



## Ścisłe rozwiązanie relatywistycznych równań ruchu naładowanej cząstki w wiązce laserowej w obecności stałego, osiowego pola magnetycznego

ADAM DUBIK, MICHAŁ J. MAŁACHOWSKI

Politechnika Radomska im. Kazimierza Pułaskiego, Wydział Nauczycielski,  
Katedra Wychowania Technicznego, 26-600 Radom, ul. J. Malczewskiego 20A

**Streszczenie.** W pracy przedstawiono wyniki teoretycznej analizy zachowania się naładowanej cząstki w polu elektromagnetycznym w wiązce laserowej oraz w stałym polu magnetycznym skierowanym osiowo względem wiązki laserowej. Wyniki w postaci graficznej uzyskano, korzystając z wyprowadzonych oryginalnych analitycznych wyrażeń. Weryfikację otrzymanych równań analitycznych przeprowadzono, rozwiązując wyjściowe równania różniczkowe metodą Runge-Kutta.

Otrzymane analityczne równania umożliwiły ilościowe zobrazowanie za pomocą wykresów wpływu różnych parametrów na kształt, rozmiary, kierunek ruchu elektronu wzdłuż trajektorii, a także na jego energię kinetyczną. Przez zwiększanie natężenia pola elektrycznego wiązki laserowej można zwiększać rozmiary trajektorii zarówno w przypadku hipocykloid, jak i w przypadku epicykloid tzn. krzywych będących rzutem trajektorii na płaszczyznę  $(x, y)$ . Ta zmiana jest proporcjonalna do zmiany amplitudy natężenia pola elektrycznego. Natomiast zwiększanie indukcji stałego, wzdłużnego pola magnetycznego prowadzi do zmniejszania rozmiarów trajektorii i zmian ich kształtów.

**Słowa kluczowe:** relatywizm, akceleracja, naładowana cząstka, wiązka lasera, pole elektromagnetyczne, pole magnetyczne

**Symbole UKD:** 537.8

### 1. Wprowadzenie

W miarę wzrastania postępu w zakresie technologii laserów o coraz większym natężeniu generowanego promieniowania następuje rozwój badań w wielu dziedzinach. Rozwój ten dotyczy zarówno badań podstawowych, jak i technologii. Jednym z kierunków szczególnie intensywnie rozwijających się jest akceleracja naładowanych

cząstek wywołana oddziaływaniem pola elektromagnetycznego promieniowania laserowego [1,2]. Wykazano istnienie szeregu mechanizmów przyczyniających się do zwiększenia energii kinetycznej naładowanych cząstek znajdujących się w zasięgu działania promieniowania laserowego, zwłaszcza w obecności dodatkowego pola magnetycznego. Mechanizmy te są podstawą badań, konstrukcji i wyjaśnienia zasad działania kilku typów akceleratorów, jak plazmowy akcelerator *wakefield* [3], laserowy akcelerator dudnieniowy [4], laserowy akcelerator *wakefield* [5, 6], rezonansowy plazmowy laserowy akcelerator [7] czy laserowy akcelerator z samomodulacją [8, 9].

Akceleracja swobodnych elektronów w polu elektromagnetycznym wytworzonym przez laser była wykazana w przeszłości w wielu publikacjach [10-12]. Zwłaszcza wiele uwagi poświęcono akceleracji elektronów do prędkości relatywistycznych, zarówno w badaniach o charakterze teoretycznym, jak i eksperymentalnym [13-19]. Analizowano wpływ na parametry ruchu akcelerowanej cząstki, oprócz oczywistego parametru, jakim jest natężenie promieniowania laserowego i długość jego fali, także stanu polaryzacji promieniowania. Rozważa się też ewentualne dodatkowe pola zewnętrzne w rodzaju pól magnetycznych i elektrycznych. Przyłożone pole magnetyczne, na przykład skierowane osiowo, powoduje kołowy ruch cząstki dzięki działaniu siły Lorentza o kierunku prostopadłym do osi. Elektrony wchodzi wówczas na orbitę kołową o promieniu  $R_c$  zwanym promieniem cyklotronowym. Oblicza się go z porównania siły dośrodkowej z siłą Lorentza, a zależy on od prędkości  $V$  elektronu oraz od lokalnej indukcji magnetycznej  $B$  i wyraża się zależnością

$$R_c = \frac{mV}{qB},$$

gdzie  $m$  i  $q$  to masa i ładunek elektronu lub ogólnie cząstki naładowanej.

W wielu pracach zwraca się uwagę na to, że zastosowanie zewnętrznego pola magnetycznego, w przypadku akceleratora laserowego, wywiera zdecydowany wpływ na proces akceleracji naładowanych cząstek [20, 21]. Cząstki mogą wtedy uzyskać znaczną energię oraz utrzymać ją w formie oscylacji cyklotronowych nawet po ustaniu akcji lasera lub po opuszczeniu obszaru wiązki laserowej [22-25]. Należy tu zwrócić uwagę na podobny wpływ na akcelerację cząstek, jaki jest wywierany przez pole magnetyczne wytwarzane w plazmie pod wpływem wiązki laserowej [26]. Zjawisko to jest wywołane faktem absorpcji przez elektron z kołowo (lub eliptycznie) spolaryzowanej wiązki laserowej, nie tylko energii, lecz także momentu pędu obrotowego, co jest równoznaczne prądom kołowym w plazmie wytwarzającym skierowane osiowo pole magnetyczne. W tym przypadku także istnieje możliwość osiągnięcia betatronowego rezonansu między elektronami i polem magnetycznym. Elektrony w tych warunkach osiągają znaczne energie relatywistyczne. Jest to niemożliwe w przypadku wiązki laserowej spolaryzowanej liniowo.

Do akceleracji naładowanych cząstek najczęściej stosowane są lasery impulsowe, głównie ze względu na możliwość osiągnięcia dużych mocy w pojedynczym impulsie. W wiązce takich laserów w obecności silnego pola magnetycznego elektron jest pułapkowany i przyspieszany do energii rzędu  $GeV$  [27]. Dostępne dziś praktycznie pola magnetyczne sięgają natężeń  $10^3 T$  w impulsach mikrosekundowych i mogą być generowane z okresem od 4 do 8 mikrosekund [28].

W tej pracy badamy akcelerację elektronu w próżni wywołaną kołowo spolaryzowaną wiązką laserową o stałym natężeniu w obecności osiowo skierowanego pola magnetycznego. Badania akceleracji cząstek w próżni przyciągają w ostatnich latach coraz większą uwagę [29], ponieważ akceleracja cząstek w próżni ma pewną przewagę nad akceleracją w plazmie. W próżni nie występują niestabilności plazmowe, łatwiej też nadać cząstce energię początkową, od której wartości zależy maksimum energii kinetycznej osiąganego przez cząstkę. W warunkach próżni ułatwione jest także wprowadzanie cząstek do obszaru oddziaływania z promieniowaniem laserowym. Dzięki temu w próżni cząstki mogą osiągać dużą energię kinetyczną.

W pracy zamieszczamy, oprócz wstępu, drugą część, gdzie formułujemy równania różniczkowe opisujące zjawisko w przestrzeni trójwymiarowej. Następnie rozwiązujemy te równania i uzyskujemy ściśle rozwiązania analityczne na współrzędne określające położenie elektronu w zależności od czasu (co umożliwia zdefiniowanie obrazu graficznego toru elektronu) oraz na składowe prędkości elektronu, tym samym — wyrażenia na jego energię kinetyczną, zarówno w przypadku nierelatywistycznym, jak i relatywistycznym. W trzeciej części pracy są przedstawione w postaci graficznej wyniki uzyskane na podstawie wyżej wymienionych wyrażeń analitycznych. Te wyniki zostały uwierzytelnione przez rozwiązanie wyjściowych równań różniczkowych numeryczną metodą Runge-Kutta. W części czwartej zamieszczamy podsumowanie i ocenę wyników pracy.

Dyskusję problemu zachowania się cząstki naładowanej w kołowo spolaryzowanej fali elektromagnetycznej, przykładowo o długości fali  $\lambda = 10 \mu m$ ,  $1 \mu m$  oraz  $1 mm$  z osiowym stałym polem magnetycznym, w tej pracy ograniczymy do pokazania kształtów torów, po jakich ta cząstka się porusza. Jednak zasadniczym celem tych badań jest pokazanie warunków, w jakich cząstki, także o większej masie, mogą uzyskiwać znaczne energie kinetyczne, w szczególności w promieniowaniu o częstotliwościach mniejszych [30] i przy znacznie zredukowanych wartościach indukcji stałego pola magnetycznego. Ten problem został przez nas w znacznym stopniu przebadany i będzie dyskutowany w naszej następnej publikacji.

Rozważane w pracy wartości natężenia pola elektrycznego otrzymuje się już dziś realnie w warunkach laboratoryjnych, w otoczeniach ognisk układów skupiających w wyniku ogniskowania impulsowego promieniowania laserowego. Rozmiary ognisk i parametry promieniowania laserowego można dobrać w taki sposób, w szczególności w przypadku ruchu cząstki w obecności osiowego pola magnetycznego, aby nie zachodziła obawa ucieczki cząstki z obszaru oddziaływania przed osiągnięciem

przez cząstkę oczekiwanych parametrów. Wiele wniosków wynikających z przedstawionej w pracy analizy jest słusznych dla dużo mniejszych, ale także dla dużo większych wartości natężenia pola magnetycznego i elektrycznego, na przykład takich, jakie występują w otoczeniach niektórych obiektów w kosmosie.

## 2. Równania ruchu cząstki naładowanej w kołowo spolaryzowanej monochromatycznej fali elektromagnetycznej w obecności stałego, osiowego pola magnetycznego

Podstawowym celem tej pracy jest przeprowadzenie możliwie precyzyjnej analizy zagadnień ruchu naładowanej cząstki w kołowo spolaryzowanej fali elektromagnetycznej wytwarzanej przez laser lub maser w obecności stałego, wzdłużnego (osiowego) pola magnetycznego w aspekcie znalezienia warunków umożliwiających akcelerację cząstki do zakresu relatywistycznego. Taką analizę można przeprowadzić metodami numerycznymi dostosowanymi do konkretnych uwarunkowań przyrządowych, a zatem niewykazujących ogólności. W tej pracy wyprowadzono odpowiednie równania analityczne, zakładając, że oddziaływanie na cząstkę jest wywierane przez laserową wiązkę w postaci jednorodnej monochromatycznej fali płaskiej, propagującą się w próżni w warunkach bezstratnych, a także przez stałe, skierowane osiowo pole magnetyczne. Wydaje się, że jest to w pewnym stopniu uogólnienie problemu akceleracji cząstki, ułatwiające przewidywanie jej zachowania się w warunkach zmienionych. Rzeczywista fala elektromagnetyczna laserów nie jest jednorodna, ponieważ w kierunku poprzecznym do wiązki, poczynając od jej osi, wykazuje stopniowy spadek natężenia promieniowania. Jednak w pewnym obszarze wokół osi można przyjąć jej jednorodność. Równanie relatywistyczne ruchu cząstki i równanie zachowania znormalizowanej energii  $\gamma$  w tym przypadku można zapisać następująco [31]:

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{p}}{dt} &= q\vec{E} + q\left[\vec{V} \times (\vec{B} + \vec{B}_z)\right], \\ \frac{d\gamma}{dt} &= \frac{q}{m_0 c^2} \vec{V} \cdot \vec{E}, \end{aligned} \tag{1}$$

gdzie:  $p$  — pęd cząstki;  
 $E$  — natężenie pola elektrycznego;  
 $B_z$  — stałe, jednorodne, wzdłużne pole magnetyczne oraz

$$\gamma = (1 - \beta^2)^{-\frac{1}{2}}, \quad \vec{\beta} = \frac{\vec{V}}{c}, \quad \vec{p} = \gamma \cdot m_0 c \vec{\beta},$$

$$\beta^2 = \beta_x^2 + \beta_y^2 + \beta_z^2, \quad \beta_{x,y,z} = \frac{V_{x,y,z}}{c},$$
(2)

gdzie:  $c$  — prędkość światła;  
 $\beta = V/c$ .

Pewnego komentarza wymaga postać równania zachowania znormalizowanej energii (drugi z wzorów (1)). Energię  $W$  cząstki znajdującej się w ruchu opisują wyrażenia:

$$W = \gamma m_0 c^2, \quad W^2 = p^2 c^2 + m_0^2 c^4.$$

Uwzględniając powyższe relacje, równanie pędu może być zapisane jako:

$$\vec{p} = W \frac{\vec{V}}{c^2}.$$

Mnożąc obustronnie równanie ruchu przez  $\vec{V}$ , oraz uwzględniając równanie:

$$\vec{V} \cdot (\vec{V} \times \vec{B}) \equiv 0$$

równanie ruchu cząstki sprowadzi się do postaci:

$$\vec{V} \cdot \frac{d\vec{p}}{dt} = q \vec{V} \cdot \vec{E}.$$

Różniczkując następnie równanie pędu, można zapisać, że:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{W}{c^2} \frac{d\vec{V}}{dt} + \frac{\vec{V}}{c^2} \frac{dW}{dt} = \gamma m_0 \frac{d\vec{V}}{dt} + m_0 \vec{V} \frac{d\gamma}{dt}.$$

Dwa ostatnie równania można sprowadzić do postaci:

$$\frac{W}{c^2} \vec{V} \cdot \frac{d\vec{V}}{dt} + \frac{V^2}{c^2} \frac{dW}{dt} = q \vec{V} \cdot \vec{E}.$$

Gdy wartość  $V$  niemal się ustali, osiągając prędkość bliską prędkości światła otrzymamy relację następującą:

$$\gamma \frac{d\vec{V}}{dt} \cong 0, \quad V \cong c$$

Równanie to uprości się przyjmując postać:

$$\frac{dW}{dt} = q\vec{V} \cdot \vec{E}$$

lub

$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{q}{m_0 c^2} \vec{V} \cdot \vec{E}$$

znaną jako równanie zachowania energii cząstki (równ. 1). Równanie to pokazuje, że w przypadku braku pola elektrycznego energia kinetyczna cząstki jest stała.

Dla

$$\gamma \frac{d\vec{V}}{dt} \neq 0, \quad V < c$$

równanie to przyjmie postać:

$$\frac{d\gamma}{dt} + \frac{\gamma}{V^2} \vec{V} \cdot \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{q}{m_0 V^2} \vec{V} \cdot \vec{E}.$$

Proste oszacowania wykazują, że drugi człon po lewej stronie tego równania jest do pominięcia, zwłaszcza przy większych prędkościach cząstki.

Przyjmując dalej, że fala elektromagnetyczna propaguje się w kierunku  $z$ , składowe wektorów natężenia pola elektrycznego i magnetycznego wzdłuż osi  $x$  i  $y$  dla fali spolaryzowanej kołowo lewoskrętnie, są równe odpowiednio:

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \vec{i}E_x + \vec{j}E_y = \vec{i}E_0 \sin \varphi + \vec{j}E_0 \cos \varphi, \\ \vec{B} &= \vec{j}B_y + \vec{i}B_x = \vec{j} \frac{E_0}{c} \sin \varphi - \vec{i} \frac{E_0}{c} \cos \varphi, \end{aligned} \quad (3)$$

gdzie

$$\varphi = \omega \left[ t - \frac{z(t)}{c} \right], \quad B_0 = \frac{E_0}{c}, \quad (4)$$

a  $\omega$  jest częstotliwością fali elektromagnetycznej. Wektory natężenia pola elektrycznego, indukcji magnetycznej i pędu wyrażają się następująco:

$$\vec{E} = [E_x, E_y, 0], \quad \vec{B} = [-B_x, B_y, B_z]$$

oraz

$$\begin{aligned} \vec{p} &= m_0 \gamma V_x \vec{i} + m_0 \gamma V_y \vec{j} + m_0 \gamma V_z \vec{k} \\ \frac{d\vec{p}}{dt} &= \vec{i} m_0 c \frac{d\gamma\beta_x}{dt} + \vec{j} m_0 c \frac{d\gamma\beta_y}{dt} + \vec{k} m_0 c \frac{d\gamma\beta_z}{dt} \end{aligned} \quad (5)$$

$$B_z = \pm a B_0$$

dla

$$\begin{aligned} E_x &= E_0 \sin \varphi, \quad E_y = E_0 \cos \varphi \\ B_x &= \frac{E_0}{c} \cos \varphi, \quad B_y = \frac{E_0}{c} \sin \varphi, \quad B_z = \pm a B_0, \end{aligned} \quad (6)$$

gdzie  $a$  jest parametrem, a pole  $B_z$  skierowane jest równoległe do współrzędnej  $z$ . Na tej podstawie sformułujemy równania opisujące dynamikę cząstki w przypadku relatywistycznym dla  $a > 0$ .

### a) Przypadek relatywistyczny

Równania (1) opisujące dynamikę cząstki dla  $B_z$  z parametrem  $a > 0$  można zapisać następująco:

$$\begin{aligned} \frac{d\gamma\beta_x}{dt} &= -\omega\alpha(1-\beta_z)\sin\varphi - \omega\alpha\beta_y, \\ \frac{d\gamma\beta_y}{dt} &= -\omega\alpha(1-\beta_z)\cos\varphi + \omega\alpha\beta_x, \\ \frac{d\gamma\beta_z}{dt} &= -\omega\alpha\beta_x\sin\varphi - \omega\alpha\beta_y\cos\varphi, \\ \frac{d\gamma}{dt} &= -\omega\alpha\beta_x\sin\varphi - \omega\alpha\beta_y\cos\varphi, \end{aligned} \quad (7)$$

gdzie:  $\alpha = -\frac{q\lambda B_0}{2\pi c m_0}$ .

Układ równań (7) można zapisać w postaci:

$$\begin{aligned}
\frac{d\gamma\beta_x}{dt} &= -\alpha \sin \varphi \frac{d\varphi}{dt} - \frac{\omega\alpha a}{c} V_y = -\alpha \sin \varphi \frac{d\varphi}{dt} - \frac{\omega\alpha}{c} a \frac{dy}{dt}, \\
\frac{d\gamma\beta_y}{dt} &= -\alpha \cos \varphi \frac{d\varphi}{dt} + \frac{\omega\alpha a}{c} V_x = -\alpha \cos \varphi \frac{d\varphi}{dt} + \frac{\omega\alpha}{c} a \frac{dx}{dt}, \\
\frac{d\gamma\beta_z}{dt} &= -\omega\alpha\beta_x \sin \varphi - \omega\alpha\beta_y \cos \varphi = -\frac{\alpha\omega}{c} \frac{dx}{dt} \sin \varphi - \frac{\alpha\omega}{c} \frac{dy}{dt} \cos \varphi, \\
\frac{d\gamma}{dt} &= -\omega\alpha\beta_x \sin \varphi - \omega\alpha\beta_y \cos \varphi.
\end{aligned} \tag{8}$$

Różniczkując równanie (4), otrzymujemy relację

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega(1 - \beta_z),$$

a po scałkowaniu (8) otrzymujemy

$$\begin{aligned}
\gamma\beta_x &= \alpha(\cos \varphi - 1) - \frac{\omega\alpha}{c} ay, \\
\gamma\beta_y &= -\alpha \sin \varphi + \frac{\omega\alpha}{c} ax, \\
\gamma\beta_z &= -\frac{\alpha\omega}{c} x \sin \varphi - \frac{\alpha\omega}{c} y \cos \varphi.
\end{aligned} \tag{9}$$

Odejmując dwa ostatnie równania różniczkowe od siebie, można pokazać, że

$$\frac{d}{dt} \gamma(1 - \beta_z) = 0.$$

Oznacza to, że

$$\gamma(1 - \beta_z) = \text{const} = \gamma_0(1 - \beta_{0z}),$$

gdzie  $\gamma_0$  i  $\beta_{0z}$  są znormalizowanymi energią i składową prędkości początkowej cząstki w kierunku z. Korzystając z równań:

$$\begin{aligned}
\frac{dx}{d\varphi} &= \frac{dx}{dt} \frac{dt}{d\varphi} = \frac{c\beta_x}{\omega(1 - \beta_z)} = \frac{c\gamma\beta_x}{\omega\gamma_0(1 - \beta_{0z})}, \\
\frac{dy}{d\varphi} &= \frac{dy}{dt} \frac{dt}{d\varphi} = \frac{c\beta_y}{\omega(1 - \beta_z)} = \frac{c\gamma\beta_y}{\omega\gamma_0(1 - \beta_{0z})}, \\
\frac{dz}{d\varphi} &= \frac{dz}{dt} \frac{dt}{d\varphi} = \frac{c\beta_z}{\omega(1 - \beta_z)} = \frac{c\gamma\beta_z}{\omega\gamma_0(1 - \beta_{0z})},
\end{aligned}$$



dwa pierwsze równania zapisujemy w postaci:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{d\varphi} &= \frac{c\gamma\beta_x}{\omega\gamma_0(1-\beta_{0z})} = A(\cos\varphi - 1 - By) = A\cos\varphi - A - AB_y, \\ \frac{dy}{d\varphi} &= \frac{c\gamma\beta_y}{\omega\gamma_0(1-\beta_{0z})} = A(-\sin\varphi + Bx) = -A\sin\varphi + AB_x,\end{aligned}\tag{10}$$

gdzie

$$A = \frac{c\alpha}{\omega\gamma_0(1-\beta_{0z})}, \quad B = \frac{\omega}{c}a.$$

W celu znalezienia wyrażeń na współrzędne  $x$ ,  $y$  oraz  $z$ , stosujemy znaną metodę, wprowadzając zmienną zespoloną taką, że

$$w = x + iy.$$

Wtedy mnożąc drugie równanie różniczkowe (10) przez  $i$  oraz dodając obustronnie do siebie oba równania (10), otrzymamy

$$\frac{dw}{d\varphi} = A(\cos\varphi - i\sin\varphi) - A + ABiw \quad \text{lub} \quad \frac{dw}{d\varphi} - ABiw = Ae^{-i\varphi} - A.$$

Mnożąc obustronnie ostatnie równanie przez  $e^{-iAB\varphi}$  oraz stosując proste przekształcenia, otrzymujemy

$$d\left(we^{-iAB\varphi}\right) = A\left[e^{-i(1+AB)\varphi} - e^{-iAB\varphi}\right]d\varphi.$$

Całkując obustronnie powyższe wyrażenie w granicach  $0-\varphi$  i stosując nieskomplikowane przekształcenia, otrzymamy

$$w = A\left[\frac{i}{1+AB}\left(e^{-i\varphi} - e^{iAB\varphi}\right) + \frac{i}{AB}\left(-1 + e^{iAB\varphi}\right)\right].$$

Wyrażenie to można zapisać w postaci

$$\begin{aligned}w &= \frac{iA}{1+AB}\left[(\cos\varphi - \cos AB\varphi) - i(\sin\varphi + \sin AB\varphi)\right] + \\ &+ \frac{iA}{AB}\left[(-1 + \cos AB\varphi) + i\sin AB\varphi\right],\end{aligned}$$

a stąd z definicji w otrzymujemy

$$\begin{aligned}x &= \frac{A}{1+AB}(\sin \varphi + \sin AB\varphi) - \frac{1}{B} \sin AB\varphi, \\y &= \frac{A}{1+AB}(\cos \varphi - \cos AB\varphi) + \frac{1}{B}(\cos AB\varphi - 1),\end{aligned}$$

gdzie

$$\frac{A}{1+AB} = \eta = \frac{\chi\xi}{1+\chi}, \quad AB = \chi = \frac{a\alpha}{\gamma_0(1-\beta_{0z})}, \quad \frac{1}{B} = \xi = \frac{c}{a\omega}, \quad \vartheta = \frac{\alpha}{1+\chi}. \quad (11)$$

Uwzględniając powyższe, rozwiązanie układu dwóch pierwszych równań różniczkowych (8) można zapisać w postaci

$$\begin{aligned}x &= \eta \sin \varphi + (\eta - \xi) \sin \chi\varphi, \\y &= \eta \cos \varphi - (\eta - \xi) \cos \chi\varphi - \xi,\end{aligned} \quad (12)$$

gdzie  $\eta, \chi, \xi, \vartheta$  są stałymi parametrami zdefiniowanymi przez (11). Określimy teraz składową  $z$  w oparciu o relacje

$$\begin{aligned}\frac{dz}{d\varphi} &= \frac{dz}{dt} \frac{dt}{d\varphi} = \frac{c\beta_z}{\omega(1-\beta_z)} = \frac{c\gamma\beta_z}{\omega\gamma_0(1-\beta_{0z})}, \\ \gamma\beta_z &= \gamma - \gamma_0(1-\beta_{0z}),\end{aligned} \quad (13)$$

zatem

$$\gamma = \frac{1 + (\gamma \cdot \beta_x)^2 + (\gamma \cdot \beta_y)^2}{2\gamma_0(1-\beta_{0z})} + \frac{1}{2}\gamma_0(1-\beta_{0z}).$$

Podstawiając do powyższego wyrażenia otrzymane wcześniej równania (9), w miejsce  $x, y$  wyrażenia (12), otrzymujemy

$$\gamma\beta_z = \frac{1 + 4\vartheta^2 \sin^2 \frac{1}{2}(1+\chi)\varphi - \gamma_0^2(1-\beta_{0z})^2}{2\gamma_0(1-\beta_{0z})}.$$

Podstawienie powyższego wyrażenia do równania (13), daje końcowe wyrażenie na składową  $z$

$$z = \frac{c}{2\omega\gamma_0^2(1-\beta_{0z})^2} \left\{ \left[ 1 + 2\vartheta^2 - \gamma_0^2(1-\beta_{0z})^2 \right] \varphi - \frac{2\vartheta^2}{1+\chi} \sin(1+\chi)\varphi \right\}. \quad (14)$$

Jest to równanie uwikłane, gdyż współrzędna  $z$  występuje także w dwóch miejscach po stronie prawej równania (14) w fazie  $\varphi$  (równ. 4). Wartości  $z$  nie da się analitycznie z tego równania wyselekcjonować, autorzy niniejszej pracy tę wartość jako funkcję czasu uzyskali metodą numeryczną. Rozwiązanie w przestrzeni współrzędnych należy rozpoczynać od wzoru (14), faza  $\varphi$  zawierająca współrzędną  $z$  występuje bowiem także w równaniach (12).

Natomiast równania składowych prędkości cząstki otrzymujemy z wyrażen (9) i (12). Mają one postać:

$$\begin{aligned} V_x &= \frac{c\vartheta}{\gamma} (\cos \varphi - \cos \chi\varphi), \\ V_y &= -\frac{c\vartheta}{\gamma} (\sin \varphi + \sin \chi\varphi), \\ V_z &= c \frac{1 + 2\vartheta^2 [1 - \cos(1 + \chi)\varphi]}{2\gamma_0\gamma(1 - \beta_{0z})} - \frac{1}{2\gamma} c\gamma_0(1 - \beta_{0z}). \end{aligned} \quad (15)$$

### b) Przypadek nierelatywistyczny

Składowe prędkości wynikają z (15)

$$\begin{aligned} V_x &= c\vartheta (\cos \varphi - \cos \chi\varphi), \\ V_y &= -c\vartheta (\sin \varphi + \sin \chi\varphi), \\ V_z &= c[1 - \gamma_0(1 - \beta_{0z})]. \end{aligned} \quad (16)$$

Składowe współrzędnych wynikają z (12) i (14)

$$\begin{aligned} x &= \eta \sin \varphi + (\eta - \xi) \sin \chi\varphi, \\ y &= \eta \cos \varphi - (\eta - \xi) \cos \chi\varphi - \xi, \\ z &= \frac{c[1 - \gamma_0(1 - \beta_{0z})]}{\omega\gamma_0(1 - \beta_{0z})} \varphi, \\ \varphi &= \omega \cdot \gamma_0(1 - \beta_{0z}) \cdot t. \end{aligned} \quad (17)$$

Te rozwiązania w przypadku wektora  $\vec{B}_z$  skierowanego przeciwnie otrzymuje się zamieniając  $+a$  na  $-a$ .

Gdy całkowita prędkość początkowa cząstki  $V_0$  jest równa zero, parametry  $\beta_{0z} = 0$ ,  $\gamma_0 = 1$ . Odpowiednie równania trajektorii mogą być wówczas zapisane w postaci:

$$\begin{aligned} x &= \eta_0 \sin \varphi + (\eta_0 - \xi_0) \sin \chi_0 \varphi, \\ y &= \eta_0 \cos \varphi - (\eta_0 - \xi_0) \cos \chi_0 \varphi - \xi_0, \\ z &= \eta_0 \alpha \left[ \varphi - \frac{1}{1 + \chi_0} \sin(1 + \chi_0) \varphi \right], \end{aligned} \quad (17')$$

gdzie zgodnie z (11):

$$\eta_0 = \frac{\chi_0 \xi_0}{1 + \chi_0}, \quad \chi_0 = a\alpha, \quad \xi_0 = \frac{c}{a\omega}, \quad \vartheta_0 = \frac{\alpha}{1 + \chi_0} \quad (18)$$

oraz

$$\gamma = 1 + 2\vartheta_0^2 \sin^2 \frac{1}{2}(1 + \chi_0) \varphi.$$

Równania składowych prędkości cząstki w tym przypadku będą miały postać:

$$\begin{aligned} V_x &= \frac{\omega \eta_0 [\cos \varphi - \cos \chi_0 \varphi]}{1 + 2\vartheta_0^2 \sin^2 \frac{1}{2}(1 + \chi_0) \varphi}, \\ V_y &= \frac{-\omega \eta_0 [\sin \varphi + \sin \chi_0 \varphi]}{1 + 2\vartheta_0^2 \sin^2 \frac{1}{2}(1 + \chi_0) \varphi}, \\ V_z &= \frac{a\omega \vartheta_0^2 \xi_0 [1 - \cos(1 + \chi_0) \varphi]}{1 + 2\vartheta_0^2 \sin^2 \frac{1}{2}(1 + \chi_0) \varphi}. \end{aligned} \quad (19)$$

### 3. Trajektorie cząstki naładowanej w kołowo spolaryzowanej fali elektromagnetycznej z osiowym stałym polem magnetycznym

Równania (12, 14) można przekształcić do formy dającej lepsze zobrazowanie kształtu trajektorii poruszającej się cząstki. Ta forma ma postać:

$$\begin{aligned} x &= (R - r) \sin \varphi - r \sin(m - 1) \varphi, \\ y &= (R - r) \cos \varphi + r \cos(m - 1) \varphi - \xi, \\ z &= \frac{\xi \chi^2}{a\alpha^2} \left[ \left( \frac{1}{2} - \frac{a^2 \alpha^2}{2\chi^2} + \vartheta^2 \right) \varphi - \frac{\vartheta^2}{m} \sin m\varphi \right]. \end{aligned} \quad (20)$$

Jak łatwo wykazać, parametry  $R$  oraz  $r$  definiujące rozmiary trajektorii, są zdefiniowane następująco:

$$R = \left(1 + \frac{1}{\chi}\right) \eta = \xi, \quad r = \frac{\eta}{\chi} = \frac{1}{1 + \chi} \xi, \quad (21)$$

oraz

$$m = \frac{R}{r} = 1 + \chi. \quad (22)$$

Rozważymy teraz wpływ wielkości natężenia pola elektrycznego fali elektromagnetycznej na parametry ruchu cząstki w fali o polaryzacji kołowej w obecności niezerowego wzdłużnego stałego pola magnetycznego,  $B_z$ .

Z (11) wynika następująca relacja:

$$\xi = \frac{c}{a\omega} = \frac{cB_0}{B_z\omega} = \frac{E_0}{\omega B_z},$$

a więc

$$\begin{aligned} R &= \xi = \frac{E_0}{\omega B_z}, \\ r &= \frac{1}{1 + \chi} \xi = \frac{1}{(1 + \chi) \omega B_z} \frac{E_0}{\omega B_z} = \frac{1}{(1 + \alpha\chi) \omega B_z} \frac{E_0}{\omega B_z} = \frac{E_0}{\omega B_z (1 - qB_z / m_e \omega)}, \\ m &= \frac{R}{r} = 1 - qB_z / m_e \omega. \end{aligned} \quad (23)$$

Jak wynika z powyższych równań, przy stałych wartościach innych parametrów zmiana wartości natężenia pola elektrycznego fali elektromagnetycznej  $E_0$ , może prowadzić do samopodobnej zmiany wielkości parametrów  $R$  i  $r$  przy zachowaniu stałości wielkości parametru  $m$ , a więc do przeskalowania rozmiarów trajektorii ruchu cząstki. Przez zmianę wartości  $E_0$  można więc zwiększać lub zmniejszać rozmiary tej samej trajektorii.

Jeśli zdefiniujemy dodatkowy parametr  $m_1$  w postaci:

$$m_1 = \frac{R}{R - r},$$

to okazuje się, że ten parametr określa liczbę boków trajektorii typu hipocykloidy (rzut trajektorii na płaszczyznę  $(x, y)$ ), lub inaczej: liczba ostrzy lub łuków  $m_1$  zależy od  $m > 1$  w sposób określony następująco:

$$m_1 = \frac{R}{R-r} = \frac{m}{m-1} = \frac{1}{1-1/m},$$

przy czym  $B_z$  należy określać na podstawie (23) jako

$$B_z = \frac{m_e \omega}{q} (1-m). \quad (24)$$

W przypadku hipocykloidy z powyższego wyrażenia wynika, że dla elektronów  $B_z > 0$ . Wtedy otrzymujemy relację:

$$m = \frac{R}{r} = \frac{m_1}{m_1 - 1},$$

a w przypadku epicykloidy, kiedy  $0 < m < 1$  z (24) wynika, że dla elektronów  $B_z < 0$ . Wtedy otrzymuje się relację nieco zmienioną w postaci:

$$m = \frac{R}{r} = \frac{m_1}{m_1 + 1}.$$

Tak więc +1 w ostatniej zależności odnosi się do przypadku epicykloidy, kiedy mamy do czynienia z polem  $B_z < 0$ , natomiast -1 w poprzedniej zależności — do przypadku hipocykloidy, kiedy mamy do czynienia z polem  $B_z > 0$ .

Z wzorów, które zostały zaprezentowane wyżej wynika, że kiedy zwiększana jest wartość  $B_z$ , liczba boków trajektorii maleje (zależność (24)). Ale istnieje przypadek, kiedy po zwiększeniu wartości  $B_z$  liczba łuków trajektorii pozostaje taka sama, natomiast rozmiary trajektorii zmniejszają się, prowadząc do przeskalowania trajektorii. Przypadek ten został przedstawiony niżej. Aby zwiększając wartość  $\pm B_z$  zachować taką samą liczbę łuków w trajektoriach, trzeba spełnić warunek

$$m = 1 - \frac{qB_z}{m_e \omega} = \text{const},$$

tj. zachować stały stosunek

$$\frac{B_z}{\omega} = \text{const}.$$

Jak wynika z relacji (23) określających wielkości  $R$  i  $r$ , wzrost wartości  $B_z$  przy jednoczesnym zachowaniu stałości powyższego stosunku może prowadzić do zmniejszenia rozmiarów trajektorii, czyli do jej przeskalowania przy zachowaniu tego samego kształtu, niezależnie od wartości indukcji stałego, wzdłużnego pola magnetycznego  $\pm B_z$ .

Równania ruchu cząstki w kołowo spolaryzowanej, monochromatycznej fali elektromagnetycznej dla przypadku, kiedy  $B_z = 0$  znacznie się upraszczają.

W przypadku  $B_z = 0$ , tj. dla  $a = 0$  i przy założeniu, że  $\gamma_0 = 1$ ,  $\beta_{0z} = 0$  parametry (18) można uprościć i równania (17') zapisać jako

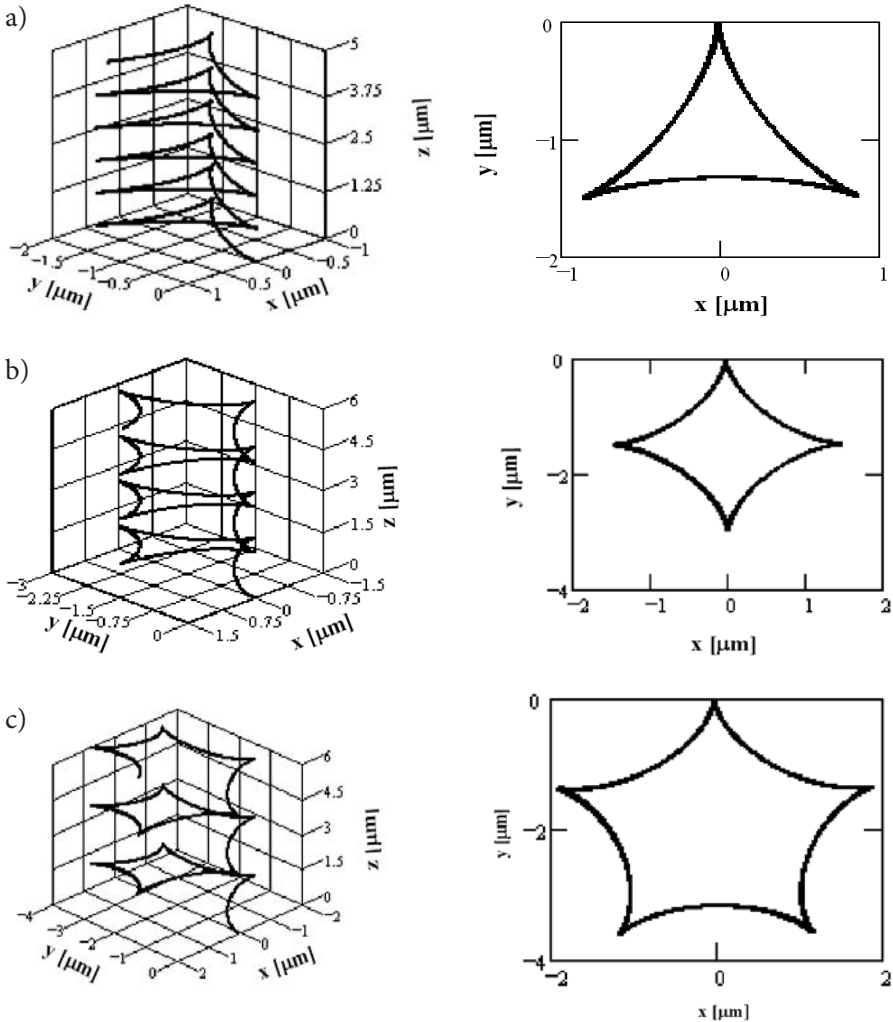
$$\begin{aligned}x &= \frac{\alpha c}{\omega} (\sin \varphi - \varphi), \\y &= \frac{\alpha c}{\omega} (\cos \varphi - 1), \\z &= 0.\end{aligned}\tag{25}$$

#### 4. Rezultaty wyliczeń

Wyniki w postaci graficznej uzyskano za pomocą wyżej wyprowadzonych oryginalnych analitycznych wyrażeń. Ponieważ autorom niniejszej pracy nie udało się znaleźć w publikacjach innych autorów tego lub podobnego typu wyrażeń analitycznych, co mogłoby bezpośrednio potwierdzić prawidłowość prezentowanych wyżej rozwiązań, z wyjątkiem niezweryfikowanych numerycznie prac [22] o różniących się od wyprowadzonych przez nas wyrażeniach analitycznych, postanowiono wyżej wyprowadzone równania zweryfikować na drodze numerycznego całkowania wyjściowych równań różniczkowych (1). W tym celu zastosowano dobrze znaną metodę Runge-Kutta [32]. Należy tu podkreślić, że zdecydowana większość, zwłaszcza ostatnich teoretycznych publikacji, wobec braku odpowiednich wyrażeń analitycznych, jest oparta na tej metodzie. W naszych badaniach tu opisywanych zjawisk oddziaływania elektronu czy protonu z polem elektromagnetycznym zastosowaliśmy metodę numeryczną jedynie do wszechstronnego sprawdzenia poprawności wyników obliczanych na podstawie wyżej wyprowadzonych wzorów analitycznych. Wyniki uzyskane za pomocą obu metod okazały się identyczne. W rezultacie można było uznać, że stosując wzory analityczne, uzyskuje się wiarygodne wyniki. Podstawową przyczyną wyboru wzorów analitycznych do przeprowadzenia analizy występujących w tym problemie zjawisk, jest możliwość bardziej czytelnego śledzenia wpływu różnych parametrów na przebieg tych zjawisk. Poza tym czas trwania zjawiska, w ciągu którego można śledzić jego przebieg, w metodzie numerycznej jest ograniczony, gdyż nie można w niej stosować zbyt dużych kroków czasowych wobec ograniczonej ilości ogólnej liczby kroków. Takie ograniczenia w metodzie analizy równań analitycznych praktycznie nie występują.

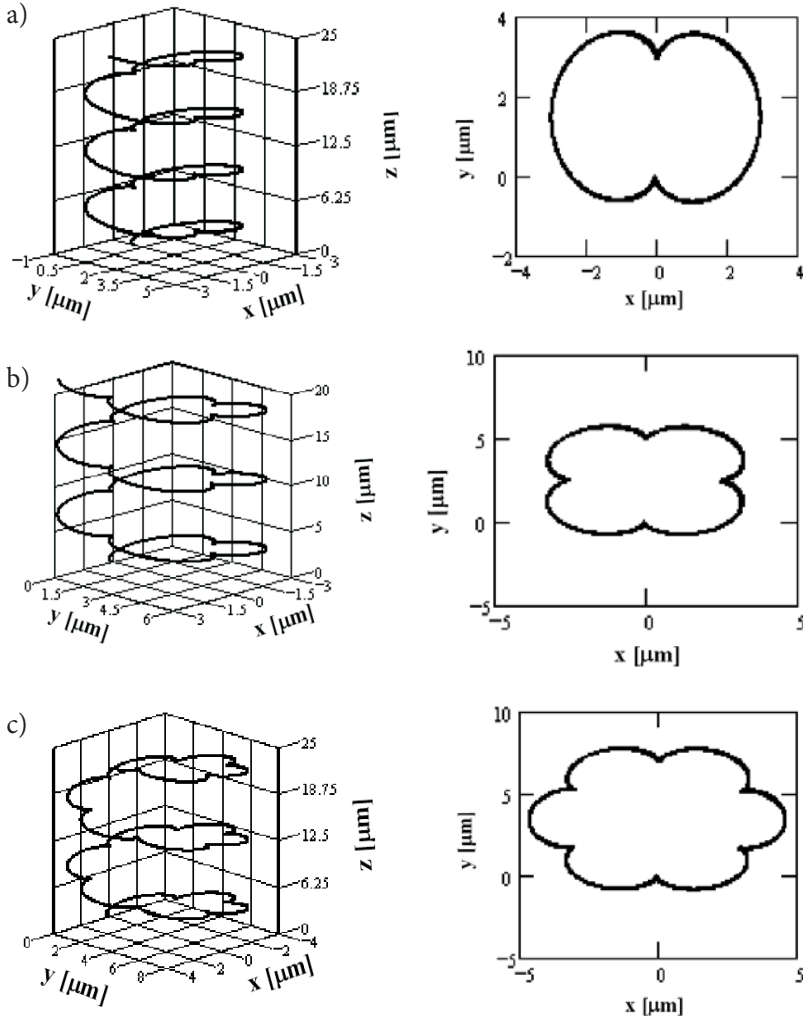
Wykresy przedstawione na rysunkach 1 i 2 ilustrują wyliczone na podstawie relacji (12) i (14) trajektorie elektronu w trójwymiarowej przestrzeni  $(x, y, z)$  oraz obraz rzutu trajektorii na płaszczyznę  $(x, y)$  w przypadku  $\lambda = 10 \mu\text{m}$  oraz  $E_0 = 10^{11} \text{ V/m}$ . Z wykresów wynika, że zmieniając wartość natężenia pola magne-

tycznego  $B_z$ , lub wielkość częstotliwości promieniowania elektromagnetycznego  $\omega$ , od których to wielkości zależy wartość parametru  $m_1$ , można w długim czasie realizować stan stacjonarny. Gdy parametr  $m_1$  jest liczbą całkowitą i  $m > 1$ , hipocykloida, jaką opisują przedstawione w pracy równania jest stacjonarną w czasie i przestrzeni krzywą zamkniętą składającą się ze skończonej ilości ostrzy o ilości  $m_1$  (rys. 1). Gdy  $m_1$  jest liczbą całkowitą i  $0 < m < 1$ , krzywą opisywaną przez te równania jest stacjonarna w czasie i przestrzeni epicykloida składająca się ze skończonej liczby



Rys. 1. Ilustracja trzech stanów ruchu elektronu wzdłuż trajektorii typu hipocykloidy, zarówno w przestrzeni  $(x, y, z)$ , jak i w rzucie trajektorii na płaszczyznę  $(x, y)$ , przy  $E_0 = 10^{11}$  V/m,  $\lambda = 10$   $\mu\text{m}$ : a)  $m_1 = 3$ ,  $m = 3/2$ ,  $B_z = 536$  T; b)  $m_1 = 4$ ,  $m = 4/3$ ,  $B_z = 357$  T; c)  $m_1 = 5$ ,  $m = 5/4$ ,  $B_z = 268$  T



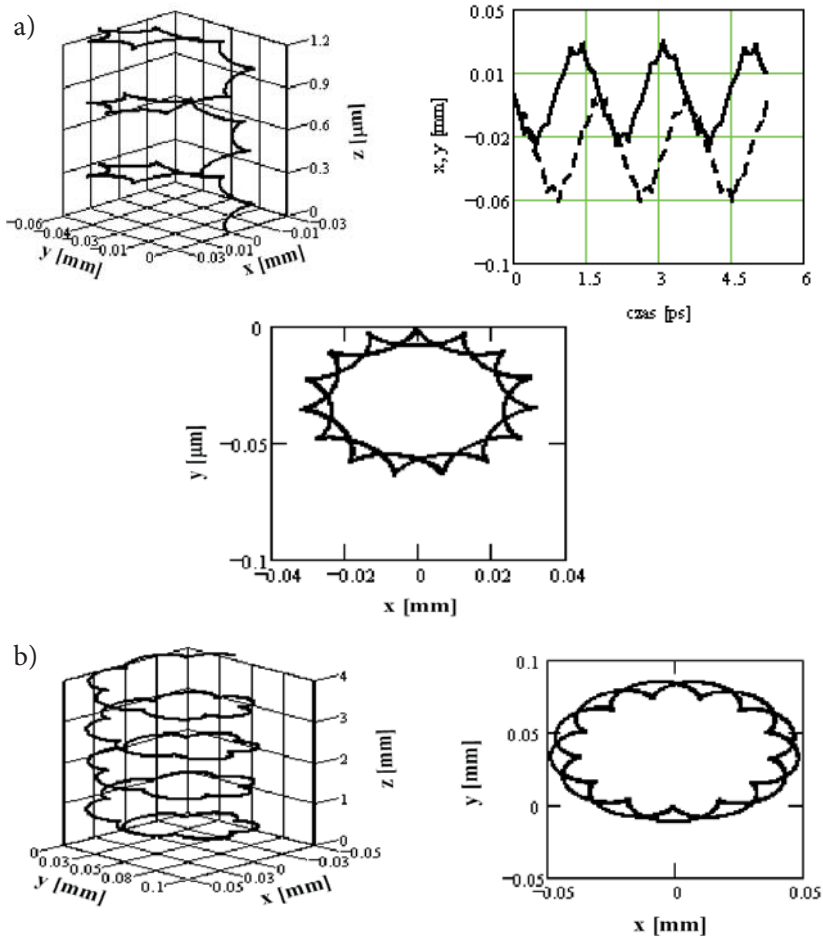


Rys. 2. Ilustracja trzech stanów ruchu elektronu wzdłuż trajektorii typu epicykloidy, zarówno w przestrzeni  $(x, y, z)$ , jak i w rzucie trajektorii na płaszczyznę  $(x, y)$ , przy  $E_0 = 10^{11}$  V/m,  $\lambda = 10$  μm:

a)  $m_1 = 2$ ,  $m = 2/3$ ,  $B_z = -357$  T; b)  $m_1 = 4$ ,  $m = 4/5$ ,  $B_z = -214$  T; c)  $m_1 = 6$ ,  $m = 6/7$ ,  $B_z = -153$  T

łuków równej  $m_1$  (rys. 2). W ogólności (co nie jest pokazane na rysunkach) można realizować trzy stany ruchu cząstki naładowanej tj. stan stacjonarny, niestacjonarny i mieszany. Kiedy  $m_1$  jest ułamkiem, hipocykloida i epicykloida mogą składać się ze skończonej liczby krzyżujących się odpowiednio łuków wklęsłych i wypukłych o punkcie bieżącym wracającym do punktu wyjściowego lub stają się trajektoriami niestacjonarnymi w czasie i przestrzeni o liczbie ostrzy lub łuków rosnącej w miarę wzrostu czasu oddziaływania pól na cząstkę.

Z powyższego widać, że w zależności od wartości natężenia pola magnetycznego  $B_z$  lub w zależności od wielkości częstotliwości promieniowania elektromagnetycznego  $\omega$ , od których to wielkości zależy wartość  $m_1$ , można w długim czasie realizować różne stany ruchu cząstki naładowanej. Przejście oscylacyjne cząstki z jednego obszaru do innego może być dokonane w szczególności poprzez wprowadzenie okresowej i skokowej zmiany kierunku wektora pola  $B_z$  na przeciwny lub zmianę wartości częstotliwości fali elektromagnetycznej  $\omega$  przy zachowaniu stałości natężenia pola magnetycznego  $B_z$ .

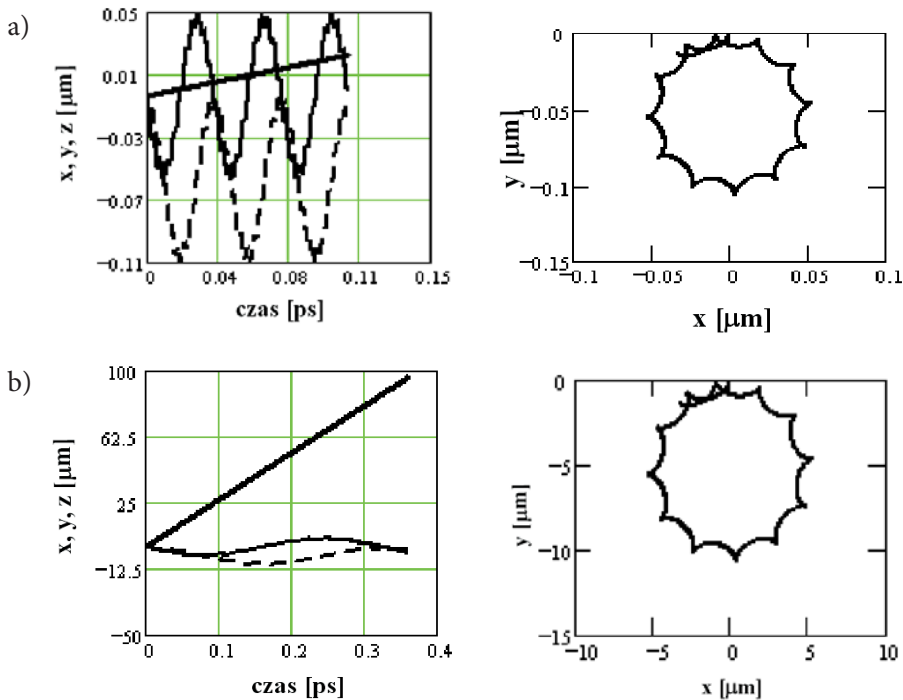


Rys. 3. Ilustracja trajektorii elektronu dla wartości parametrów promieniowania równych  $E_0 = 10^{12}$  V/m,  $\lambda = 10 \mu\text{m}$ : a) typu hipocykloidy, dla  $m = 15/13$ ,  $m_1 = 7,5$ ,  $B_z = 165$  T oraz b) typu epicykloidy, dla  $m = 13/15$ ,  $m_1 = 6,5$ ,  $B_z = -143$  T

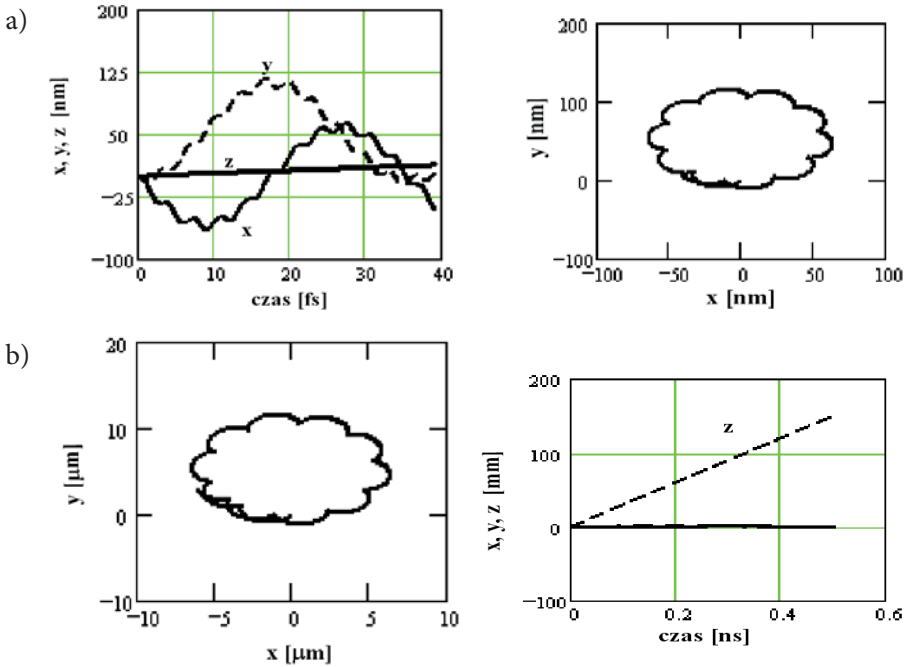
W przypadku kiedy  $m_1$  jest ułamkiem hipocykloida i epicykloida, mogą składać się ze skończonej liczby krzyżujących się odpowiednio łuków wklęsłych i wypukłych o punkcie bieżącym wracającym do punktu wyjściowego (w rzucie na płaszczyznę  $(x, y)$  co zilustrowano na rysunku 3, a co zostało wyliczone na podstawie relacji (12) i (14).

Oprócz tego zilustrowano wpływ amplitudy natężenia pola elektrycznego  $E_0$  w promieniowaniu lasera o długości fali  $\lambda = 1 \mu\text{m}$  na wykresach przedstawiających zależności kształtu i rozmiarów trajektorii elektronu z dodatkowym osiowo skierowanym polem magnetycznym o indukcji  $B_z = 1000 \text{ T}$  dla hipocykloidy (rys. 4) oraz  $B_z = -1000 \text{ T}$  dla epicykloidy (rys. 5). Podane są wartości omówionych wyżej parametrów  $r$  oraz  $R$ .

Z powyższych wykresów wynika, że zmiana wartości  $E_0$  prowadzi tylko do zmiany skali trajektorii zarówno w przypadku hipocykloidy, jak i w przypadku epicykloidy, przy czym kształt krzywych pozostaje niezmienny. W tym samym czasie wartości współrzędnych  $x$  i  $y$  wraz ze wzrostem wartości  $E_0$  ulegają pro-



Rys. 4. Wpływ wielkości amplitudy natężenia pola elektrycznego  $E_0$  kołowo spolaryzowanej monochromatycznej fali elektromagnetycznej na parametry hipocykloidy przy osiowo skierowanej indukcji magnetycznej  $B_z = 1000 \text{ T}$ , dla  $\lambda = 1 \mu\text{m}$ , parametru  $m = 1,093$ : a) dla  $E_0 = 10^{11} \text{ V/m}$ , otrzymano  $R = 0,053 \mu\text{m}$ ,  $r = 0,049 \mu\text{m}$ ; b) dla  $E_0 = 10^{13} \text{ V/m}$ , otrzymano  $R = 5,3 \mu\text{m}$ ,  $r = 4,9 \mu\text{m}$



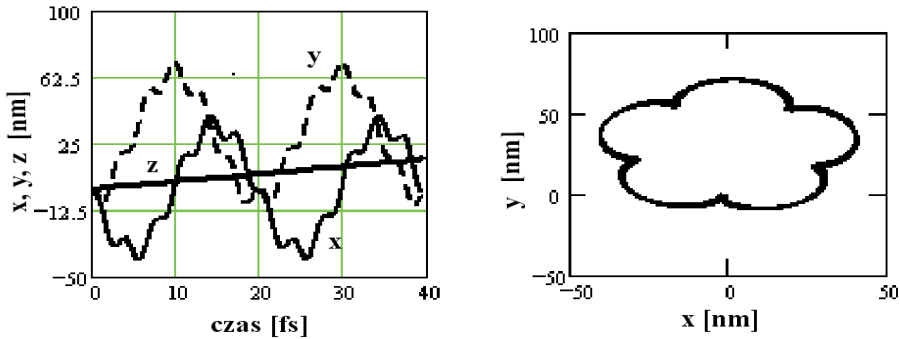
Rys. 5. Wpływ wielkości amplitudy natężenia pola elektrycznego  $E_0$  kołowo spolaryzowanej monochromatycznej fali elektromagnetycznej na parametry epicykloidy otrzymanej przy osiowo skierowanym wektorze indukcji magnetycznej  $B_z = -1000$  T, dla  $\lambda = 1$   $\mu\text{m}$ , parametru  $m = 0,907$ : a) dla  $E_0 = 10^{11}$  V/m, otrzymano  $R = -0,053$   $\mu\text{m}$ ,  $r = -0,059$   $\mu\text{m}$  oraz b) dla  $E_0 = 10^{13}$  V/m, otrzymano  $R = -5,3$   $\mu\text{m}$ ,  $r = -5,9$   $\mu\text{m}$

porcjonalnemu wzrostowi. Cechą charakterystyczną obu ruchów, tj. w przypadku ruchów wzdłuż hipocykloidy i epicykloidy jest to, że odbywają się one w przeciwnych kierunkach wzdłuż tych trajektorii, lecz w każdym przypadku jedno okrążenie trajektorii zawsze zajmuje tyle samo czasu.

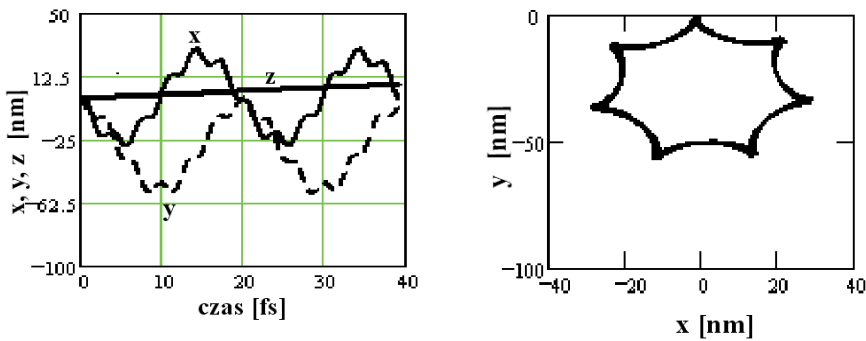
Następnie prezentowane są wykresy ilustrujące wpływ wartości stałego, wzdłużnego pola magnetycznego  $B_z$  na kształty i rozmiary trajektorii przy zachowaniu stałości natężenia pola elektrycznego fali elektromagnetycznej  $E_0$ .

Niżej przedstawiamy wykresy ilustrujące wpływ wielkości natężenia pola magnetycznego  $B_z$ , kołowo spolaryzowanej monochromatycznej fali elektromagnetycznej na parametry epicykloidy.

Z wykresów na rysunkach 6 i 7 wynika, że poprzez zmianę wielkości indukcji pola magnetycznego  $\pm B_z$ , przy zachowaniu stałości natężenia pola elektrycznego  $E_0$ , możliwa jest nie tylko zmiana skali trajektorii, jak w przypadku zmiany amplitudy  $E_0$ , lecz także zmiana jej kształtu. Ogólnie, zwiększanie indukcji magnetycznej  $B_z$  powoduje kurczenie się toru naładowanej cząstki.



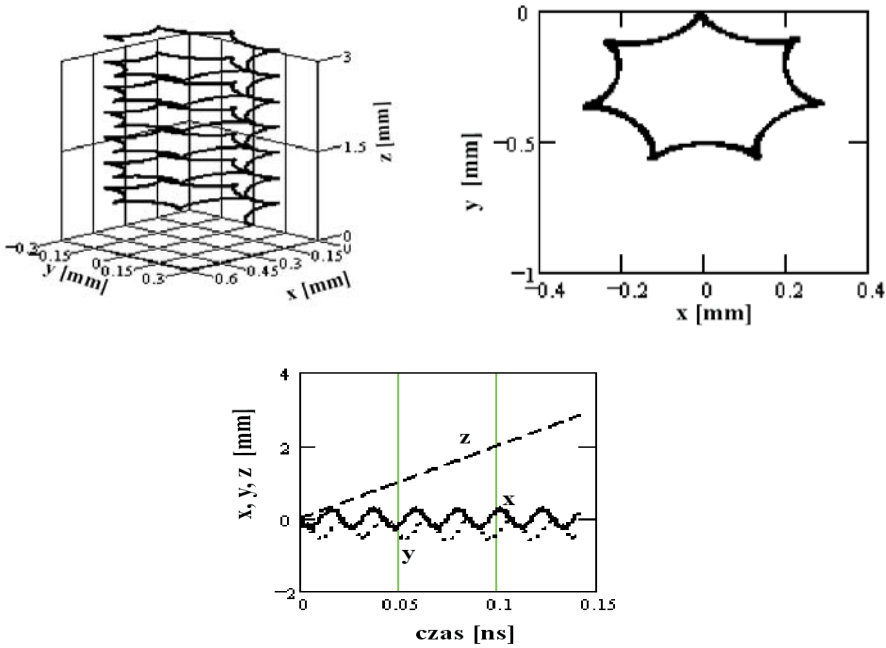
Rys. 6. Wpływ osiowo skierowanego wektora indukcji magnetycznej zwiększonej do  $B_z = -1800$  T (patrz rys. 5a, gdzie  $B_z = -1000$  T) w kołowo spolaryzowanej monochromatycznej fali elektromagnetycznej na parametry epicykloidy przy  $E_0 = 10^{11}$  V/m, dla  $\lambda = 1$   $\mu\text{m}$ , otrzymano  $R = 0,053$   $\mu\text{m}$ ,  $r = 0,049$   $\mu\text{m}$



Rys. 7. Wpływ osiowo skierowanego wektora zwiększonej indukcji magnetycznej  $B_z = -1800$  T (patrz rys. 4a, gdzie  $B_z = -1000$  T) w kołowo spolaryzowanej monochromatycznej fali elektromagnetycznej na parametry epicykloidy otrzymanej przy  $E_0 = 10^{11}$  V/m, dla  $\lambda = 1$   $\mu\text{m}$ .

Dodatkowo na rysunku 8 przedstawiamy przykładowy zestaw wykresów ilustrujących zachowanie się elektronu w mikrofalowej, płaskiej, kołowo spolaryzowanej i monochromatycznej fali elektromagnetycznej w przestrzeni współrzędnych w obecności osiowego pola magnetycznego.

Rysunek 8 pokazuje, że wiązka promieniowania maserowego oddziałuje na elektron w sposób podobny do wiązki lasera optycznego. Należy jednak zwrócić uwagę na jednostki wielkości obrazujących tor elektronu. Przedstawiony przykład dotyczy promieniowania o długości fali 1 mm, zmniejszonej w porównaniu z laserem optycznym amplitudzie natężenia pola elektrycznego oraz znacznie zredukowanej indukcji magnetycznej. W tym przypadku zakreślone przez elektron trajektorie mają większe rozmiary, lecz ich kształt jest podobny do poprzednio rozważanych.



Rys. 8. Trajektoria elektronu w wiązce promieniowania masera o długości fali  $\lambda = 1$  mm, przy  $E_0 = 10^9$  V/m,  $B_z = 1,8$  T,  $m = 7/6$ , otrzymano  $R = 0,3$  mm,  $r = 0,25$  mm

## 5. Podsumowanie

Przedstawiono wyniki analizy teoretycznej zachowania się naładowanej cząstki w polu elektromagnetycznym wytworzonym przez laser lub maser w obecności stałego pola magnetycznego skierowanego osiowo względem wiązki promieniowania. Wyniki w postaci graficznej uzyskano za pomocą wyprowadzonych oryginalnych analitycznych wyrażeń. Weryfikację otrzymanych równań analitycznych przeprowadzono dobrze znaną procedurą Runge-Kutta stosowaną do rozwiązywania równań różniczkowych. Wyniki otrzymane za pomocą obu metod okazały się identyczne. W rezultacie można było uznać, iż stosując wzory analityczne, uzyskuje się wiarygodne wyniki. Śledząc ruch cząstki na podstawie wykresów w płaszczyźnie  $(x, y)$ , należy mieć na uwadze, iż rzeczywisty ruch cząstki odbywa się w przestrzeni trójwymiarowej  $(x, y, z)$ . Obraz przedstawiony, zatem na wykresie  $(x, y)$  jest rzutem trajektorii na tę płaszczyznę. Jednak w skrócie nazywamy ten rzut trajektoriā cząstki.

Na początku pokazano kształty stacjonarnych trajektorii elektronu. Uzyskuje się je przy takich wartościach indukcji magnetycznej przyłożonego z zewnątrz pola magnetycznego, przy których parametr  $m_1$  jest liczbą całkowitą. Jeżeli  $m > 1$ , to rzut trajektorii na płaszczyznę  $(x, y)$  jest hipocykloidą (rys. 1). Jest to krzywa zamknięta

składająca się ze skończonej liczby ostrzy o ilości  $m_1$ . Gdy spełniony jest warunek  $0 < m < 1$ , to krzywą opisywaną przez te równania jest stacjonarna w czasie i przestrzeni epicykloida składająca się ze skończonej liczby łuków równej  $m_1$  (rys. 2). Jest to krzywa zamknięta składająca się ze skończonej ilości łuków o ilości  $m_1$ , a gdy  $m_1$  jest ułamkiem, hipocykloida i epicykloida mogą składać się ze skończonej liczby krzyżujących się odpowiednio ostrzy lub łuków wklęsłych i wypukłych o punkcie bieżącym wracającym do punktu wyjściowego (rys. 3).

Wykresy wykonane na podstawie przedstawionych w pracy relacji pokazują, że przy stałych wartościach innych parametrów zmiana wartości natężenia pola elektrycznego fali elektromagnetycznej  $E_0$  prowadzi do samopodobnej zmiany wielkości parametrów  $R$  i  $r$  przy zachowaniu stałości wielkości parametru  $m$ , a więc do przeskalowywania rozmiarów trajektorii ruchu cząstki (rys. 4 i 5). Przez zmianę wartości  $E_0$  można więc zwiększać lub zmniejszać rozmiary tej samej trajektorii, zarówno w przypadku hipocykloid, jak i w przypadku epicykloid. Im większa jest wartość natężenia  $E_0$  pola elektrycznego fali elektromagnetycznej tym większe są rozmiary trajektorii oraz ta zmiana jest proporcjonalna do zmiany  $E_0$ . Cechą charakterystyczną obu ruchów, tj. w przypadku ruchu wzdłuż hipocykloidy i epicykloidy, jest to, że odbywają się one w przeciwnych kierunkach wzdłuż tych trajektorii, pokonując je w tym samym czasie. Wraz ze zmianą wielkości trajektorii, na skutek zmiany wartości  $E_0$ , następuje zmiana prędkości całkowitej cząstki.

W pracy prezentowane są także wykresy ilustrujące wpływ indukcji magnetycznej stałego, wzdłużnego pola magnetycznego  $B_z$  na kształty i rozmiary trajektorii przy zachowaniu stałości natężenia pola elektrycznego fali elektromagnetycznej  $E_0$  (rys. 6 i 7). W tym przypadku większa wartość natężenia stałego pola magnetycznego  $B_z$  prowadzi do zmniejszenia rozmiarów trajektorii. Z zamieszczonych wykresów oraz relacji matematycznych wynika też, że poprzez zmianę wielkości natężenia pola magnetycznego,  $\pm B_z$ , przy zachowaniu stałości natężenia pola elektrycznego  $E_0$ , możliwa jest nie tylko zmiana skali trajektorii, jak w przypadku rozważonym wyżej, lecz także zmiana ich kształtów wyrażająca się w zmianą liczby ostrzy lub łuków tworzących trajektorie.

Poprzez zmianę wartości rozważanych parametrów można zmieniać także prędkości i przyspieszenia cząstek. Przedstawione równania pokazują w szczególności, że prędkość cząstki można zmieniać, zmieniając zarówno wartość natężenia pola  $B_z$ , jak i parametry fali elektromagnetycznej (tego w tej pracy nie ilustrujemy rysunkami).

W przypadku zmiany znaku ładunku cząstki na przeciwny analogiczne do wyżej przedstawionych wykresów uzyska się zmieniając jednocześnie na przeciwny kierunek wektora indukcji stałego, wzdłużnego pola magnetycznego  $B_z \rightarrow -B_z$  lub znak skrętności kołowo spolaryzowanej fali elektromagnetycznej na przeciwny, przy zachowaniu takiego samego kierunku wektora indukcji magnetycznej  $B_z$ . Przedstawione relacje pokazują więc, że zmieniając wartość indukcji magnetycznej,

$B_z$  można selektywnie wpływać na ruch cząstek o różnych masach i takim samym ładunku, na ruch cząstek o takich samych masach, lecz różnych ładunkach i ogólnie na ruch cząstek o różnych wartościach stosunku masy do ładunku. W tej publikacji nie uwzględniono zjawiska Dopplera, które w pewnych przypadkach może odgrywać istotną rolę w akceleracji naładowanych cząstek. Będzie to tematem oddzielnej publikacji.

Otrzymane w pracy rozwiązania pozwalają na opis ruchu naładowanej cząstki w wielu innych rodzajach fal, które w szczególności można przedstawiać jako superpozycję fal składowych o różnych parametrach i polaryzacjach.

Przedstawione wyżej wnioski uzasadniają przydatność otrzymanych wyników w zakresie pełniejszego zrozumienia skomplikowanych zjawisk związanych z oddziaływaniem naładowanych cząstek z promieniowaniem laserowym lub maserowym w tym warunków generacji własnego promieniowania elektromagnetycznego przez cząstkę.

Artykuł wpłynął do redakcji 5.05.2008 r. Zweryfikowaną wersję po recenzji otrzymano w październiku 2008 r.

#### LITERATURA

- [1] E. ESAREY, P. SPRANGLE, J. KRALL, A. TING, *Overview of plasma-based accelerator concepts*, IEEE Trans. Plasma Sci., 24, 1996, 252-288.
- [2] A. MODENA, Z. NAJMUDIN, A. E. DANGOR, C. E. CLAYTON, K. A. MARSH, C. JOSHI, V. MALKA, C. B. DARROW, C. DANSON, D. NEELY, F. N. WALSH, *Electron acceleration from the breaking of relativistic plasma waves*, Nature (London), 377, 1995, 606-608.
- [3] P. CHEN, *Grand Disruption: A Possible Final Focusing Mechanism For Linear Colliders*, Part. Accel., 20, 1987, 171.
- [4] T. TAJIMA, J. M. DAWSON, *Laser Electron Accelerator*, Phys. Rev. Lett., 43, 1979, 267-270.
- [5] L. GORBUNOV, V. I. KIRSANOV, *Excitation of plasma waves by an electromagnetic wave packed*, Zh. Eksp. Teor. Fiz., 93, 1987, 509-513.
- [6] D. UMSADTER, E. ESAREY, J. K. KIM, *Nonlinear Plasma Waves Resonantly Driven by Optimized Laser Pulse Trains*, Phys. Rev. Lett., 72, 1994, 1224-1227.
- [7] P. SPRANGLE, E. ESAREY, J. KRALL, G. JOYCE, *Propagation and guiding of intense laser pulses in plasmas*, Phys. Rev. Lett., 69, 1992, 2200-2203.
- [8] T. M. ANTONSEN, JR., P. MORA, *Self-focusing and Raman scattering of laser pulses in tenuous plasmas*, Phys. Rev. Lett., 69, 1992, 2204-2207.
- [9] N. E. ANDREEV, L. M. GORBUNOV, V. I. KIRSANOV, A. POGOSOVA, R. R. RAMAZASHVILI, *Resonant excitation of wakefields by a laser pulse in a plasma*, Pis'ma Zh. Eksp. Teor. Fiz., 55, 1992, 551-555.
- [10] E. ESAREY, P. SPRANGLE, J. KRALL, A. TING, *Self-focusing and guiding of short laser pulses in ionizing gases and plasmas*, IEEE J. Quant. Electron., 33, 1997, 1879-1914.
- [11] H. HORA, *Particle acceleration by superposition of frequency-controlled laser pulses*, Nature 333, 1988, 337-338; [http://arxiv.org/PS\\_cache/math-ph/pdf/9908/9908024v1.pdf](http://arxiv.org/PS_cache/math-ph/pdf/9908/9908024v1.pdf).



- 
- [12] F. V. HARTEMANN, J. R. VAN METER, A. L. TROHA, E. C. LANDAHL, N. C. LUHMANN, JR., H. A. BALDIS, A. GUPTA, A. K. KERMAN, *Three-dimensional relativistic electron scattering in an ultrahigh-intensity laser focus*, Phys. Rev., E 58, 1998, 5001-1012.
- [13] G. V. STUPAKOV, M. S. ZOLOTOREV, *Ponderomotive Laser Acceleration and Focusing in Vacuum for Generation of Attosecond Electron Bunches*, Phys. Rev. Lett., 86, 2001, 5274-5277.
- [14] D. UMSTADTER, *Review of physics and applications of relativistic plasmas driven by ultra-intense lasers*, Phys. Plasmas, 8, 2001, 1774-1785.
- [15] J. J. XU, Q. KONG, Z. CHEN, P. X. WANG, D. LIN, Y. K. HO, *Vacuum laser acceleration in circularly polarized fields*, J. Phys. D: Appl. Phys., 40, 2007, 2464-2471.
- [16] D. N. GUPTA, H. SUK, *Electron acceleration to high energy by using two chirped lasers*, Laser Part. Beams, 25, 2007, 31-36.
- [17] V. H. MELLADO, S. HACYAN, R. HAUREGUI, *Trapping and acceleration of charged particles in Bessel beams*, Laser Part. Beams, 24, 2006, 559-565.
- [18] K. KOYAMA, M. ADACHI, E. MIURA, S. KATO, S. MASUDA, T. WATANABE, A. OGATA, M. TANIMOTO, *Monoenergetic electron beam generation from a laser-plasma accelerator*, Laser Part. Beams, 24, 2006, 95-100.
- [19] A. KUMAR, M. K. GUPTA, R. P. SHARMA, *Electron acceleration to GeV energy by a radially polarized laser*, Laser Part. Beams, 24, 2006, 403-409.
- [20] H. LIU, X. T. HE, H. HORA, *Additional acceleration and collimation of relativistic electron beams by magnetic field resonance at very high intensity laser interaction*, Appl. Phys., B 82, 2006, 93-97.
- [21] D. N. GUPTA, C. M. RYU, *Electron acceleration by a circularly polarized laser pulse in the presence of an obliquely incident magnetic field in vacuum*, Phys. Plasmas, 12, 2005, 053103-1-053103-5.
- [22] Y. I. SALAMIN, FARHAD H. M. FAISAL, *Relativistic free-electron dynamics and light emission spectra in the simultaneous presence of a super-intense laser field and a strong uniform magnetic field*, Phys. Rev., A 58, 1998, 3221-3234; Y. I. Salamin, F. H. M. Faisal, Christoph, H. Keitel, *Exact analysis of ultrahigh laser-induced acceleration of electrons by cyclotron autoresonance*, Phys. Rev., A 62, 2000, 053809-1-053809-15.
- [23] G. D. TSAKIRIS, C. GHAN, V. K. TRIPATHI, *Laser induced electron acceleration in the presence of static electric and magnetic fields in a plasma*, Phys. Plasmas, 7, 2000, 3017-3030.
- [24] G. ZENG, *Energy gain of injected electrons subjected to an intense laser field and its magnetic field induced in plasma*, Phys. Rev., E 60, 1999, 5950-5958.
- [25] I. YU. KUSTYUKOV, G. SHVETS, N. J. FISH, J. M. RAX, *Magnetic-field generation and electron acceleration in relativistic laser channel*, Phys. Plasmas, 9, 2002, 636-648.
- [26] K. P. SINGH, *Electron acceleration by a circularly polarized laser pulse in a plasma*, Phys. Plasmas, 11, 2004, 3992-3995.
- [27] P. X. WANG, Y. K. HO, X. Q. YUAN, Q. KONG, N. CAO, L. SHAO, A. M. SESSLER, E. ESAREY, E. MOSHKOVICH, Y. NISHIDA, N. YUGAMI, H. ITO, J. X. WANG, S. SCHEID, *Characteristics of laser-driven electron acceleration in vacuum*, J. Appl. Phys., 91, 2002, 856-866.
- [28] <http://www.lanl.gov/mst/nhmf/magnets.shtml>
- [29] K. P. SINGH, *Acceleration of electrons by a circularly polarized laser pulse in the presence of an intense axial magnetic field in vacuum*, J. Appl. Phys., 100, 2006, 044907-1-044907-4.
- [30] [http://arxiv.org/PS\\_cache/arxiv/pdf/0802/0802.0092v1.pdf](http://arxiv.org/PS_cache/arxiv/pdf/0802/0802.0092v1.pdf)
- [31] A. DUBIK, *Ruch naładowanych cząstek w polach elektromagnetycznych*, Monografia nr 101, Wydawnictwo Politechniki Radomskiej, Radom, 2007.

- [32] E. MULAŚ, *Przykłady symulacji komputerowej w fizyce*, Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej, Warszawa, 2006.

A. DUBIK, M. J. MAŁACHOWSKI

**Exact solution of relativistic equations for charged particle motion  
in laser beam with static axial magnetic field**

**Abstract.** The results of theoretical analysis of behaviour of charged particle in the electromagnetic field of laser beam in the presence of the axially directed static magnetic field are presented in the graphical form. The results have been obtained using the originally derived analytical equations. The equations have been verified by numerical solution of differential equations of motion using the Runge-Kutta method.

The analytical equations with the aid of the proper curves enabled a quantitative illustration of the impact of different parameters on the shape, dimensions and the electron motion direction along the trajectory.

By changing the intensity of the laser beam it is possible to change the dimension of the trajectories of hypocycloids as well as epicycloids which present the projection of the trajectories on the  $(x, y)$  plane perpendicular to the axis direction. This change was found to be proportional to the change of the electric field intensity. However, the increase in the static axial magnetic field leads to the decrease in the trajectory dimensions and the change of their shape.

**Keywords:** relativity, acceleration, charged particle, laser beam, electromagnetic field, magnetic field

**Universal Decimal Classification:** 537.8