



Wyznaczanie m -optymalnych podstruktur opiniowania diagnostycznego hipersześciangu zredukowanego

ARTUR ARCIUCH

Wojskowa Akademia Techniczna, Wydział Cybernetyki, Instytut Teleinformatyki i Automatyki,
Zakład Systemów Komputerowych, 00-908 Warszawa, ul. S. Kaliskiego 2

Streszczenie. Artykuł dotyczy projektowania takich m -optymalnych struktur opiniowania diagnostycznego (struktur OD) typu PMC, które są grafami częściowymi zredukowanego hipersześciangu wymiaru n . Zaproponowano metodę projektowania m -optymalnej struktury OD względem zredukowanego hipersześciangu wymiaru n , gdzie $n > m$, która bazuje na spójnym rdzeniu struktury m -optymalnej.

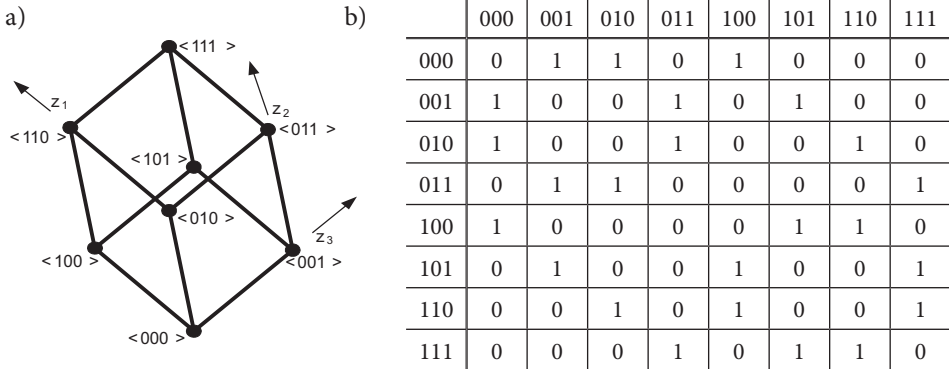
Słowa kluczowe: diagnostyka systemów komputerowych, m -diagnozowalna struktura opiniowania diagnostycznego typu PMC, struktura typu hipersześciangu binarnego, rdzeń m -optymalnej struktury opiniowania diagnostycznego typu PMC

Symbole UKD: 681.324

Wprowadzenie

Struktury typu hipersześciangu binarnego [3, 4], określonego wymiaru, mają szerokie zastosowanie w systemach mikroprocesorowych o specjalnym przeznaczeniu oraz regularnej strukturze (w strukturze hipersześciangu binarnego wymiaru n każdy węzeł jest stopnia n). Struktura typu hipersześciangu binarnego wymiaru n jest również grafem, który opisuje n -optymalną ($n > 2$) strukturę opiniowania diagnostycznego [6, 8, 10] (strukturę OD) typu PMC — przy założeniu, że krawędź przyległa do węzłów hipersześciangu jest cyklem elementarnym. W artykule zaproponowano metodę, bazującą na spójnym rdzeniu m -optymalnej struktury OD typu PMC, wyznaczenia takiej m -optymalnej struktury OD typu PMC, która jest grafem częściowym struktury typu zredukowanego hipersześciangu binarnego wymiaru n ($n > m$). Zaproponowana metoda jest inną propozycją rozwiązania problemu opisanego w artykule [4].

W dalszej części rozdziału przedstawiono określenia, właściwości opisywanych struktur oraz oznaczenia wykorzystywane w artykule. W rozdziale 2 opisano rdzenie spójne m -optymalnych struktur opiniowania diagnostycznego typu PMC, natomiast w rozdziale 3 zaproponowano metodę projektowania m -optymalnej struktury OD typu PMC, bazującą na rdzeniu spójnym, która jest grafem częściowym struktury hipersześcianu wymiaru n .



Rys. 1. Hipersześcian binarny H^3 (a) oraz jego macierz przejść (b)

Określenie 1. [3] Hipersześcianem binarnym H^n wymiaru n (n -wymiarowym hipersześcianem binarnym) nazywamy graf zwykły $G'(G' = \langle E', U' \rangle, |E'| = 2^n, |U'| = n \cdot 2^{n-1})$ o 2^n węzłach, z których każdy opisany jest odpowiednim wektorem binarnym z ($z = [z_1, \dots, z_n]$, $z_i \in \{0, 1\}$), $1 \leq i \leq n$, $z \in Z^n$, $|Z^n| = 2^n$) oraz o $n \cdot 2^{n-1}$ krawędziach łączących te węzły, których opisujące je wektory odległe są o 1 według miary Hamminga.

Na rysunku 1, dla przykładu, pokazano strukturę H^3 .

Graf częściowy struktury H^n będzie oznaczany przez H_t^n . Indeks t oznacza liczbę krawędzi grafu struktury.

W artykule zakłada się, że struktura hipersześcianu opisuje strukturę OD typu PMC, więc krawędź (e', e'') hipersześcianu będzie traktowana jako cykl elementarny — $(e', e'') \equiv \langle e', e'' \rangle \cup \langle e'', e' \rangle$.

Określenie 2. [7] Strukturą OD nazywamy graf Berge'a $G(G = \langle E, U \rangle)$, bez pętli $\langle e', e' \rangle \notin U$, w którym łuk $\langle e', e'' \rangle \in U$ ($e', e'' \in E$) oznacza, że element systemu e' opiniuje (testuje) stan niezawodnościowy elementu e'' . Graf G nazywamy również grafem opiniowania diagnostycznego lub grafem testowania.

Strukturę OD, dla której istnieje algorytm umożliwiający zlokalizowanie wszystkich niezdatnych elementów pod warunkiem, że jest ich nie więcej niż m , nazywamy m -diagnozowalną strukturą OD, a m -diagnozowalną strukturą OD o minimalnej liczbie testowań — m -optymalną strukturą OD.

Zauważmy, że w procesie opiniowania biorą udział również elementy niezdatne.

Formalnie, dla modelu PMC [9] wartość opinii d_{st} elementu e_s o elemencie e_t jest zdefiniowana następująco:

$$[n(e_s) = n_0(e_s)] \rightarrow \left[d_{st} = \begin{cases} 0 & \text{dla } n(e_t) = n_0(e_t) \\ 1 & \text{dla } n(e_t) \neq n_0(e_t) \end{cases} \right]$$

$$[n(e_s) \neq n_0(e_s)] \rightarrow [d_{st} = x], \quad x \in \{0,1\}.$$

Własność 1. [9] Jeżeli struktura OD typu PMC jest strukturą m -diagnozowalną, to

$$(|E| \geq 2m + 1) \wedge (\forall e \in E : \mu^-(e) \geq m), \quad (1)$$

gdzie $\mu^-(e)$ oznacza stopień wejściowy wężła e , to jest liczbę elementów, które testują element e , a $|E|$ oznacza liczebność zbioru E .

Własność 2. [5] Struktura OD typu PMC, która spełnia zależność 1 jest strukturą m -diagnozowalną wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$(\forall 0 \leq p \leq m - 1 \forall E' \subset E : |E'| = |E| - 2m + p) : |\Gamma(E')| > p, \quad (2)$$

gdzie $\Gamma(E')$ oznacza zbiór takich następników elementów zbioru E' , które nie są elementami zbioru E' .

Własność 3. [3] Struktura $H_t^n, n \geq 2$ jest co najmniej 1-diagnozowalną strukturą OD typu PMC.

Własność 4. [3] Struktura H^2 nie jest 2-diagnozowalną strukturą OD typu PMC.

Własność 5. [3] Struktura $H^n, n \geq 3$ jest n -optymalną strukturą OD typu PMC.

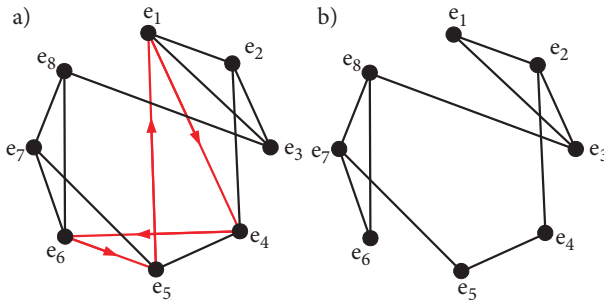
Własność 6. [3] Każda struktura, $H_t^n, n \geq 3$, która jest grafem Hamiltona jest 2-diagnozowalną strukturą OD typu PMC.

Własność 7. [3] Struktura $H_t^n, n \geq 4$, której stopień każdego jej wężła $\mu(e) = m, 2 < m < n$ jest m -optymalną strukturą OD typu PMC.

2. Rdzenie struktur

Określenie 3. Rdzeniem struktury [2, 1] nazywamy graf częściowy m -optymalnej silnie spójnej struktury OD, uzyskany po usunięciu takich łuków u , że $\langle e^k(u), e^p(u) \rangle \notin U$ ($e^k(u)$ oraz $e^p(u)$ oznaczają, odpowiednio, węzeł końcowy oraz węzeł początkowy łuku u).

Na rysunku 2 pokazano, dla przykładu, strukturę 3-optymalną typu PMC, ósmego rzędu oraz jej rdzeń (cykle elementarne, dla łatwego rozróżnienia, oznaczono krawędziami).



Rys. 2. 3-optymalna struktura opiniowania diagnostycznego (a) oraz jej rdzeń (b)

Rdzeń struktury jest grafem zwykłym, który jest kanonicznym reprezentantem klasy podobieństwa silnie spójnych m -optymalnych struktur OD określonego typu i rzędu [1]. Rdzeń struktury OD może być zarówno grafem węzłowym, jak i grafem pełnym oraz nie musi być grafem spójnym. Jeżeli stopień pełności silnie spójnej pierwotnej struktury m -diagnozowalnej jest dostatecznie duży, a ma miejsce w rozpatrywanym przypadku, to skuteczna metoda (opracowana w pracy [1]) wyznaczania silnie spójnej struktury (względem struktury pierwotnej — hiper-sześcianu zredukowanego H_t^n) polega na wyznaczeniu takiego spójnego rdzenia struktury H_t^n i uzupełnieniu go niezbędnymi łukami w celu uzyskania m -optymalnej ($2 < m < n$) struktury OD typu PMC.

Z zależności 1 i 2 wynikają własności 8, 9.

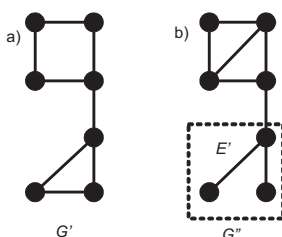
Własność 8. Jeżeli graf zwykły rzędu k stopnie nie większego niż m ($m > 0$) jest rdzeniem m -optymalnej struktury OD typu PMC, to

$$\begin{aligned}
 & (\forall 0 \leq p \leq m-1 \forall E' \subset E : |E'| = |E| - 2m + p) : \\
 & : (m | E \setminus E' | - \sum_{e \in E \setminus E'} \mu(e) > p - |\Gamma(E')|). \quad (3)
 \end{aligned}$$

Własność 9. Graf zwykły rzędu k stopnia nie większego niż m nie jest rdzeniem m -optymalnej struktury OD typu PMC, jeżeli

$$(\exists 0 \leq p \leq m-1 \exists E' \subset E : |E'| = |E| - 2m + p) : ((m |E \setminus E'| - \sum_{e \in E \setminus E'} \mu(e)) \leq p). \quad (4)$$

Na rysunku 3, dla przykładu, pokazano grafy zwykłe siódmego rzędu, z których graf G'' nie jest rdzeniem struktury 3-optymalnej, ponieważ dla zaznaczonego na rysunku 3b zbioru E' węzłów grafu G'' jest spełniona zależność 4 (dla $m = 3$ i $p = 2$).



Rys. 3. Graf G' jest, a graf G'' nie jest, rdzeniem 3-optymalnej struktury OD typu PMC

Zauważmy (na podstawie własności 5 oraz określenia 3), że struktura hipersześcianu binarnego wymiaru n , gdzie $n > 2$, (rys. 1) opisuje zarówno strukturę n -optymalną rzędu 2^n jak i rdzeń tej struktury.

3. Metoda wyznaczania struktury m -optymalnej względem hipersześcianu H_t^n

3.1. Uwagi wstępne

Rozpatrzmy strukturę H_t^n ($H_t^n = \langle E, U \rangle, |E| = 2^n, |U| = t, n > 2, t < n \cdot 2^{n-1}$), która opisuje m -diagnozowalną ($0 < m < n$) strukturę OD typu PMC. Zgodnie z własnościami 6,7 w strukturze H_t^n można wyróżnić taki graf częściowy $H_{t^*}^{*n} = \langle E, U^* \rangle, t^* = m |E|$, t^* oznacza liczbę łuków, U^* oznacza zbiór łuków, który jest m -optymalną strukturą OD typu PMC.

Struktura m -optymalna względem m -diagnozowalnej struktury H_t^n jest grafem częściowym tej struktury, powstałym w wyniku usunięcia ze struktury $H_{t^*}^{*n}$ zbioru łuków o liczebności $|U^*(H_{t^*}^{*n})| - m |E(H_{t^*}^{*n})|$.

Określenie 4. Łukiem silnie spójnie redukowalnym m -diagnozowalnej silnie spójnej struktury OD typu PMC G' nazywamy taki łuk $u (u \in U(G'))$ że graf częściowy $\langle U(G') \setminus u \rangle_{G'}$ jest silnie spójną strukturą m -diagnozowalną.

Niech $U^R(G)$ oznacza zbiór łuków silnie spójnie redukowalnych struktury G .
Zauważmy, że:

$$\mu^+(e^p(u) | G = 1) \Rightarrow (u \notin U^R(G)),$$

gdzie $e^p(u)$ oznacza początkowy węzeł łuku u , $\mu^+(e)$ oznacza stopień wyjściowy węzła e , to jest liczbę elementów, które testuje element e .

Z zależności 1,2 wynika, że

$$\begin{aligned} (\langle e_i, e_j \rangle \notin U^R) \Leftrightarrow & ((\mu^+(e_i) = 1) \vee (\mu^-(e_j) = m)) \vee (((\exists 1 \leq p \leq m-1 \exists E' \subset E \setminus \{e_j\} : \\ & : (e_i \in E') \wedge (|E'| = |E| - 2m + p)) : (|\Gamma(E')| = p+1) \wedge (|\{\Gamma^{-1}\{e_j\}\} \cap E'| = 1)) \end{aligned} \quad (5)$$

oraz

$$\begin{aligned} (\langle e_i, e_j \rangle \in U^R) \Leftrightarrow & ((\mu^+(e_i) > 1) \vee (\mu^-(e_j) > m)) \vee (((\forall 1 \leq p \leq m-1 \forall E'' \subset E \setminus \{e_j\} : \\ & : (e_i \in E'') \wedge (|E''| = |E| - 2m + p) \wedge (|\{\Gamma^{-1}\{e_j\}\} \cap E''| = 1)) : |\Gamma(E'')| > p+1, \end{aligned} \quad (6)$$

gdzie $\Gamma^{-1}(E')$ oznacza zbiór takich poprzedników elementów zbioru E' , które nie są elementami zbioru E' .

Własność 10. Jeżeli łuk $\langle e', e'' \rangle$ m -diagnozowalnej silnie spójnej struktury OD typu PMC jest łukiem silnie spójnie redukowalnym to:

$$(\mu^+(e') > 1) \wedge (\mu^-(e'') > m). \quad (7)$$

3.2. Metoda bazująca na spójnym rdzeniu struktury

Metoda polega na wyznaczeniu w strukturze H_t^n spójnego rdzenia R , a następnie na usunięciu H_t^n , silnie spójnie redukowalnych łuków u ($u \in U(H_t^n) \setminus U(R)$) tak, aby uzyskana struktura $R \cup H_t^n \setminus \{u\}$ była silnie spójną m -optymalną ($m < n$) strukturą OD typu PMC.

Diagnozowalność m (ang. *diagnosability of system*) struktury wynikowej jest równa stopniowi struktury H_t^n , czyli: $m = \min\{\mu(e) : e \in E(H_t^n)\}$.

Sposób wyznaczenia spójnego rdzenia R struktury jest następujący. Ze struktury H_t^n należy usunąć takie krawędzie (e', e'') , które spełniają następującą zależność:

$$(\mu(e') > m \wedge \mu(e'') > 1) \vee (\mu(e'') > m \wedge \mu(e') > 1). \quad (8)$$

Jeżeli stopień $\mu(G') \leq m$, a uzyskany graf częściowy $\langle G' \rangle_{H_i^n}$ nie jest rdzeniem, to ze struktury G' należy usunąć krawędzie (e', e'') , które spełniają następującą zależność:

$$(\mu(e') \leq m \wedge \mu(e'') > 1) \vee (\mu(e'') \leq m \wedge \mu(e') > 1). \quad (9)$$

W wyniku usunięcia krawędzi spełniających zależności 8,9 uzyskano spójny rdzeń R .

Następnie łuki $u (u \in U^*(H_i^n))$ struktury H_i^n takie, że $(U^*(R) \cap U^*(H_i^n))$ oznaczamy jako łuki nieredukowalne. Pozostałe łuki struktury H_i^n nazywamy *dopełnieniem rdzenia* (określenie 5 – poniżej).

Określenie 5. Dopełnieniem rdzenia $R ((|E(R)| = |E(G')|) \wedge (U^*(R) \subset U^*(G')))$ do struktury G' nazywamy podzbiór $U''(G'|R)$, gdzie $U''(G'|R) \subset U^*(G')$, spełniający następującą zależność

$$U''(G'|R) = \{\langle e', e'' \rangle : (\langle e', e'' \rangle \in U^*(G') \Leftrightarrow \langle e', e'' \rangle \notin U^*(R))\}. \quad (10)$$

Następnie z dopełnienia $U''(H_i^n|R)$ należy usunąć $|U''(H_i^n)| - (m|E(R)| - |U^*(R)|)$ łuków silnie spójnie redukowalnych (określenie 4). Zauważmy, że jeżeli łuk $\langle e', e'' \rangle$ jest łukiem silnie spójnie redukowalnym, to $(\mu^+(e') > 1) \wedge (\mu^-(e'') > m)$ (zależność 7).

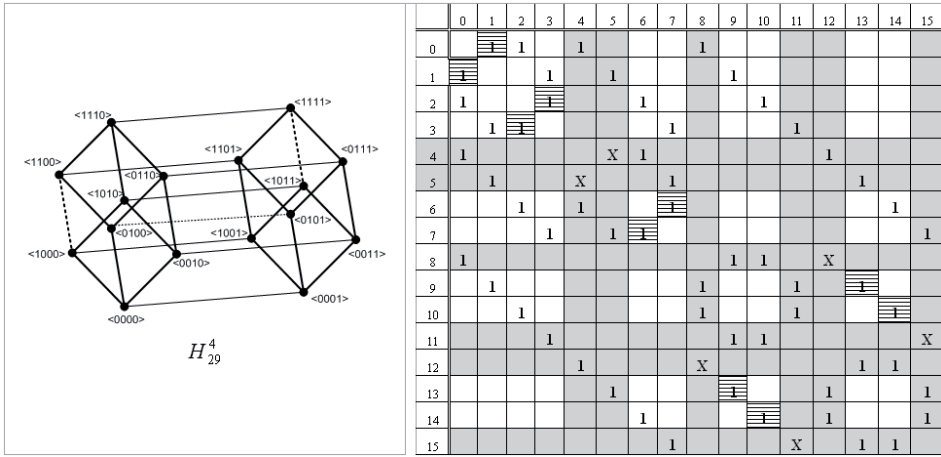
Jeżeli w dopełnieniu $U''(H_i^n|R)$ występuje kilka łuków silnie spójnie redukowalnych, to usunąć taki łuk, którego węzeł początkowy ma największą liczbę następników. W przypadku równej liczby następników węzłów końcowych łuków usunąć dowolny z takich łuków.

Jeżeli struktura $\tilde{G} (U^*(\tilde{G} = U^*(R) \cup U_D(H_i^n), |U_D(H_i^n)| = m|E(R)| - |U^*(R)|)$, gdzie $U_D(H_i^n|R) = U_{\min}(G'|R)$ oznacza zbiór wybranych łuków dopełnienia) jest m -optymalną silnie spójną strukturą OD, to struktura \tilde{G} jest poszukiwaną m -optymalną podstrukturą hipersześcianu H_i^n czyli $\tilde{G} \equiv H_{i^*}^n$.

3.3. Przykład zastosowania metody

Poniżej pokazano przykład wyznaczania 3-optymalnej struktury OD typu PMC jako grafu częściowego struktury H_{29}^4 . Liniami przerywanymi (graf rys. 4) oraz symbolami „X” (macierz rys. 4) oznaczono krawędzie, usunięte ze struktury H^4 . Oznaczmy strukturę H_{29}^4 z rysunku 4 przez H .

Stopień struktury $\mu(H) = 3$, stąd wynika, że możemy wyznaczyć graf częściowy, który jest co najwyżej 3-optymalną strukturą OD typu PMC. Ze struktury H należy usunąć $(U(H) - 3|E(H)| / 2)$, czyli 5 krawędzi, w taki sposób, aby każdy węzeł miał stopień równy 3. Wybieramy na przykład następujący zbiór krawędzi: $\{(0,1); (2,3); (6,7); (9,13); (10,14)\}$. Przy usuwaniu krawędzi wygodnie posłużyć się macierzą przejść struktury H (rys. 4), w której kolorem szarym oznaczono wiersze

Rys. 4. Struktura hipersześcianu H_{29}^4 oraz jej macierz przejść

i kolumny o numerach odpowiadających numerom węzłów stopnia mniejszego niż 4 struktury H , natomiast komórki zaznaczone poziomymi liniami pokazują, które krawędzie usunięto ze struktury H w celu uzyskania rdzenia. Zauważmy, że w tym przypadku tak usuwano krawędzie, aby stopień każdego z węzłów rdzenia miał stopień równy 3. Ponieważ uzyskana struktura spełnia zależności 1,2 dla $m = 3$, to jest ona 3- optymalną strukturą OD typu PMC, która jest grafem częściowym struktury H . Oczywiście można wybrać inny rdzeń na przykład taki, którego każdy węzeł jest stopnia 2, wtedy projektowanie 3- optymalnej struktury może polegać na uzupełnieniu rdzenia na przykład łukami niesymetrycznymi dopełnienia.

Oczywiście istnieje wiele struktur 3- optymalnych, które są grafem częściowym struktury H .

4. Podsumowanie

Zaproponowana metoda wyznaczania struktury m -optymalnej OD typu PMC względem struktury hipersześcianu zredukowanego wymiaru n ($n > m$) nie uwzględnia kosztów opiniowania się węzłów struktury, jak również ograniczenia na liczbę węzłów, które może opiniować dowolny węzeł struktury. Metoda bazuje na spójnym rdzeniu m -optymalnej struktury OD typu PMC i jest innym wariantem dla metody zaproponowanej w pracy [4] oraz stanowi bazę do rozwiązania problemu przeliczenia i wyznaczenia takich struktur m -optymalnych jako podgrafów częściowych hipersześcianu zredukowanego dla modelu opiniowania typu PMC, które spełniają określone (założone) wymagania.

Praca naukowa finansowana ze środków na naukę w latach 2008-2011 jako projekt badawczy Nr O N514 051135.

Artykuł wpłynął do redakcji 14.07.2008 r. Zweryfikowaną wersję po recenzji otrzymano we wrześniu 2008 r.

LITERATURA

- [1] A. ARCIUCH, *Metody projektowania 3-optymalnych struktur opiniowania diagnostycznego, spełniających określone wymagania*, rozprawa doktorska, Wydział Cybernetyki, Wojskowa Akademia Techniczna, Warszawa, 2007.
- [2] A. ARCIUCH, *Wyznaczanie 3-optymalnych struktur opiniowania diagnostycznego typu PMC*, Biuletyn Instytutu Automatyki i Robotyki, nr 22, Wojskowa Akademia Techniczna, Warszawa, 2005, 33-54.
- [3] J. CHUDZIKIEWICZ, *Sieci komputerowe o strukturze logicznej typu hipersześcianu*, Instytut Automatyki i Robotyki, Wydział Cybernetyki WAT, Warszawa, 2002.
- [4] J. CHUDZIKIEWICZ, *Metoda wyznaczania m -optymalnych struktur opiniowania diagnostycznego dla sieci komputerowych typu hipersześcianu*, Biuletyn Instytutu Automatyki i Robotyki, Wojskowa Akademia Techniczna, nr 18, Warszawa, 2003, 45-57.
- [5] S. L. HAKIMI, A. T. AMIN, *Characterization of Connection Assignment of Diagnosable Systems*, IEEE Transactions on Computers 1, 1974, 86-88.
- [6] R. KULESZA, *Niektóre własności 2-optymalnych struktur opiniowania diagnostycznego typu PMC*, Biuletyn Instytutu Automatyki i Robotyki, Wojskowa Akademia Techniczna, nr 21, Warszawa, 2004, 3-13.
- [7] R. KULESZA, *Struktury samodiagnozowalne w systemach cyfrowych*, Diag'2003: V Krajowa Konferencja Techniczna Urządzeń i Systemów, Ustroń, 13-17.10.2003, 165-173.
- [8] R. KULESZA, *Podstawy diagnostyki sieci logicznych i komputerowych*, Instytut Automatyki i Robotyki, Wydział Cybernetyki, Wojskowa Akademia Techniczna, Warszawa, 2000.
- [9] F. P. PREPARATA, G. METZE, R. T. CHIEN, *On the Connection Assignment Problem of Diagnosable Systems*, IEEE Transactions on Computers 6, 1967, 848-854.
- [10] Z. ZIELIŃSKI, *Komputerowo wspomagane wyznaczanie najtańszych 2-diagnozowalnych struktur typu PMC*, Biuletyn Instytutu Automatyki i Robotyki, Wojskowa Akademia Techniczna, nr 18, Warszawa, 2003, 33-44.

A. ARCIUCH

Designing 3-optimal diagnostic opinion substructures of reduced hypercube

Abstract. A diagnostic opinion system is such a diagnostic system which is self-diagnosable — which means that in the system there exists an algorithm capable of identifying its faulty elements. In this article, it was proposed a method of designing such m -optimal system of PMC type which is the edge-induced subgraph of reduced hypercube. A specific method is based on a special class of undirected digraphs called the core. The core is an edge-induced subgraph of an m -optimal strongly connected component obtained by deleting all directed arches. Once the core is constructed, the strongly connected component is obtained by supplementing it with missing directed arches of

reduced hypercube which are not in set of core edges. In order to have m -optimal structure, the obtained graph has to exhibit the so-called Hakimi and Amin Properties.

Keywords: system level diagnosis, t -diagnosable structure of PMC type, binary hypercube, core of t -diagnosable structure of PMC type

Universal Decimal Classification: 681.324