



# Fizyczne implikacje matematycznego opisu efektu Dopplera

JÓZEF RAFA

Wojskowa Akademia Techniczna,  
Wydział Cybernetyki, Instytut Matematyki i Kryptologii  
00-908 Warszawa, ul. S. Kaliskiego 2

**Streszczenie.** W publikacji przedstawiono rozwiązanie dla równania modelującego efekt Dopplera. Poruszające się źródło generuje propagującą się w otaczającej czasoprzestrzeni falę, która emituje okresowy sygnał. W punkcie czasoprzestrzeni sygnał ten jest odbierany ze zmienioną pulsacją, wywołaną sprzężeniem ruchu falowego z ruchem źródła tej fali. Wyznaczono efektywne rozwiązanie tego zagadnienia metodą Cagniarda de Hoopa.

**Słowa kluczowe:** efekt Dopplera, równanie falowe, metoda Cagniarda de Hoopa, rozwiązanie fundamentalne

**Symbole UKD:** 51, 53

## 1. Wstęp

Efekt Dopplera polega na pozornej zmianie częstotliwości fali w przypadku, gdy źródło zaburzeń i obserwator znajdują się względem siebie w ruchu. Odkrył je i uzasadnił w 1892 roku Christian Doppler (1803-93), austriacki fizyk i astronom. Zjawisko Dopplera wykorzystywane jest w wielu dziedzinach nauki i techniki, w hydrolokacji, radiolokacji, w kosmologii i astronautyce, w badaniach fizycznych i medycynie oraz wielu innych dziedzinach. Ilościowe ujęcie efektu Dopplera w przypadku poruszającego się źródła sygnału wyraża się w podręcznikach fizyki następującą formułą

$$\omega_r = \omega_0 \frac{1}{1 \pm \frac{D}{C}} \quad (1.1)$$

gdzie:

$\omega_r$  — częstotliwość w ruchu,

$\omega_0$  — częstotliwość w spoczynku,

$D$  — prędkość źródła,

$C$  — prędkość fali w ośrodku,

„ $\pm$ ” — występują odpowiednio dla przypadku oddalenia się i zbliżenia źródła i obserwatora.

Opis zjawiska Dopplera był rozpatrywany w przypadku jednowymiarowym lub za pomocą tzw. fal płaskich [8]. W prezentowanej pracy zbadano zjawisko Dopplera jako efekt rozwiązania równania falowego w przypadku generacji fal przez dowolne okresowe w czasie i poruszające się źródło w przestrzeniach  $R^1$ ,  $R^2$  i  $R^3$ . Wyniki uzyskane w pracy wskazują, że zjawisko Dopplera, wyrażające zarówno zmianę częstotliwości odbieranego sygnału jak i jego fazę, jest w ogólności niejednorodne i anizotropowe. Ponadto zależy od wymiaru przestrzeni, w której propaguje się fala. Stanowi ona również przyczynek do ilustracji tezy „Co to znaczy, że przyroda jest matematyczna”.

## 2. Sformułowanie zagadnienia

Rozpatrzmy równanie falowe

$$\left(\frac{1}{c^2}\partial^2 t - \nabla^2\right) u = g(t)\delta(x - Dt)\delta(y)\delta(z) \quad (2.1)$$

gdzie:

$u(x, y, z, t)$  — natężenie pola generowanego w procesie falowym (np. akustycznym, mechanicznym, elektromagnetycznym itp.),

$c$  — prędkość rozchodzenia się zaburzeń w ośrodku (prędkość rozpatrywanej fali),

$(x, y, z)$  — współrzędne kartezjańskie w  $R^3$ ,

$t$  — czas ( $t \in R_+$ ),

$\delta(\cdot)$  — dystrybucja delta Diraca,

$D$  — prędkość poruszania się źródła w wybranym kierunku wzdłuż  $x$ ,

$g(t)$  — intensywność źródła generującego zaburzenia falowe.

## Rozwiązanie sformułowanego zagadnienia

Wyznamy rozkład pola generowanego w czasoprzestrzeni poruszającym się źródłem. W szczególności zbadamy przemianę sygnałów harmo-

nicznych w czasie lub okresowych, określonego jako efekt Dopplera. Wprowadzimy nowy układ zmiennych

$$x_0 = ct \quad x_1 = x - Dt \quad y = x_2, \quad z = x_3 \quad (2.2)$$

oraz oznaczymy

$$u(x, y, z, t) = v(x_0, x_1, x_2, x_3) \quad (2.3)$$

czyli  $u$  — pole związane z obserwatorem nieruchomym,  $v$  — pole związane z poruszającym się obserwatorem.

Równanie problemu przyjmuje obecnie postać:

$$\begin{aligned} (\partial^2 x_0 - 2M\partial^2 x_0 x_1 - (1 - M^2)\partial^2 x_1 - \partial^2 x_2 - \partial^2 x_3)v = \\ = f(x_0)\delta(x_1)\delta(x_2)\delta(x_3) \end{aligned} \quad (2.4)$$

gdzie

$M = \frac{D}{C}$  — liczba bezwymiarowa (w mechanice nazywana liczbą Macha).

Rozwiązanie zagadnienia wyznaczmy metodą transformacji całkowych: Laplace'a względem  $x_0$ , oraz Fouriera względem  $x_2, x_3$  [4].

Oznaczmy  $\mathcal{FL}[v] = \hat{V}(\xi_0, x_1, \xi_2, \xi_3)$ ,  $\xi_0$  — parametr transformacji Laplace'a,  $\xi_2, \xi_3$  — parametry transformacji Fouriera. Wówczas otrzymamy równanie

$$\left( -(1 - M^2)\frac{d^2}{dx_1^2} - 2M\xi_0\frac{d}{dx_1} + (\xi_0^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2) \right) \hat{V} = \bar{f}(\xi_0)\delta(x_1), \quad (2.5)$$

którego rozwiązanie wyraża się formułą

$$\begin{aligned} \hat{V} = \bar{f}(\xi_0) \left[ H(1 - M) \frac{H(x_1)e^{r_1 x_1} + H(-x_1)e^{r_2 x_1}}{(1 - M^2)(r_2 - r_1)} + \right. \\ \left. + H(M - 1) \frac{H(-x_1)(e^{r_1 x_1} - e^{r_2 x_1})}{(M^2 - 1)(r_1 - r_2)} \right], \end{aligned} \quad (2.6)$$

gdzie

$$r_{1,2} = \frac{M\xi_0 \pm \sqrt{\xi_0^2 + (\xi_2^2 + \xi_3^2)(1 - M^2)}}{M^2 - 1},$$

$H(\cdot)$  — funkcja Heaviside'a.

W celu wyznaczenia rozwiązania w czasoprzestrzeni, zastosujemy metodę Cagniarda i transformację de Hoopa [2]

$$\begin{aligned} \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3 = \xi_0 \rho w \quad \xi_2 = (w x_2 - q x_3) \frac{\xi_0}{\rho} \\ - \xi_2 x_3 + \xi_3 x_2 = \xi_0 \rho q \quad \xi_3 = (w x_3 + q x_2) \frac{\xi_0}{\rho} \end{aligned} \quad (2.7)$$

gdzie

$$\rho = \sqrt{x_2^2 + x_3^2}$$

$w, q$  — nowe zmienne transformacji Fouriera.

W dalszym ciągu rozpatrzmy zagadnienia w przypadku  $M < 1$ . Wówczas zgodnie z metodą Cagniarda otrzymujemy [1]

$$\begin{aligned} \bar{v} = & \frac{\bar{f}(\xi_0)\xi_0}{8\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} dq \\ & \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp -\xi_0 \left[ \frac{1}{1-M^2} (Mx_1 + |x_1| (1 + (1-M^2)(w^2 + q^2))^{1/2} - iw\rho) \right]}{(1 + (1-M^2)(w^2 + q^2))^{1/2}} dw \end{aligned} \quad (2.8)$$

gdzie  $\bar{v} = \mathcal{L}[v]$ .

Następnie przekształcamy wewnętrzną całkę na płaszczyźnie zespolonej po konturze Cagniarda:

$$\frac{1}{1-M^2} (Mx_1 + |x_1| (1 + (1-M^2)(w^2 + q^2))^{1/2} - iw\rho = \tau \geq 0 \quad (2.9)$$

gdzie  $\tau$  — parametr całkowania po konturze

$$\Gamma : w(\tau) = w_1(\tau) + iw_2(\tau)$$

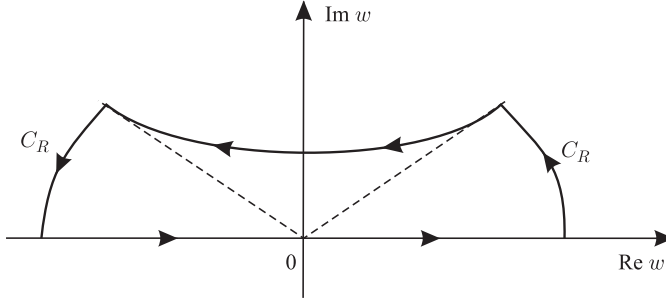
w postaci:

$$\begin{aligned} w^\pm(\tau) = & \frac{i\rho(1-M^2)}{R_1^2} \left( \tau - \frac{M}{1-M^2} x_1 \right) \pm \\ & \pm \frac{|x_1|\sqrt{1-M^2}}{R_1^2} \left[ \left( \tau - \frac{M}{1-M^2} x_1 \right)^2 - R_1^2 \frac{1+q^2(1-M^2)}{(1-M^2)} \right]^{1/2} \end{aligned} \quad (2.10)$$

dla

$$\tau > \frac{M}{1-M^2} x_1 + R_1 \frac{\sqrt{1+q^2(1-M^2)}}{1-M^2}$$

gdzie  $R_1 = \sqrt{x_1^2 + \rho^2(1-M^2)}$ .



W wyniku powyższych działań przekształcamy (2.8) do postaci

$$\begin{aligned} \bar{v}(\xi_0, x_1, x_2, x_3) &= \\ &= \frac{\bar{f}(\xi_0)\xi_0}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} dq \int_{\tau_0}^{\infty} \frac{e^{-\xi_0\tau} d\tau}{\left[ \left( \tau - \frac{M}{1-M^2} x_1 \right)^2 - R_1^2 \frac{1+q^2(1-M^2)}{(1-M^2)^2} \right]^{1/2}} \end{aligned} \quad (2.11)$$

gdzie

$$\tau_0 = \frac{M}{1-M^2} x_1 + \frac{R_1 \sqrt{1+q^2(1-M^2)}}{1-M^2}$$

Dokonując iteracji i wykonując elementarną całkę względem  $q$ , otrzymujemy

$$\bar{v} = \frac{\bar{f}(\xi_0)}{4\pi^2 R_1} \int_{t_0}^{\infty} e^{-\xi_0\tau} d\tau \int_{-q_0}^{+q_0} \frac{dq}{\left[ \left( \tau - \frac{M}{1-M^2} x_1 \right)^2 - \frac{R_1^2}{1-M^2} \left( q^2 + \frac{1}{1-M^2} \right) \right]^{1/2}} \quad (2.12)$$

gdzie

$$q_0 = \left( \frac{\left( \tau - \frac{M}{1-M^2} x_1 \right)^2 (1-M^2)}{R_1^2} - \frac{1}{1-M^2} \right)^{1/2},$$

$$t_0 = \frac{M}{1-M^2} x_1 + \frac{R_1}{1-M^2}$$

skąd po przekształceniach możemy napisać

$$\bar{v}(\xi_0, x_1, x_2, x_3) = \frac{\bar{f}(\xi_0)}{4\pi R_1} e^{-\xi_0 t_0}. \quad (2.13)$$

Zatem poszukiwany rozkład pola falowego wyrazi się wzorem

$$v(x_0, x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{4\pi R_1} f(x_0 - t_0) H(x_0 - t_0) \quad (2.14)$$

lub w układzie nieruchomym ( $x_1 = x - Mx_0$ )

$$u(t, x, y, z) = \frac{H\left(ct - \frac{M}{1-M^2}x + \frac{M^2}{1-M^2}ct - \frac{\sqrt{(x-Dt)^2 + (1-M^2)(y^2+z^2)}}{1-M^2}\right)}{4\pi\sqrt{(x-Dt)^2 + (1-M^2)(y^2+z^2)}} \cdot f\left(\frac{ct}{1-M^2} - \frac{M}{1-M^2}x - \frac{1}{1-M^2}\sqrt{(x-Dt)^2 + (1-M^2)(y^2+z^2)}\right) \quad (2.15)$$

Analizę otrzymanego wyniku i dyskusję rozwiązania przeprowadzimy dla zadanych postaci funkcji źródłowej  $g(t)$  w oddzielnej publikacji (np. [5]).

Przejdźcie do zagadnienia w przestrzeni  $R^1$  otrzymujemy z właściwości przekształcenia Fouriera [4]

$$\bar{v}_{(\xi_0, x_1)} = \lim_{\substack{\xi_2 \rightarrow 0 \\ \xi_3 \rightarrow 0}} \hat{v}(\xi_0, x_1, \xi_2, \xi_3)$$

czyli w  $R^1$  otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \bar{v}(\xi_0, x_1) = \frac{1}{2k} \bar{f}(k^{-1}\xi_0) & \left[ H(1-M)(H(x_1)e^{-\xi_0 \frac{x_1}{1-M}} \right. \\ & + H(-x_1)e^{\xi_0 \frac{x_1}{1-M}})\xi_0(1-M^2) \\ & \left. + H(M-1)\frac{H(-x_1)(e^{\xi_0 \frac{x_1}{M-1}} - e^{\xi_0 \frac{x_1}{M+1}})}{\xi_0(M^2-1)} \right] \end{aligned} \quad (2.16)$$

W układzie nieruchomym otrzymujemy

$$x_1 = x - Dt = x - Mx_0. \quad (2.17)$$

Zatem argument funkcji  $F(\cdot)$  wyraża się ogólnie wzorem

$$F\left(x_0 - \left|\frac{x - Mx_0}{1 \pm M}\right|\right). \quad (2.18)$$

Okres sygnału odbieranego wynosi zatem

$$T_0 = T_r \frac{1}{1 \pm M}. \quad (2.19)$$

Znak „+” dotyczy oddalenia się czoła fali od obserwatora. Znak „-” dotyczy zbliżania się czoła fali do obserwatora. Dla sygnału harmonicznego o częstotliwości  $\omega$  otrzymujemy:

$$\omega_r = \omega_0 \frac{1}{1 \pm \frac{D}{C}} \quad (2.20)$$

czyli zgodnie ze wzorem (1.1). Kładąc w (2.6)  $\xi_3 \rightarrow 0$ , otrzymamy rozwiązanie w  $R^2$ :

$$\begin{aligned} \tilde{V}(\xi_0, x_1, \xi_2) = \frac{1}{2k} \bar{f}(k^{-1}\xi_0) \left[ H(1-M) \frac{H(x_1)e^{r_1x_1} + H(-x_1)e^{r_2x_1}}{(1-M^2)\sqrt{\xi_0 + \xi_2(1-M^2)}} \right. \\ \left. + H(M-1) \frac{H(-x_1)(e^{r_1x_1} - e^{r_2x_1})}{(M^2-1)\sqrt{\xi_0^2 - \xi_2^2(M^2-1)}} \right], \end{aligned} \quad (2.21)$$

gdzie obecnie dla  $M < 1$

$$r_{1,2} = \frac{-M\xi_0 \mp \sqrt{\xi_0^2 + \xi_2(1-M^2)}}{1-M^2} \quad (2.22)$$

dla  $M > 1$

$$r_{1,2} = \frac{M\xi_0 \pm \sqrt{\xi_0^2 - \xi_2^2(M^2-1)}}{M^2-1}.$$

Wykonując retransformatę Fouriera dla (2.21) otrzymujemy

$$\bar{v}(\xi_0, x_1, x_2) \stackrel{def}{=} \frac{1}{4\pi k} \bar{f}(k^{-1}\xi_0) \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{v}(\xi_0, x_1, \xi_2) e^{i\xi_2 x_2} d\xi_2. \quad (2.23)$$

Wzór (2.22) zapisany explicite dla  $M < 1$  wyraża się formułą

$$\begin{aligned} \bar{v} = \frac{1}{4\pi k} \bar{f}(k^{-1}\xi_0) H(1-M) \\ \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{n=1}^2 H((-1)^n x_1) \frac{e^{-(r_n \cdot (x_1) \cdot (-1)^n - i\xi_2 x_2)}}{(1-M^2)\sqrt{\xi_0^2 + \xi_2^2(1-M^2)}} d\xi_2. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Całkując analogicznie po konturze zespolonym

$$\frac{\pm M\xi_0 x_1}{1-M^2} + \sqrt{\xi_0^2 + \xi_2^2(1-M^2)} \frac{|x_1|}{1-M^2} - i\xi_2 x_2 = \xi_0 \tau > 0$$

lub

$$\Gamma : \xi_2(\cdot\tau)\pm = \xi_0 \left( it_0 x_2 (1 - M^2) \pm \frac{|x_1|}{\sqrt{1 - M^2}} \sqrt{t_0^2 - r_1^2} \right) / r_1^2 \quad (2.25)$$

$$t_0 > r_1, \quad r_1^2 = x_1^2 + (1 - M^2)x_2^2,$$

otrzymujemy rozwiązanie  $v$  postaci:

$$v(x_0, x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi} \frac{|x_1| H(x_0 - \tau_0)}{r_1 \sqrt{1 - M^2}} \int_{\tau_0}^{x_0} f(x_0 - \tau) \frac{d\tau}{\sqrt{t_0^2 - r_1^2}}, \quad (2.26)$$

gdzie obecnie:

$$t_0 = \tau(1 - M^2) + Mx_1,$$

$$\tau_0 = \frac{r_1 - M|x_1| \operatorname{sgn} x_1}{1 - M^2}.$$

W tym przypadku efekt Dopplera nie występuje bezpośrednio. Zgodnie z zasadą Hadamarda w przestrzeniach o parzystym wymiarze emitowany sygnał jest samoistnie zniekształcony. Efekt ten jest dodatkowo zwielokrotniony wskutek ruchu źródła.

## Dyskusja i wnioski

Łatwo zauważyć, że dla  $M = 0 (\Rightarrow D = 0)$  otrzymujemy klasyczne rozwiązanie dla równań falowych. Z rozwiązania w  $\mathbb{R}^3$  wynika, że dla obserwatora znajdującego się na osi  $OX$  (kierunek ruchu) otrzymujemy rozwiązanie w postaci  $u(t, x, 0, 0) = \frac{1}{4\pi(x-Dt)} f\left(\frac{ct-x}{1\pm M}\right)$ , „+” dla  $x \in (Dt, ct)$  „-” dla  $x < Dt$  czyli przemiana częstotliwości jest analogiczna jak w  $\mathbb{R}^1$ . Analiza ilościowa i aplikacje rozwiązania przedstawione będą w dalszych publikacjach.

Artykuł wpłynął do redakcji w dniu 27.06.2008 r. Zweryfikowaną wersję po recenzji otrzymano we wrześniu 2008 r.

### LITERATURA

- [1] L. CAGNIARD, *Reflection and refraction of progressive seismic waves*, Mc Graw-Hill, New York, 1962.
- [2] L. A. T. DE HOOP, *A modification of Cagniard method for solving seismic pulse problems*, Appl. Sci Res., vol. B8 1960, 349–356.
- [3] A. T. DE HOOP, *Handbook of Radiation and Scattering of Waves, Acoustic Waves in Fluids, Elastic Waves in Solids, Elektromagnetic Waves*, Academic Press San Diego, 1995.



- 
- [4] L. D. G. DUFFY, *Transform Methods for Solving Partial Differential Equations*, CRC Press, Florida, 1994.
- [5] J. RAFA, C. ZIÓLKOWSKI, *Wpływ ruchu źródła fali elektromagnetycznej na parametry odbieranego sygnału*, XXXIII Ogólnopolska Konferencja Zastosowań Matematyki, Zakopane, 2004.
- [6] L. J. RAFA, J. GAWINECKI, *Rozwiązanie fundamentalne zagadnienia Cauchy dla hiperbolicznej termosprężystości*, XXXIV Ogólnopolska Konf. Zastosow. Matem., Zakopane, 2005.
- [7] J. RAFA, J. GAWINECKI, E. WŁODARCZYK,  $L^\infty - L^1$  time decay estimate of the solution of the Cauchy problem of the system equations describing monolocal model of heat propagation, *J. Tech. Phys.*, Vol. 35, No 4, 1994.
- [8] L. W. WEIZEL, *Fizyka teoretyczna*, PWN, Warszawa 1957.

J. RAFA

### Physical implication of the mathematical description of Doppler's effect

**Abstract.** In this paper we presented a solution for the equation modelling the Doppler's effect. The moving source generates the wave which is propagated in the time-space with a periodic signal. Using the Cagniard de-Hoop's method we constructed the solution of the above problem in the closed form.

**Keywords:** Doppler's effect, wave equation Cagniard de-Hoop's method fundamental solution

**2000 Mathematics Subject Classification:** (primary) 35L05 (secondary) 35E05

