s)U(t) = \delta(s,t)U(st), \tag{21}$$

gdzie $|\delta| = 1$ [2, 3]. Aby iloczyn dwóch elementów odpowiadał iloczynowi reprezentujących je macierzy, należy przyjąć regułę mnożenia:

$$xy(s) = \sum_{t,t'=s} \delta(t,t')x(t)y(t'). \tag{22}$$

Ciekawym przykładem grupy abelowej (tj. przemiennej) z nieprzywiedlną reprezentacją rzutową jest grupa złożona z czterech elementów *1*, *a*, *b*, *c* o następującej tablicy mnożenia [4, 6]:

$$a^2 = b^2 = c^2 = 1, \quad bc = -cb = \mathrm{i}a, \quad ca = -ac = \mathrm{i}b, \quad ab = -ba = \mathrm{i}c. \tag{23}$$

Odpowiada to reprezentacji rzutowej wyrażonej w macierzach:

$$U(1) = \hat{\sigma}_0, \quad U(a) = \hat{\sigma}_1, \quad U(b) = \hat{\sigma}_2, \quad U(c) = \hat{\sigma}_3 \tag{24}$$

określonych wzorem (8).

Norma (ww. macierzy) wybrana jest tak, aby

$$U^2(a) = U(a)U(a^{-1}) = 1 \tag{25}$$

i analogicznie dla *1*, *b*, *c* [3] z dodatkowym warunkiem $\det U = 1$. Algebra tej reprezentacji, określona przez (22), jest nieprzemienna, mimo że sama grupa jest abelowa. Jest to algebra zespolonych kwaternionów o elementach:

$$\mathbf{x} = \kappa\hat{1} + \lambda\hat{a} + \mu\hat{b} + \nu\hat{c} \equiv \kappa\hat{1} + (\lambda, \mu, \nu) = \cos\frac{\alpha}{2} + \mathbf{u}\sin\frac{\alpha}{2}, \tag{26a}$$

gdzie **u** jest wektorem jednostkowym. Odpowiednio:

$$\mathbf{x}^{-1} = \cos\frac{\alpha}{2} - \mathbf{u}\sin\frac{\alpha}{2}. \tag{26b}$$

Oznaczmy przez **v** zwykły wektor w 3D. Potraktujmy go jako kwaternion o rzeczywistej składowej równej zero. Z postaci (26) wynika, że iloczyn $\mathbf{x}\mathbf{v}\mathbf{x}^{-1}$ oznacza w istocie wektor **v** obrócony o kąt α wokół osi **u**. W powyższych wzorach „jednostki" $\hat{1}, \hat{a}, \hat{b}, \hat{c}$ odpowiadają tej samej tablicy mnożenia, co i odpowiednie macierze $\hat{\sigma}_n$ (n = 0, 1, 2, 3), zaś $\kappa, \lambda, \mu, \nu$ oznaczają liczby rzeczywiste.

7. Podsumowanie i uwagi uzupełniające

Przeprowadzone rozważania pozwalają lepiej zrozumieć genezę pojawienia się macierzy Pauliego jako bazy algebry grupy SU(2) w znanych polarymetrycznych modelach dekompozycji celów [9]. Zastosowanie tej właśnie bazy jest szczególnie wygodne w polarymetrii radarowej bowiem operuje ona dwuwymiarowymi stanami polaryzacyjnymi i z racji unitarności gwarantuje niezależność mierzonych parametrów energetycznych od transformacji grupowych.

Warto podkreślić, że w szeregu przypadkach dla dokonania bardziej szczegółowej dekompozycji macierzy koherencji wygodnie jest zwiększyć liczbę wymiarów algebry SU do trzech, tj. zastąpić bazę Pauliego grupy SU(2) bazą Gell-Manna generującą przestrzeń unitarną grupy SU(3). Odpowiednia macierz unitarna dekompozycji ma w tym przypadku postać [10]

$$\hat{U}_3 = \exp\left(\mathrm{i}\sum_{n=1}^{8} \omega_n \hat{\beta}_n \right). \tag{27}$$

Relacja (27) pozwala zdefiniować macierz koherencji 3D w postaci

$$\langle T \rangle = \hat{U}_3 \hat{\Sigma} \hat{U}_3^{-1}, \tag{28}$$

gdzie

$$\hat{\Sigma} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \tag{29}$$

jest macierzą diagonalną o nieujemnych współczynnikach rzeczywistych.

W powyższych definicjach $\hat{\beta}_n$ są wspomnianymi macierzami Gell-Manna, zaś ω_n rzeczywistymi współczynnikami wagowymi stanowiącymi 3D odpowiednik parametrów wyrażających 2D przyczynki do poszczególnych macierzy Pauliego. W obu przypadkach parametry te wyrażają udział różnych mechanizmów rozpraszania w macierzy koherencji. Ich większa liczba (8 w SU(3) wobec 3 w SU(2)) generalnie wskazuje na możliwość uwzględnienia nowych, wyrażonych przez postać poszczególnych macierzy $\hat{\beta}_n$, przyczynków istotnych dla uzyskania optymalnego obrazu celu zwłaszcza w radarach wielokanałowych [10]. W szczególnym przypadku przejścia między dwoma kanałami (o różnej częstotliwości) wyrażonego poprzez zmianę wektorów bazy odpowiednią transformację wyraża macierz unitarna (27).

Zauważmy, że postać (27) jest zwykłym uogólnieniem analogicznej formuły [9] dla $\hat{U}$ w 2D

$$\hat{U}_2 = \exp(\mathrm{i}\varphi \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{n}}) \equiv \sigma_0 \cos\varphi + \mathrm{i}(\boldsymbol{\sigma}\hat{\mathbf{n}})\sin\varphi. \tag{30}$$

Macierz koherencji $\hat{T}$ strumienia EM w 2D zawiera całą mierzalną informację o jego stanie polaryzacji (włączając natężenie). Macierz $\hat{T}$ definiuje relacja

$$\hat{T} = \left\langle \mathbf{E}(t) \otimes \mathbf{E}^{\dagger}(t) \right\rangle, \tag{31}$$

gdzie $\mathbf{E}$, $\mathbf{E}^{\dagger}$ oznaczają odpowiednio wektor Jonesa, którego dwie składowe są analitycznym sygnałem pola falowego oraz jego sprzężenie hermitowskie, a $\otimes$ — iloczyn Kroneckera. Nawias $\langle\ \rangle$ oznacza uśrednienie w czasie

$$\langle X \rangle = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_0^T X(t)\mathrm{d}t. \tag{32}$$

Mając $\hat{T}$, można wyznaczyć *stopień polaryzacji* dany przez formułę [11]

$$G_{(2)} = \left(\frac{2\,\mathrm{Tr}(\hat{T})^2}{(\mathrm{Tr}\,\hat{T})^2} - 1 \right)^{1/2}. \tag{33}$$

Wielkość ta jest niezmiennikiem wyrażającym stabilną część elipsy polaryzacji. Macierz $\hat{T}$ w grupie SU(2) wyraża się poprzez superpozycję trzech macierzy Pauliego i macierz jednostkową

$$\hat{T} = \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{3} s_i \hat{\sigma}_i, \quad s_i = \mathrm{Tr}(\hat{T}\hat{\sigma}_i), \quad i = 0, 1, 2, 3, \tag{34}$$

gdzie $\hat{\sigma}_i$ dane są wzorami (8). Rzeczywiste współczynniki s_i stanowią zbiór 4. *parametrów Stokesa* i określają w pełni stan polaryzacji.

Powyższą definicję macierzy koherencji $\hat{T}$ w 2D można uogólnić na przypadek 3D, tj. uwzględnić 3 składowe pola falowego. Formalnie definicja macierzy koherencji w 3D nie różni się od przypadku 2D, z tym że teraz każdy z wektorów **E** ma 3 a nie 2 składowe. Odpowiednikiem bazy Pauliego jest tu baza Gell-Manna określona przez zbiór 8 macierzy. Jest ona znana w literaturze grupy SU(3) jako baza tej algebry. Przykładowo

$$\hat{\beta}_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \hat{\beta}_1 = \sqrt{\frac{3}{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ldots \hat{\beta}_8 = \sqrt{\frac{3}{2}}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{35}$$

Można, podobnie jak w 2D, napisać:

$$\hat{T}_{(3)} = \frac{1}{3}\sum_{i=0}^{8} q_i \hat{\beta}_i, \quad q_i = \mathrm{Tr}(\hat{T}_{(3)}\hat{\beta}_i), \quad i = 0,\ldots 8. \tag{36}$$

Współczynniki q_i mają znaczenie parametrów Stokesa w 3D. Wówczas stopień polaryzacji zwany też *stopniem czystości* wyraża formuła [11]:

$$G_{(3)} = \left(\frac{1}{2}\frac{3\mathrm{Tr}(\hat{T}_{(3)})^2}{(\mathrm{Tr}\hat{T}_{(3)})^2} - 1 \right)^{1/2}. \tag{37}$$

Niezmiennik ten zawiera się w przedziale

$$0 \le G_{(3)} \le 1.$$

$G_{(3)} = 1$ odpowiada przypadkowi gdy $\hat{T}_{(3)}$ ma tylko jedną niezerową wartość własną (tzw. całkowita czystość polarymetryczna lub pełna korelacja między mierzonymi polaryzacjami). Z kolei $G_{(3)} = 0$ oznacza równość wartości własnych $\hat{T}_{(3)}$

(oznacza mieszaninę jednakowo prawdopodobnych stanów polaryzacji, czyli brak korelacji między zmierzonymi polaryzacjami).

Powyższe relacje i ich interpretacja stanowią rozszerzenie związków (33) oraz (34) na grupę SU(3), uzyskane w pracy [10] analogiczną drogą jak w przypadku grupy SU(2).

Praca naukowa finansowana ze środków na naukę w latach 2007-2010 jako projekt badawczy zamawiany PBZ-MNiSW-DBO-04/I/2007.

Artykuł wpłynął do redakcji 30.09.2009 r. Zweryfikowaną wersję po recenzji otrzymano w październiku 2009 r.

LITERATURA

[1] S. R. Cloude, *Group theory and polarisation algebra*, Optik, 75, 1986, 26-36.
[2] H. Weyl, *The theory of groups and quantum mechanics*, Dover Publications, 1931.
[3] J. P. Elliott, P. G. Dawber, *Symmetry in Physics*, vol. 1, The Macmillan Press, London, 1979.
[4] L. C. Biedenharn, J. D. Louck, *Angular Momentum in Quantum Physics*, Addison-Wesley Publishing Company, Massachusetts, 1981.
[5] J. Maschke, L. Sevcik, C. Vlacek, Z. Zaoralek, *Decomposition of Jones matrix on the quaternions field and its application in fiber components modeling*, Opto-Electr. Rev., 4, 1996, 51-57.
[6] W. R. Hamilton, *Lectures on Quaternions*, Dublin, 1853.
[7] F. Klein, A. Sommerfeld, *Über die Theorie des Kreisels*, vol. 1, Teubner, Leipzig, 1897.
[8] E. P. Wigner, Ann. of. Math, 40, 1939, 149.
[9] S. R. Cloude, *A Review of Target Decomposition Theorems in Radar Polarimetry*, IEEE Trans. Geoscience and Remote Sensing, 34, 1996, 498.
[10] L. Ferro-Famil, E. Pottier, *Dual frequency polarimetric SAR data classification and analysis*, Progress in Electromagnetic Research, PIER 31, 2001, 247-272.
[11] J. J. Gil, J. M. Correas, P. A. Melero, C. Ferreira, *Generalized polarization algebra*, Monografias del Seminario Matemático García de Galdeano, 31, 2004, 161-167.

J. KAPELEWSKI, A. DUKATA

Unitary symmetry in polarimetric target decomposition

Abstract. The paper is concerned with a discussion of some basic unitary symmetry features which are manifested in polarimetric monostatic radars and can be useful to formulate a polarimetric analysis of coherency matrix in term of decomposition on the Pauli (or prospectively also the Gell-Mann) basis. In the analysis we use the "turn" Hamiltonian approach to describe relations in unitary space having SU(2) (or SU(3)) internal symmetry. It serves to generate the base matrices for providing an eigenvector-based decomposition of the coherency matrix. Although the considerations in the paper are restricted to the case of coherent back-scattering, the generalization to noncoherent field of targets (pixels) is possible as it is the case in the most known eigenvector-based target decomposition models.

Keywords: electronics, polarimetric radar, target decomposition, Pauli matrices, Gell-Mann matrices

Universal Decimal Classification: 621.396.9