



Jakościowy i ilościowy wpływ liczby Poissona ν na charakterystyki ekspandującej kulistej fali naprężenia w liniowym sprężystym ośrodku izotropowym

EDWARD WŁODARCZYK, MARIUSZ ZIELENKIEWICZ¹

Wojskowa Akademia Techniczna, Wydział Mechatroniki,
00-908 Warszawa, ul. S. Kaliskiego 2

¹Wojskowy Instytut Techniczny Uzbrojenia, Zakład Uzbrojenia Artyleryjskiego,
05-220 Zielonka, ul. Prymasa Stefana Wyszyńskiego 7

Streszczenie. Dokonano obszernej jakościowej i ilościowej analizy charakterystyk ekspandującej kulistej fali naprężenia w liniowym sprężystym ośrodku izotropowym. Falę wygenerowano nagle wytworzonym w kulistej kawernie o początkowym promieniu r_0 stałym ciśnieniem $p_0 = \text{const}$. Badania wykonano na bazie analitycznego zamkniętego rozwiązania problemu, zamieszczonego w pracy [1]. Z postaci analitycznego rozwiązania problemu wynika, że przemieszczenia i naprężenia maleją odpowiednio, w przybliżeniu odwrotnie proporcjonalnie do kwadratu i sześcienu odległości od centrum kawerny. Maksymalne bezwzględne wartości parametrów fali naprężenia występują zatem na powierzchni kawerny. Jest to wynikiem kulistej dywergencji ekspandującej fali. Stwierdzono, że powierzchnia kawerny i kolejne przekroje sferyczne ośrodka ściśliwego przemieszczają się w funkcji czasu tłumionym ruchem drgającym wokół przemieszczenia statycznego. Podobnie zachowują się pozostałe charakterystyki fali. Na tłumienie drgań decydujący wpływ ma ściśliwość ośrodka, reprezentowana w pracy przez liczbę Poissona ν . Można wyróżnić dwa przedziały wartości liczbowych parametru ν , w których wymienione wyżej drgania są tłumione w odmienny sposób. I tak, zmniejszanie wartości parametru ν w przedziale $\nu \leq 0,4$ (wzrost ściśliwości ośrodków) powoduje intensywne zanikanie oscylacji charakterystyk fali. Dla tych wartości ν parametry fali zmierzają do ich wartości statycznych już po pierwszym cyklu drgań. Natomiast w przedziale $0,4 < \nu < 0,5$ (ośrodki quasi-ściśliwe) tłumienie drgań jest słabe. W granicznym przypadku dla $\nu = 0,5$, tj. w ośrodku nieściśliwym tłumienie całkowicie zanika. Ośrodek nieściśliwy drga jak zachowawczy układ mechaniczny o jednym stopniu swobody z częstością $\omega_0 = (2 / r_0) \sqrt{E / 3\rho_0}$.

Przedstawione w artykule wyniki analiz mogą być użyte m.in. w badaniach kulistych osłon balistycznych. Dodatkowo, naszym zdaniem, uzyskane wyniki są skromnym wkładem wiedzy do teorii rozprzestrzeniania się fal naprężenia w ośrodkach sprężystych.

Słowa kluczowe: ekspandująca kulista fala naprężenia, izotropowy ośrodek sprężysty, obciążenie dynamiczne

Symbole UKD: 534.222.2

1. Wprowadzenie

W pracy [1] rozwiązano analitycznie problem propagacji ekspandującej kulistej fali naprężenia w ściśliwym izotropowym ośrodku sprężystym. Stosowano liniową teorię sprężystości [2, 3], tj.:

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r}, \quad \varepsilon_\varphi = \varepsilon_\theta = \frac{u}{r}, \quad v = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad (1.1)$$

$$\begin{aligned} \sigma_r &= (2\mu + \lambda) \frac{\partial u}{\partial r} + 2\lambda \frac{u}{r}, \\ \sigma_\varphi &= 2(\mu + \lambda) \frac{u}{r} + \lambda \frac{\partial u}{\partial r}, \end{aligned} \quad (1.2)$$

$$\frac{\rho_0}{\rho} = 1 + \frac{\partial u}{\partial r} + 2\frac{u}{r}, \quad (1.3)$$

gdzie: $\lambda = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1 + \nu)}$;

u — przemieszczenie radialne elementów ośrodka;

v — prędkość radialna elementów ośrodka;

σ_r — naprężenie promieniowe (radialne);

$\sigma_\varphi = \sigma_\theta$ — naprężenia obwodowe (styczne);

ε_r — odkształcenie promieniowe (radialne);

$\varepsilon_\varphi = \varepsilon_\theta$ — odkształcenia obwodowe (styczne);

ρ_0 i ρ — gęstości ośrodka: początkowa i zaburzona;

E — moduł Younga;

ν — liczba Poissona;

r i t — współrzędne Lagrange'a.

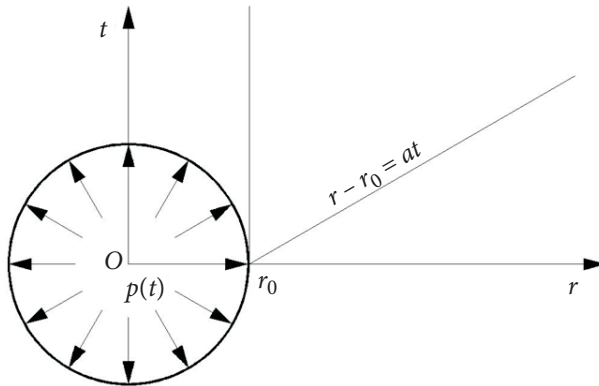
Falę wygenerowano ciśnieniem $p(t)$ dynamicznie wytworzonym wewnątrz kulistej kawerny o początkowym promieniu r_0 (rys. 1).

Wszystkie parametry fali określono za pomocą skalarnego potencjału $\varphi(x)$ i jego pochodnych, a mianowicie:

$$\left. \begin{aligned} u(r,t) &= \frac{\varphi'(r-r_0-at)}{r} - \frac{\varphi(r-r_0-at)}{r^2}, \\ \varepsilon_r &= \frac{\varphi''}{r} - 2\frac{\varphi'}{r^2} + 2\frac{\varphi}{r^3}, \\ \varepsilon_\varphi &= \frac{\varphi'}{r^2} - \frac{\varphi}{r^3}, & \frac{\rho_0}{\rho} &= 1 + \frac{\varphi''}{r}, \\ \sigma_r &= (2\mu + \lambda)\frac{\varphi''}{r} - 4\mu\frac{\varphi'}{r^2} + 4\mu\frac{\varphi}{r^3}, \\ \sigma_\varphi &= \lambda\frac{\varphi''}{r} + 2\mu\frac{\varphi'}{r^2} - 2\mu\frac{\varphi}{r^3}, \\ \sigma_\varphi - \sigma_r &= -2\mu\frac{\varphi''}{r} + 6\mu\frac{\varphi'}{r^2} - 6\mu\frac{\varphi}{r^3}, \end{aligned} \right\} \quad (1.4)$$

gdzie a jest prędkością rozprzestrzeniania się sprężystej fali naprężeń:

$$a = \sqrt{\frac{1-\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}} a_0, \quad a_0 = \sqrt{\frac{E}{\rho_0}}. \quad (1.5)$$



Rys. 1. Graficzny schemat zagadnienia początkowo-brzegowego

Górne przecinki przy symbolu φ , a mianowicie φ' i φ'' , oznaczają odpowiednio pierwszą i drugą pochodną tej funkcji względem jej argumentu.

Potencjał φ dla dowolnego ciśnienia $p(t)$ ma postać:

$$\varphi(x) = -\frac{(1+\nu)\sqrt{1-2\nu}}{E} r_0^2 \int_0^x p\left(\frac{y-x_0}{a}\right) e^{hy} \sin \omega y \, dy, \quad (1.6)$$

gdzie

$$h = \frac{1-2\nu}{1-\nu} \frac{1}{r_0} \geq 0, \quad \omega = \frac{\sqrt{1-2\nu}}{(1-\nu)r_0}. \quad (1.7)$$

Dla stałego ciśnienia nagle wytworzonego w kulistej kawernie, tj.: $p(t) \equiv p_0 = \text{const}$, z wyrażenia (1.6) otrzymuje się:

$$\left. \begin{aligned} \varphi(x) &= -\frac{1+\nu}{2} r_0^3 \frac{p_0}{E} \left[1 + e^{hx} \left(\sqrt{1-2\nu} \sin \omega x - \cos \omega x \right) \right], \\ \varphi'(x) &= -(1+\nu) \sqrt{1-2\nu} r_0^2 \frac{p_0}{E} e^{hx} \sin \omega x, \\ \varphi''(x) &= -\frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{1-\nu} r_0 \frac{p_0}{E} e^{hx} \left(\sqrt{1-2\nu} \sin \omega x + \cos \omega x \right), \end{aligned} \right\} \quad (1.8)$$

gdzie

$$\omega x = \frac{\sqrt{1-2\nu}}{1-\nu} \left(\frac{r}{r_0} - 1 - \sqrt{\frac{1-\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}} \frac{a_0 t}{r_0} \right), \quad (1.9)$$

$$h x = \frac{1-2\nu}{1-\nu} \left(\frac{r}{r_0} - 1 - \sqrt{\frac{1-\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}} \frac{a_0 t}{r_0} \right).$$

Styczne parametry problemu, wygenerowane przez statycznie wytworzone wewnątrz kawerny ciśnienie p_0 można określić wzorami:

$$\left. \begin{aligned} u_s(r) &= \frac{1+\nu}{2} \frac{p_0}{E} r_0 \left(\frac{r_0}{r} \right)^2, \\ \varepsilon_{r,s}(r) &= -(1+\nu) \frac{p_0}{E} \left(\frac{r_0}{r} \right)^3, \\ \varepsilon_{\varphi,s}(r) &= \frac{1+\nu}{2} \frac{p_0}{E} \left(\frac{r_0}{r} \right)^3, \\ \sigma_{r,s}(r) &= -p_0 \left(\frac{r_0}{r} \right)^3, \\ \sigma_{\varphi,s}(r) &= \frac{p_0}{2} \left(\frac{r_0}{r} \right)^3. \end{aligned} \right\} \quad (1.10)$$

W celu uproszczenia analizy ilościowej poszczególnych parametrów ekspandującej fali naprężenia wprowadzono następujące wielkości bezwymiarowe:

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{r}{r_0}, & \eta &= \frac{a_0 t}{r_0}, & U &= \frac{u}{r_0}, & U_s &= \frac{u_s}{r_0}, & V &= \frac{v}{a_0}, \\ P &= \frac{p_0}{E}, & R &= \frac{\rho}{\rho_0}, & S_r &= \frac{\sigma_r}{p_0}, & S_{rs} &= \frac{\sigma_{rs}}{p_0}, & S_\varphi &= \frac{\sigma_\varphi}{p_0}, \\ S_{\varphi s} &= \frac{\sigma_{\varphi s}}{p_0}, & S_z &= \frac{\sigma_\varphi - \sigma_r}{p_0}, & S_0 &= \frac{\sigma_0}{p_0}, & S_{zs} &= \frac{\sigma_{\varphi s} - \sigma_{rs}}{p_0}. \end{aligned} \quad (1.11)$$

Bezwymiarowe zmienne niezależne ξ i η zawarte są w przedziałach:

$$1 \leq \xi \leq \infty, \quad \eta \geq \sqrt{\frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{1-\nu}} (\xi - 1). \quad (1.12)$$

Po wykorzystaniu zależności (1.4) i (1.8), parametry ekspandującej fali naprężenia, wygenerowanej w liniowym ośrodku sprężystym przez nagle wytworzone w kulistej kawernie ciśnienie $p_0 = \text{const}$, można określić w wielkościach bezwymiarowych (1.11) za pomocą następujących wzorów:

$$\left. \begin{aligned}
 U(\xi, \eta) &= \frac{1+\nu}{2} \frac{P}{\xi^2} \left\{ 1 - \left[\sqrt{1-2\nu} (2\xi-1) \sin \omega x + \cos \omega x \right] e^{hx} \right\}, \\
 V(\xi, \eta) &= \frac{P}{\xi} \left\{ \left[(1-2\nu) \sqrt{\frac{1+\nu}{1-\nu}} - \sqrt{1-\nu^2} \frac{1}{\xi} \right] \sin \omega x + \right. \\
 &\quad \left. + \sqrt{\frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{1-\nu}} \cos \omega x \right\} e^{hx}, \\
 \varepsilon_r(\xi, \eta) &= -(1+\nu)P \left\{ \frac{1}{\xi^3} + \left[\sqrt{1-2\nu} \left(\frac{1-2\nu}{1-\nu} \frac{1}{\xi} - 2 \frac{1}{\xi^2} + \frac{1}{\xi^3} \right) \sin \omega x + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - \left(\frac{1}{\xi^3} - \frac{1-2\nu}{1-\nu} \frac{1}{\xi} \right) \cos \omega x \right] e^{hx} \right\}, \\
 \varepsilon_\varphi(\xi, \eta) &= \frac{1+\nu}{2} \frac{P}{\xi^3} \left\{ 1 - \left[\sqrt{1-2\nu} (2\xi-1) \sin \omega x + \cos \omega x \right] e^{hx} \right\}, \\
 R(\xi, \eta) &= \left[1 + \varepsilon_r(\xi, \eta) + 2\varepsilon_\varphi(\xi, \eta) \right]^{-1}, \\
 S_r(\xi, \eta) &= -\frac{1}{\xi^3} \left\{ 1 + (\xi-1) \left[\sqrt{1-2\nu} (\xi-1) \sin \omega x + (\xi+1) \cos \omega x \right] e^{hx} \right\}, \\
 S_\varphi(\xi, \eta) &= \frac{1}{2\xi^3} \left\{ 1 + \left[\sqrt{1-2\nu} \left(-\frac{2\nu}{1-\nu} \xi^2 - 2\xi + 1 \right) \sin \omega x + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - \left(\frac{2\nu}{1-\nu} \xi^2 + 1 \right) \cos \omega x \right] e^{hx} \right\},
 \end{aligned} \right\} \quad (1.13)$$

$$\begin{aligned}
 S_z(\xi, \eta) &= S_\varphi(\xi, \eta) - S_r(\xi, \eta) = \\
 &= \frac{1}{\xi^3} \left\{ \frac{3}{2} + \left[\sqrt{1-2\nu} \left(\frac{1-2\nu}{1-\nu} \xi^2 - 3\xi + \frac{3}{2} \right) \sin \omega x + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \left(\frac{1-2\nu}{1-\nu} \xi^2 - \frac{3}{2} \right) \cos \omega x \right] e^{hx} \right\}, \quad (1.14)
 \end{aligned}$$

gdzie

$$\omega x = \frac{\sqrt{1-2\nu}}{1-\nu} (\xi-1) - \frac{1}{\sqrt{1-\nu^2}} \eta, \quad hx = \frac{1-2\nu}{1-\nu} (\xi-1) - \sqrt{\frac{1-2\nu}{1-\nu^2}} \eta. \quad (1.15)$$

Zgodnie z (1.10) i (1.11) bezwymiarowe wartości parametrów statycznych określone są wzorami:

$$\begin{aligned} U_s(\xi) &= \frac{1+\nu}{2} P \xi^{-2}, & \varepsilon_{rs}(\xi) &= -(1+\nu) P \xi^{-3}, & \varepsilon_{\varphi s}(\xi) &= \frac{1+\nu}{2} P \xi^{-3}, \\ S_{rs}(\xi) &= -\xi^{-3}, & S_{\varphi s}(\xi) &= \frac{1}{2} \xi^{-3}, & S_{\varphi s}(\xi) - S_{rs}(\xi) &= \frac{3}{2} \xi^{-3}. \end{aligned} \quad (1.16)$$

Przytoczone wyżej zamknięte wzory analityczne wyprowadzono w pracy [1]. Stanowią one podstawę do ilościowej analizy parametrów ekspandującej fali naprężenia w liniowym izotropowym ośrodku sprężystym, którą przedstawiono w dalszym ciągu rozważań.

Ze wstępnej analizy przytoczonych wzorów wynika, że dynamiczne wartości mechanicznych parametrów ekspandującej fali naprężenia, wygenerowanej nagle wytworzonym w kulistej kawernie stałym ciśnieniem p_0 w liniowym ośrodku sprężystym, maleją intensywnie w przestrzeni wraz z oddalaniem się od centrum układu. Natomiast w poszczególnych sferycznych przekrojach ośrodka parametry zmieniają się w funkcji czasu w sposób pulsacyjny wokół ich statycznych wartości. Pulsacje te w ośrodku ściśleliwym zanikają z upływem czasu. Jest to następstwem sferycznej dywergencji ekspandującej fali naprężenia. Malenie pulsacji spowodowane jest transportem mechanicznej energii przez propagującą się falę naprężenia do wzrastających w czasie zaburzonych obszarów ośrodka.

Obecnie przejdziemy do szczegółowej analizy parametrów fali. Jako pierwsze w kolejności rozpatrzymy przemieszczenie ośrodka.

2. Analiza przemieszczenia dla nieskończonego impulsu ciśnienia o intensywności $p_0 = \text{const}$

Zgodnie z zamieszczonymi wyżej uwagami ogólnymi, maksymalne wartości przemieszczenia, reprezentowane w postaci bezwymiarowej za pomocą funkcji $U(\xi, \eta)$, występują na powierzchni kawerny, tj. dla $\xi = 1$. W tym przypadku wzór (1.13)₁ można zredukować do postaci:

$$\begin{aligned} U(1, \eta) &= \frac{1+\nu}{2} P \left\{ 1 + \left[\sqrt{1-2\nu} \sin\left(\frac{\eta}{\sqrt{1-\nu^2}}\right) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \cos\left(\frac{\eta}{\sqrt{1-2\nu}}\right) \right] \exp\left(-\sqrt{\frac{1-2\nu}{1-\nu^2}} \eta\right) \right\}. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Z wzoru (2.1) wynika, że funkcja $U(1, \eta)$ zmienia się ze wzrostem η w sposób pulsacyjny i osiąga lokalne ekstrema. Największe maksimum występuje dla wartości $\eta = \eta_e$, która określona jest trygonometrycznym równaniem, a mianowicie:

$$\operatorname{tg}\left(\pi - \frac{\eta_e}{\sqrt{1-\nu^2}}\right) = \frac{\sqrt{1-2\nu}}{\nu}. \quad (2.2)$$

Z zależności (2.1) i (2.2) bezpośrednio widać, że dla każdej liczby Poissona ν można określić odpowiednie maksymalne przemieszczenie powierzchni kawerny $U_{\max} = U(1, \eta_e)$. W związku z tym, podobnie jak w układach drgań mechanicznych o jednym stopniu swobody, można wprowadzić tutaj współczynnik dynamiczności obciążenia (w skrócie — współczynnik dynamiczny) charakteryzujący ekspandującą falę naprężenia, a mianowicie:

$$\Psi(\nu) = \frac{U(1, \eta_e)}{U_s}. \quad (2.3)$$

Dyskretne wartości tego współczynnika dla wybranych liczb Poissona ν przytoczono w tabeli 1, a ciągłą jego zmianę w funkcji ν przedstawiono na rysunku 2.

TABELA 1

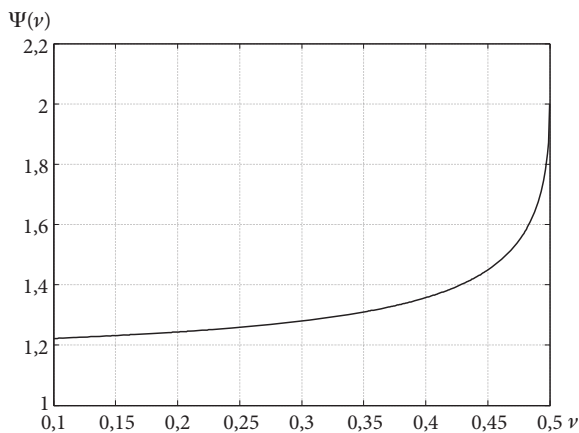
Wartości współczynnika dynamicznego $\Psi(\nu)$

ν	0,1	0,2	0,3	0,4	0,49	0,5
η_e	1,67	1,79	1,92	2,11	2,49	2,72
$U(1, \eta_e)$	0,672	0,746	0,832	0,950	1,242	1,500
U_s	0,55	0,60	0,65	0,70	0,745	0,75
$\Psi(\nu)$	1,222	1,244	1,280	1,357	1,667	2,000

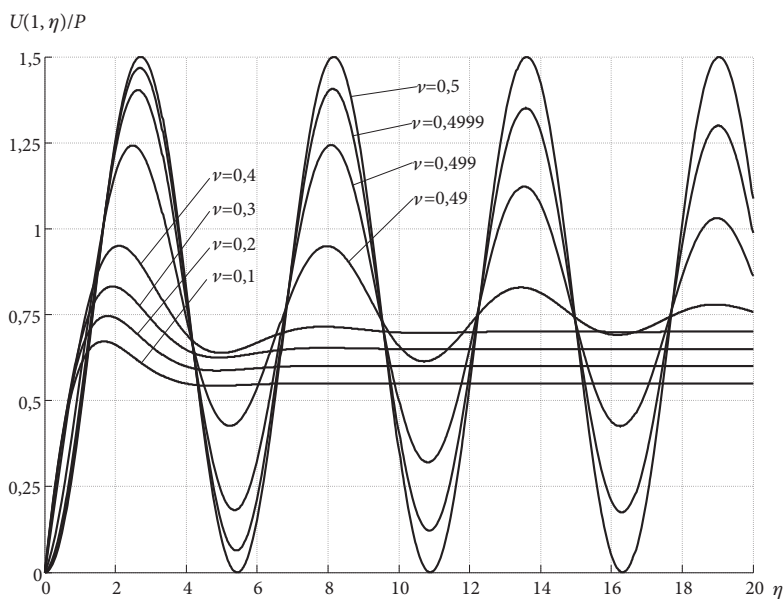
Jak widać, maksymalny efekt dynamiczności obciążenia występuje w ośrodku nieściśliwym, tj. dla $\nu = 0,5$. Ściśliwość ośrodka dość intensywnie amortyzuje skutki dynamicznego obciążenia, co widać na rysunku 2.

Przykładową zmianę względnego przemieszczenia (U/P) powierzchni kawerny ($\xi = 1$) w funkcji $\eta = a_0 t / r_0$ dla kilku wartości liczby Poissona (ν) przedstawiono na rysunku 3. Jak się okazuje, parametr ν , który jest miarą ściśliwości ośrodka, ma istotny wpływ na przebieg zmiany wielkości $U(1, \eta)/P$ w funkcji η .

Można wyróżnić dwa przedziały wartości liczbowych parametru ν , w których drganie powierzchni kawerny jest tłumione w odmienny sposób. I tak, zmniejszanie wartości parametru ν w przedziale $\nu \leq 0,4$ (wzrost ściśliwości ośrodków) powoduje intensywne zanikanie oscylacji powierzchni kawerny. Dla tych wartości



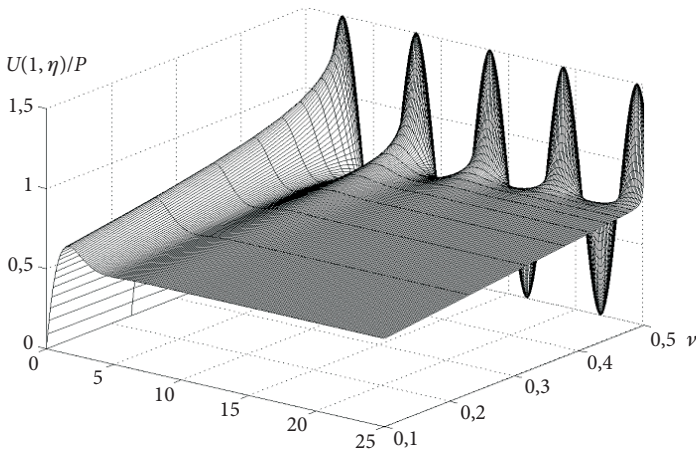
Rys. 2. Zmiana współczynnika $\Psi(\nu)$ w funkcji ν



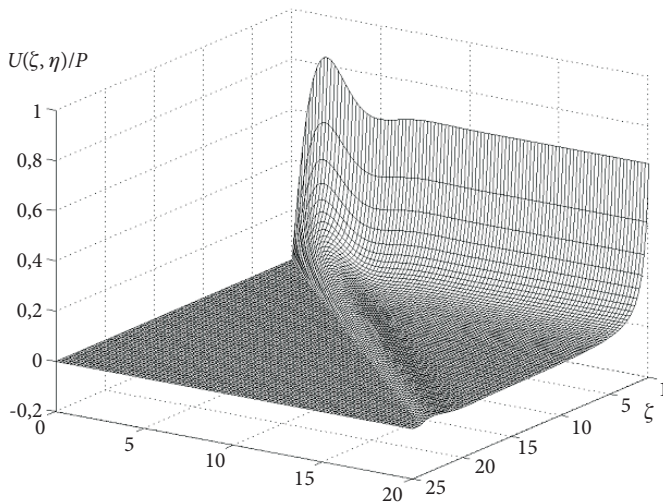
Rys. 3. Zmiana względnego przemieszczenia (U/P) powierzchni kawerny ($\xi = 1$) w funkcji η dla kilku wartości ν

ν przemieszczenie powierzchni kawerny zmierza do jej statycznego położenia, tj. $(U_s/P) = (1 + \nu)/2$ już podczas pierwszego cyklu drgania (rys. 3). Natomiast w przedziale $0,4 < \nu < 0,5$, czyli w ośrodkach quasi-ściśliwych tłumienie drgań jest słabe. W granicznym przypadku dla $\nu = 0,5$, tj. w ośrodku nieściśliwym tłumienie drgań całkowicie zanika i powierzchnia kawerny pulsuje harmonicznie wokół położenia statycznego ze stałą amplitudą (U/P) = 0,75 (rys. 3).

Zwróćmy jeszcze uwagę na anormalne zachowanie się ośrodka w przedziale $0,4 < \nu < 0,5$. W tym przypadku nieznaczące przyrosty $\Delta\nu$ powodują istotne zmiany amplitudy drgań powierzchni kawerny (rys. 4). Na przykład dla $\Delta\nu = 0,5 - 0,4 = 0,1$ maksymalny przyrost względnego przemieszczenia $(\Delta U/P) = 1,5 - 0,7 = 0,8$.



Rys. 4. Wpływ parametru ν na kształt funkcji $U(1, \eta)/P$



Rys. 5. Przestrzenny kształt funkcji $U(1, \eta)/P$ dla $\nu = 0,3$

Przedstawiona wyżej analiza graficzna stosunku $U(1, \eta)/P$ dotyczyła ruchu powierzchni kulistej kawerny ($\xi = 1$). W analogiczny sposób, z odpowiednio zmniejszonymi wartościami wynikającymi z przestrzennej dywergencji fali naprężenia, przemieszczają się ruchem pulsacyjnym poszczególne przekroje sferyczne

ośrodka dla $\xi > 1$ (rys. 5). Z wykresu tego bezpośrednio wynika, że maksymalne przemieszczenia poszczególnych przekrojów dla $\nu < 0,5$ występują w otoczeniu czoła ekspandującej fali, tj. dla

$$\xi - 1 = \sqrt{\frac{1 - \nu}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}} \eta.$$

3. Analiza pola naprężeń dla nieskończonego impulsu ciśnienia o intensywności $p_0 = \text{const}$

W realnych ośrodkach (metalach, skałach itp.) zawsze występuje skończona wartość granicy sprężystości. Uzyskane rozwiązanie badanego problemu obowiązuje w zakresie sprężystym. Z tych faktów wynika ograniczenie na maksymalną wartość ciśnienia wytwarzanego w kawernie, tj. $p_0 \leq p_{\max}$. Po przekroczeniu tej wartości ciśnienia, w metalach sprężysto-plastycznych pojawiają się w bezpośrednim otoczeniu powierzchni kawerny odkształcenia sprężysto-plastyczne lub pęknięcia w ośrodkach kruchych (żeliwo, skały). W tym zakresie ciśnień przytoczone w niniejszej pracy rozwiązanie traci fizyczny sens. Mając to ograniczenie na uwadze, dokonamy dokładnej analizy pola naprężeń w badanym ośrodku.

Jak wiadomo, w metalach plastyczne odkształcenia powodowane są przez składowe dewiatora naprężeń. Na tej podstawie można sądzić, że warunek początku płynięcia materiału zależy tylko od różnicy naprężeń $\sigma_\varphi - \sigma_r$. Rzeczywiście, wyrażenie $(\sigma_\varphi - \sigma_r)/2$ określa maksymalną wartość naprężenia stycznego. Zgodnie zatem z warunkiem plastyczności Treski, a w przypadku symetrii kulistej — również z warunkiem Hubera-Misesa-Henckiego, mamy:

$$\sigma_z = \sigma_\varphi - \sigma_r = \sigma_0, \tag{3.1}$$

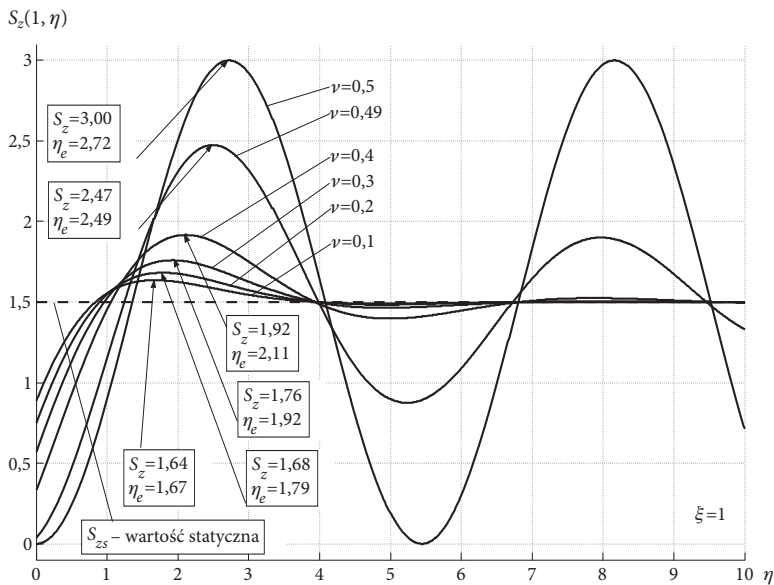
gdzie σ_0 jest wartością dynamicznej granicy plastyczności, otrzymaną z próby rozciągania danego materiału.

Zgodnie z powyższymi uwagami, główny wysiłek skupimy w dalszym ciągu rozważań na analizie względnego naprężenia zastępczego, tj. $S_z = (\sigma_z/p_0) = (\sigma_\varphi - \sigma_r)/p_0$.

Jak już wspomniano, maksymalne wartości funkcja $S_z(\xi, \eta)$ osiąga na powierzchni kawerny, tj. dla $\xi = 1$. Zgodnie z wyrażeniami (1.14) i (1.15), funkcję $S_z(\xi, \eta)$ dla $\xi = 1$ można zredukować do postaci:

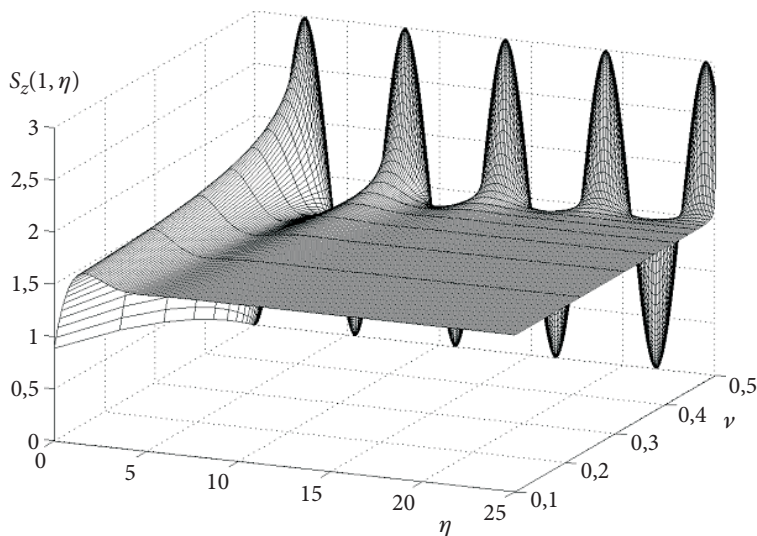
$$S_z(1, \eta) = \frac{3}{2} + \frac{1 + \nu}{2(1 - \nu)} \left[\sqrt{1 - 2\nu} \sin \frac{\eta}{\sqrt{1 - \nu^2}} + \right. \\ \left. - \cos \frac{\eta}{\sqrt{1 - \nu^2}} \right] \exp \left(-\sqrt{\frac{1 - 2\nu}{1 - \nu^2}} \eta \right). \tag{3.2}$$

Z porównania wyrażen (2.1) i (3.2) wynika, że funkcje $S_z(1, \eta)$ i $U(1, \eta)$ mają analogiczną postać, zatem wielkość $S_z(1, \eta)$ osiąga największe maximum dla $\eta = \eta_e$. Wartość η_e określa trygonometryczne równanie (2.2). Oznacza to, że mimo nagłego wzrostu ciśnienia p_0 wewnątrz kawerny, naprężenie zastępcze $S_z(1, \eta)$ rośnie do maksymalnej wartości w sposób monotoniczny i osiąga ją po upływie skończonego czasu $t_e = (r_0/a_0)\eta_e \neq 0$. Jak widać, występuje pewna „bezwładność” w narastaniu naprężenia $S_z(1, \eta)$ do maksymalnej wartości w porównaniu z ciśnieniem p_0 (rys. 6). Zmianę wielkości $S_z(1, \eta)$ w funkcji η dla wybranych wartości liczby Poissona ν pokazano na rysunku 6.



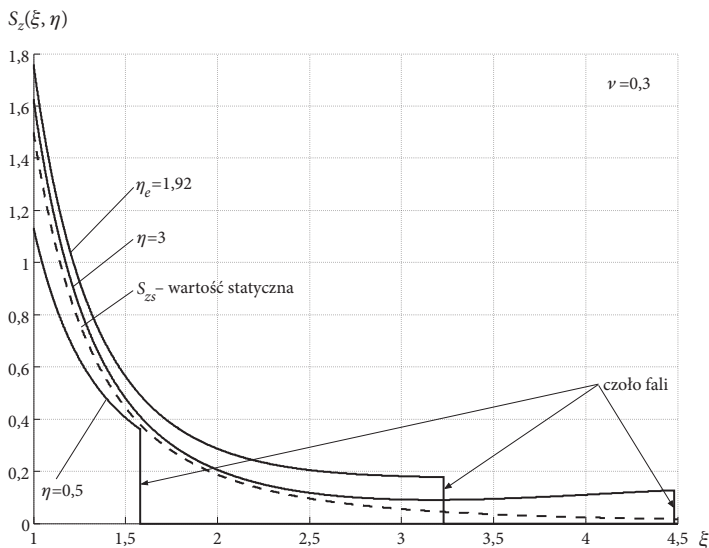
Rys. 6. Zmiana względnego naprężenia zastępczego $S_z(1, \eta)$ w funkcji η dla wybranych wartości parametru ν

Z porównania wykresów zamieszczonych na rysunkach 3 i 6 wynika, że zmiany funkcji $U(1, \eta)$ i $S_z(1, \eta)$ są podobne. Analogicznie jak dla $U(1, \eta)$ zaznacza się istotny wpływ ścisłości ośrodka (parametru ν) na pulsacyjną zmianę naprężenia $S_z(1, \eta)$ w funkcji η . W ośrodku ściśłym dla $\nu < 0.4$ pulsacje funkcji $S_z(1, \eta)$ są intensywnie tłumione do wartości statycznej $S_{zs} = 1.5$. Na przykład dla $\nu < 0.3$ już po upływie czasu $t = 4r_0/a_0$ mamy $S_z(1, 4) \approx S_{zs} = 1.5$. Natomiast dla $\nu = 0.5$, tj. w ośrodku nieściśłym tłumienie całkowicie zanika i naprężenie $S_z(1, \eta)$ harmonicznie pulsuje ze stałą amplitudą równą 1,5 wokół wartości statycznej $S_{zs} = 1.5$. Anormalny wpływ parametru ν na kształt funkcji $S_z(1, \eta)$ pokazany jest w ujęciu przestrzennym na rysunku 7.



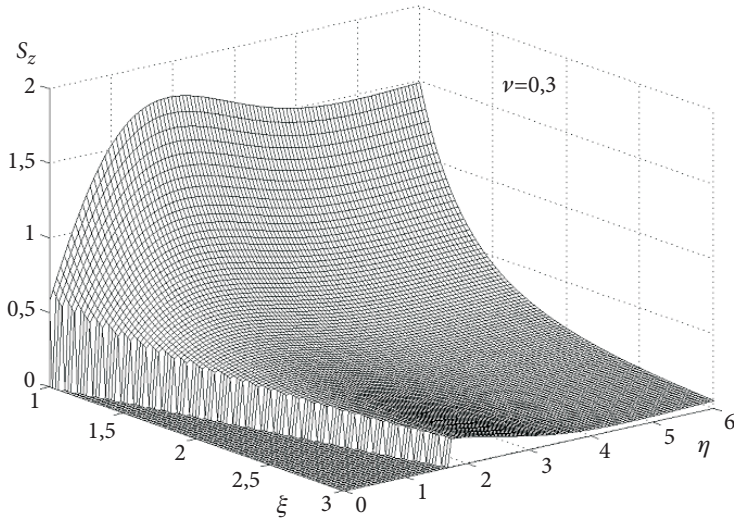
Rys. 7. Wpływ parametru ν na kształt funkcji $S_z(1, \eta)$

Z kolei na rysunku 8 pokazano zmianę naprężenia $S_z(\xi, \eta_i)$ w funkcji ξ dla trzech wybranych wartości η i $\nu = 0,3$. Widoczna jest intensywna redukcja naprężenia S_z wraz ze wzrostem odległości od centrum kawerny.

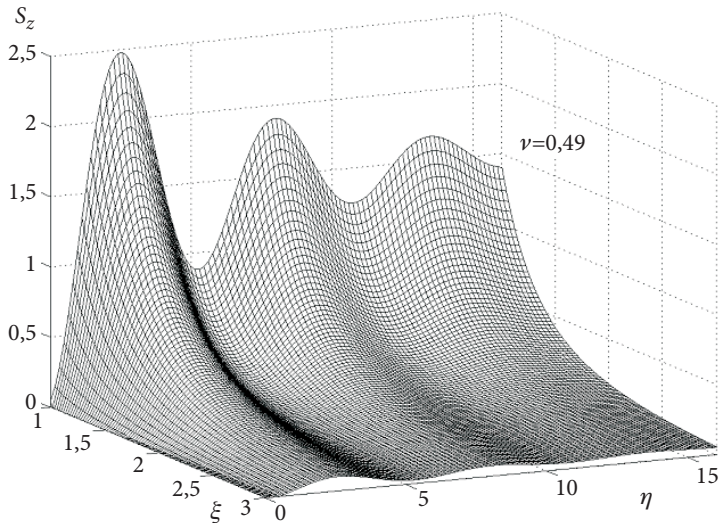


Rys. 8. Zmiana naprężenia $S_z(\xi, \eta)$ w funkcji ξ dla trzech wartości η i $\nu = 0,3$

Pełne przestrzenne kształty funkcji $S_z(\xi, \eta)$ dla $\nu = 0,3$ i $\nu = 0,49$ pokazane są na rysunkach 9 i 10. Widoczny jest na nich istotny wpływ parametru ν na wartości naprężenia $S_z(\xi, \eta)$.



Rys. 9. Przestrzenny kształt funkcji $S_z(\xi, \eta)$ dla $\nu = 0,3$



Rys. 10. Przestrzenny kształt funkcji $S_z(\xi, \eta)$ dla $\nu = 0,49$

Z przedstawionej analizy zmian wartości naprężenia S_z wynika, że w bezpośrednim otoczeniu powierzchni kawerny, przy dostatecznie wysokim ciśnieniu p_0 będzie przekraczana granica plastyczności ośrodka. W tym obszarze podane w pracy rozwiązanie traci fizyczny sens. Maksymalne ciśnienie, przy którym nie przekraczana jest w warstwie ośrodka, otaczającej bezpośrednio kawernę, jego dynamiczna granica plastyczności można określić za pomocą następującego wzoru:

$$p_{\max} = \frac{\sigma_0}{S_z(1, \eta_e)} \quad \text{lub} \quad \frac{p_{\max}}{\sigma_0} = \frac{1}{S_z(1, \eta_e)}. \quad (3.3)$$

Wartość stosunku p_{\max}/σ_0 dla wybranych liczb Poissona ν zamieszczono w tabeli 2.

TABELA 2

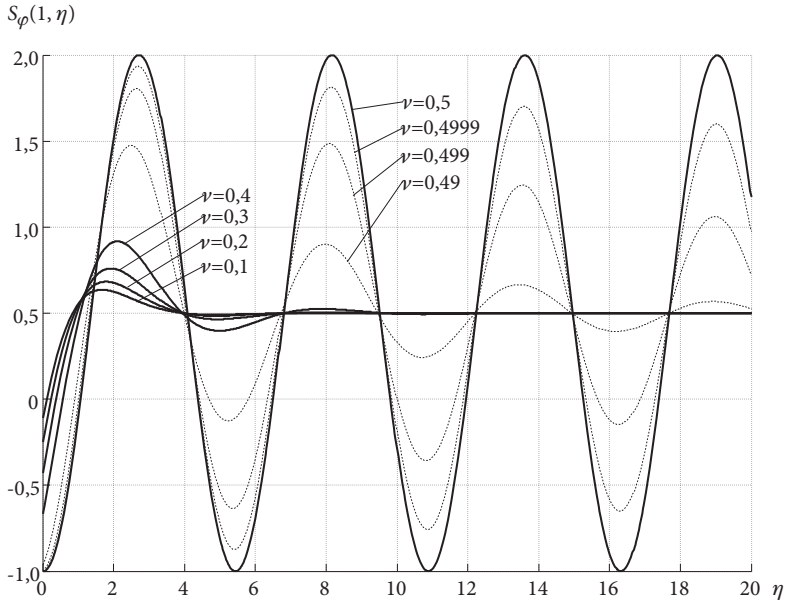
Wartości stosunku p_{\max}/σ_0 dla wybranych liczb ν

ν	0,1	0,2	0,3	0,4	0,49	0,5
η_e	1,67	1,79	1,92	2,11	2,49	2,72
$S_z(1, \eta_e)$	1,64	1,68	1,76	1,92	2,47	3,00
p_{\max}/σ_0	0,61	0,60	0,57	0,52	0,40	0,33

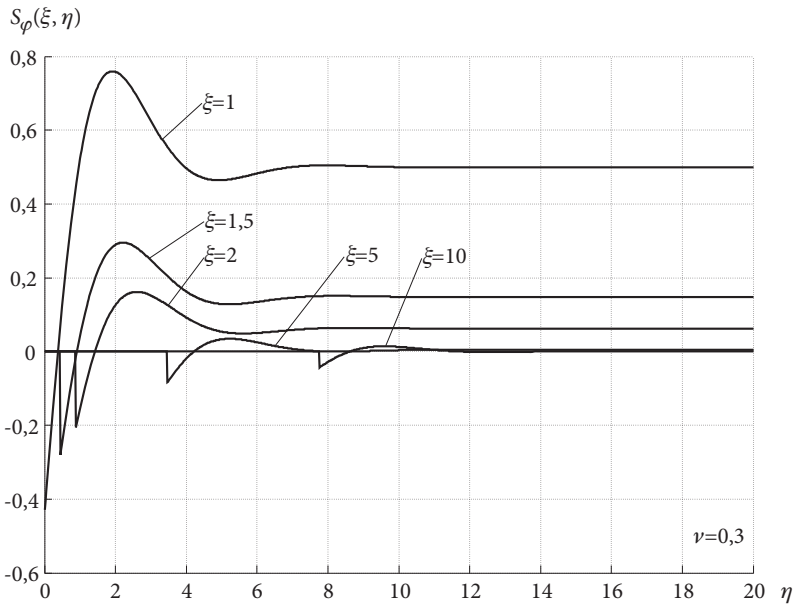
Na rysunku 11 pokazano zmianę obwodowego naprężenia względnego $S_\varphi(1, \eta) = \sigma_\varphi / p_0$ na powierzchni kawerny w funkcji η dla wybranych wartości parametru ν . Przebiegi krzywych są analogiczne, jak dla funkcji $S_z(1, \eta)$ (rys. 6). Należy zwrócić uwagę na fakt, że w początkowym okresie rozszerzania się kawerny naprężenie $S_\varphi(1, \eta)$ jest ujemne. Ujemna wartość naprężenia S_φ propaguje się na czole fali i w bezpośrednim jego otoczeniu, co jest widoczne na rysunku 12. Jest to dynamiczny efekt bezwładnościowego oddziaływania ośrodka w otoczeniu czoła fali silnej nieciągłości.

Na rysunku 13 przedstawiono zmianę względnego naprężenia radialnego $S_r(\xi, \eta)$ w funkcji η dla wybranych wartości ξ i $\nu = 0,3$. Maksymalne wartości bezwzględne naprężenie $S_r(\xi, \eta)$ osiąga na czole fali. Wartości te intensywnie maleją ze wzrostem odległości od centrum kawerny. Zwróćmy uwagę na fakt, że w dostatecznie odległych od powierzchni kawerny przekrojach ośrodka, za frontem fali, występują strefy, w których ośrodek jest radialnie rozciągany ($S_r(\xi, \eta) > 0$). Jest to wynikiem drgającego ruchu ośrodka ściśliwego.

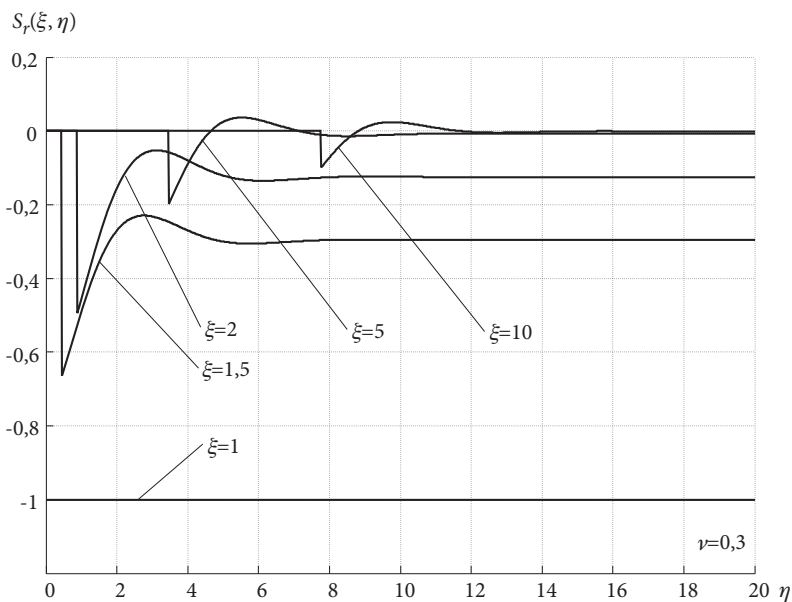
Na zakończenie przedstawionej analizy parametrów ekspandującej fali naprężenia należy stwierdzić, że gęstość ośrodka dla całego zakresu wartości parametru ν zmienia się nieznacznie (rys. 14). Maksymalne przyrosty ΔR nie przekraczają kilku dziesiątych części procenta.



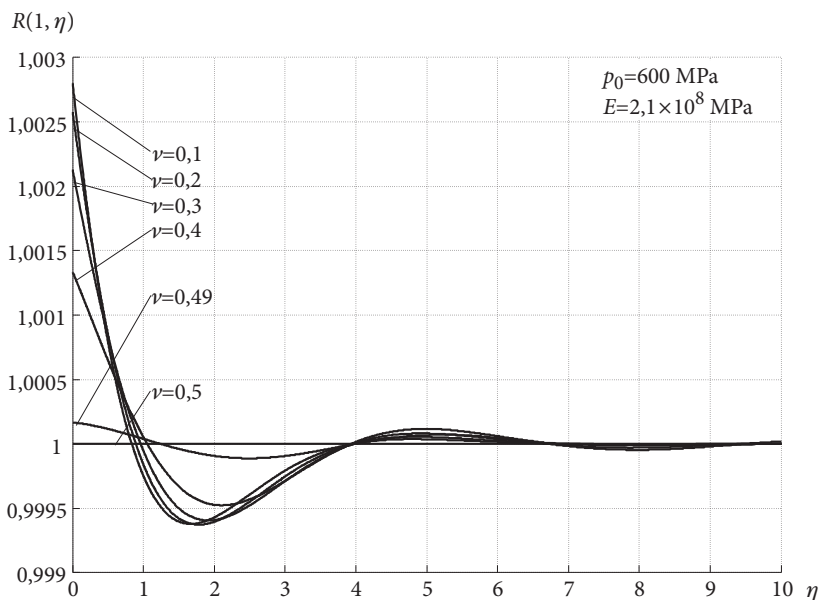
Rys. 11. Zmiana względnego naprężenia obwodowego $S_\varphi(1, \eta)$ na powierzchni kawerny w funkcji η dla wybranych wartości parametru ν



Rys. 12. Zmiana względnego naprężenia obwodowego $S_\varphi(\xi, \eta)$ w funkcji η dla wybranych przekrojów $\xi = \text{const}$ i $\nu = 0,3$



Rys. 13. Zmiana względnego naprężenia radialnego $S_r(\xi, \eta)$ w funkcji η dla wybranych przekrojów $\xi = \text{const}$ i $\nu = 0,3$



Rys. 14. Zmiana względnej gęstości ośrodka $R(1, \eta)$ w funkcji η dla $\xi = 1$ i wybranych wartości parametru ν

4. Wnioski końcowe

Z analizy rozpatrywanego problemu można wyciągnąć następujące wnioski:

- Z postaci uzyskanego analitycznego rozwiązania problemu wynika, że przemieszczenia i naprężenia maleją w przybliżeniu odwrotnie proporcjonalnie do kwadratu i sześciemu odległości od centrum kawerny. Maksymalne bezwzględne wartości parametrów fali naprężenia występują zatem na powierzchni kawerny. Jest to wynikiem kulistej dywergencji ekspandującej fali.
- Powierzchnia kawerny i kolejne przekroje sferyczne ośrodka ściśliwego przemieszczają się z upływem czasu tłumionym ruchem drgającym wokół przemieszczenia statycznego, spowodowanego ciśnieniem p_0 wytworzonym w kawernie w sposób statyczny. Podobnie zachowują się pozostałe charakterystyki fali.
- Na tłumienie drgań istotny wpływ ma ściśliwość ośrodka, charakteryzowana w pracy przez liczbę Poissona ν . Zmniejszanie wartości parametru ν w przedziale $\nu \leq 0,4$ (wzrost ściśliwości ośrodków) powoduje intensywne zanikanie oscylacji charakterystyk fali. Dla tych wartości ν parametry fali zmierzają do ich wartości statycznych już po upływie pierwszego cyklu drgań (rys. 3 i 6). Natomiast w przedziale $0,4 < \nu < 0,5$ (ośrodki quasi-ściśliwe) tłumienie drgań jest słabe. W granicznym przypadku dla $\nu = 0,5$, tj. w ośrodku nieściśliwym, tłumienie drgań całkowicie zanika i powierzchnia kawerny pulsuje harmonicznym wokół położenia statycznego ze stałą amplitudą $(U/P) = 0,75$ (rys. 3).
- Prędkość ekspandującej kulistej fali naprężenia w ściśliwym ośrodku liniowo-sprężystym jest rosnącą funkcją liczby Poissona ν :

$$a = \sqrt{\frac{(1-\nu)E}{(1+\nu)(1-2\nu)\rho_0}}.$$

Prędkość ta determinuje tempo przekazywania energii do kolejnych warstw ośrodka z obciążonej powierzchni pustki. W przypadku granicznym ośrodek staje się nieściśliwy i drga jak zachowawczy układ mechaniczny o jednym stopniu swobody i częstotliwości drgań własnych

$$\omega = \frac{2}{r_0} \sqrt{\frac{E}{3\rho_0}}.$$

Zauważmy, że częstotliwość ta jest odwrotnie proporcjonalna do promienia pustki.

- W ośrodku nieściśliwym ($\nu = 0,5$) parametry problemu określone są przez następujące wzory:

$$\left. \begin{aligned} U(\xi, \eta) &= \frac{3}{4} P \frac{1}{\xi^2} \left(1 - \cos \frac{2}{\sqrt{3}} \eta \right), \\ V(\xi, \eta) &= \frac{\sqrt{3}}{2} P \frac{1}{\xi^2} \sin \frac{2}{\sqrt{3}} \eta, \\ \varepsilon_r(\xi, \eta) &= -\frac{3}{2} P \frac{1}{\xi^3} \left(1 - \cos \frac{2}{\sqrt{3}} \eta \right), \\ \varepsilon_\varphi(\xi, \eta) &= \frac{3}{4} P \frac{1}{\xi^3} \left(1 - \cos \frac{2}{\sqrt{3}} \eta \right), \\ R(\xi, \eta) &= 1, \\ S_r(\xi, \eta) &= -\frac{1}{\xi^3} \left[1 + (\xi^2 - 1) \cos \frac{2}{\sqrt{3}} \eta \right], \\ S_\varphi(\xi, \eta) &= \frac{1}{2\xi^3} \left[1 - (2\xi^2 + 1) \cos \frac{2}{\sqrt{3}} \eta \right], \\ S_z(\xi, \eta) &= S_\varphi(\xi, \eta) - S_r(\xi, \eta) = \frac{3}{2\xi^3} \left(1 - \cos \frac{2}{\sqrt{3}} \eta \right). \end{aligned} \right\} \quad (4.1)$$

- Naprężenie obwodowe $S_\varphi(1, \eta)$ na powierzchni kawerny w czasie jej przemieszczania się narasta od wartości ujemnej. Wynika stąd wniosek, że maksymalna wartość naprężenia zastępczego $S_{z \max}$ zależy od czasu trwania impulsu ciśnienia. Problemem tym zajmiemy się w oddzielnym opracowaniu.
- Przedstawione w artykule wyniki analiz mogą być użyte m.in. w badaniach kulistych osłon balistycznych. Dodatkowo, z naszego punktu widzenia, wyniki tych analiz są skromnym wkładem wiedzy do teorii rozprzestrzeniania się fal naprężeń w ośrodkach sprężystych.

Artykuł wpłynął do redakcji 6.01.2009 r. Zweryfikowaną wersję po recenzji otrzymano w styczniu 2009 r.

LITERATURA

- [1] E. WŁODARCZYK, M. ZIELENKIEWICZ, *Influence of elastic material compressibility on parameters of the expanding spherical stress wave I. Analytical solution to the problem*, Journal of Theoretical and Applied Mechanics, 47, 1, 2009.

- [2] J. D. ACHENBACH, *Wave Propagation in Elastic Solids*, North-Holland Publ. Co., American Elsevier, Amsterdam-New York, 1975.
- [3] W. NOWACKI, *Theory of Elasticity*, PWN, Warszawa, 1970 [in Polish].

E. WŁODARCZYK, M. ZIELENKIEWICZ

Qualitative and quantitative influence of the Poisson's ratio ν on characteristics of spherical stress wave expanding in linear-elastic isotropic medium

Abstract. The vast qualitative and quantitative analysis of the characteristics of a spherical stress wave expanding in linearly-elastic medium was made. The wave was generated with the pressure $p_0 = \text{const}$ suddenly created in a spherical cavity of the initial radius r_0 . The studies were based on the analytical closed solution to the problem presented in paper [1]. From the form of analytic problem solution results that displacements and stresses decrease approximately in inverse proportion to the square and the cube of the distance from cavity centre. Therefore the maximum absolute values of wave parameters occur on the cavity surface. It is the result of the spherical divergence of expanding wave. It was found that the cavity surface and successive spherical sections of compressible medium move in course of time with a damped harmonic motion around their static positions. The remaining characteristics of wave behave analogously. Material compressibility, represented by the Poisson's ratio ν in this paper, has the main influence on the vibration damping. We can mark out two ranges of the parameter ν values in which above-mentioned vibrations damped in a different manner. Thus, Poisson's ratio in the range below about 0.4 (media compressibility increase) causes intense decaying of the wave characteristics oscillations. For this values of ν , the wave parameters approach their static values already in the first cycle of vibration. On the other hand in the range $0.4 < \nu < 0.5$ (quasi-compressible media) the damping of vibrations is very low. In the limiting case $\nu = 0.5$, i.e., in the incompressible material damping vanishes completely. The incompressible medium vibrates like a conservative mechanical system of one degree of freedom with the eigenfrequency $\omega_0 = (2/r_0)\sqrt{E/3\rho_0}$. The results of analyses presented in this paper can be used to research spherical ballistic casings. In addition, from our point of view, the obtained results are modest contribution of knowledge to the theory of stress waves propagation in elastic media.

Keywords: expanding spherical stress wave, isotropic elastic medium, dynamic load

Universal Decimal Classification: 534.222.2