BIULETYN WAT Vol. LVII, Nr 3, 2008



Wybrane aspekty odpowiedzi konstrukcji płytowych na obciążenia impulsowe

KATARZYNA KOWAL-MICHALSKA, RADOSŁAW MANIA, TADEUSZ NIEZGODZIŃSKI*

Politechnika Łódzka, Katedra Wytrzymałości Materiałów i Konstrukcji, *Katedra Dynamiki Maszyn, 90-924 Łódź, ul. B. Stefanowskiego 1/15

Streszczenie. Problem dynamicznej utraty stateczności czy też dynamicznego wyboczenia konstrukcji cienkościennych (prętów, powłok i płyt) był przedmiotem licznych studiów, mimo to wydaje się, że analiza dynamicznej odpowiedzi konstrukcji, w tym szczególnie konstrukcji zbudowanych z cienkich płyt kompozytowych, jest nadal sprawą trudną i wymaga specjalnej uwagi przy interpretacji wyników.

W niniejszej pracy badano dynamiczne zachowanie się cienkich płyt kompozytowych i konstrukcji słupowych o przekroju zamkniętym zbudowanych z takich płyt, poddanych impulsom o skończonym czasie trwania. Analiza ta dotyczyła określenia wpływu: kształtu i czasu trwania impulsu obciążenia, zastosowanych kryteriów stateczności dynamicznej, imperfekcji geometrycznych ścian, wymiarów geometrycznych — grubości i szerokości ścian, parametrów związanych z charakterystykami materiałowymi (w zakresie sprężystym i plastycznym) oraz układu i orientacji warstw, na odpowiedź dynamiczną kompozytowych konstrukcji płytowych i ocenę wielkości ich dynamicznego obciążenia krytycznego i granicznego. Do obliczeń numerycznych zastosowana została metoda elementów skończonych (pakiet ANSYS).

Słowa kluczowe: stateczność dynamiczna, kompozyty, MES, konstrukcje płytowe **Symbole UKD:** 624.07

1. Wprowadzenie

Problem dynamicznej utraty stateczności czy też dynamicznego wyboczenia konstrukcji cienkościennych (prętów, powłok i płyt) był przedmiotem licznych studiów, mimo to, wydaje się, że analiza dynamicznej odpowiedzi konstrukcji, w tym szczególnie konstrukcji zbudowanych z cienkich płyt kompozytowych (wielowarstwowych), jest nadal sprawą trudną i wymaga specjalnej uwagi przy interpretacji wyników.

Należy zauważyć, że termin "stateczność dynamiczna" obejmuje szereg zjawisk fizycznych, często zasadniczo różnych, na przykład rezonans parametryczny czy też dynamiczne zachowanie się konstrukcji pod wpływem obciążeń zmiennych w czasie, działających w płaszczyźnie. W niniejszej pracy rozważane są obciążenia impulsowe o skończonym czasie trwania.

Wiadomo, iż przy krótkich czasach trwania impulsu konstrukcja może przenieść obciążenia dynamiczne znacznie przewyższające krytyczne obciążenie statyczne. Należy jednak pamiętać, że w przeciwieństwie do zjawiska statycznego w przypadku dynamicznego wyboczenia krytyczne obciążenie typu bifurkacyjnego nie istnieje. Dynamiczna utrata stateczności ma miejsce tylko wtedy, gdy konstrukcja posiada pewne imperfekcje wstępne. Wyboczenie dynamiczne może być rozpatrywane jako wzmocnienie imperfekcji, wstępnych przemieszczeń konstrukcji poprzez dynamiczne obciążenie w taki sposób, że poziom dynamicznej odpowiedzi staje się bardzo duży. Innym bardzo istotnym parametrem jest czas trwania i kształt impulsu. Zgodnie z literaturą [1, 7], czas trwania impulsu i jego amplituda decydują o tym czy zjawisko ma charakter uderzenia (należy uwzględnić wówczas procesy falowe i mechanizm przekazywania obciążenia), obciążeń dynamicznych czy też jest to po prostu obciążenie quasi-statyczne. Przyjmuje się, że zjawisko wyboczenia dynamicznego może wystąpić dla impulsów obciążenia o umiarkowanie dużych amplitudach i czasach trwania bliskich okresowi podstawowych drgań własnych konstrukcji. W analizie zagadnienia pomija się wtedy efekty tłumienia.

Problemem samym w sobie jest przyjęcie odpowiedniego kryterium pozwalającego na wyznaczenie krytycznego obciążenia dynamicznego. W konstrukcjach płytowych, które są przedmiotem tego opracowania, stan pokrytyczny jest stanem statecznym, dlatego też niektórzy autorzy (Simitses [1]) proponują nawet, aby w tym przypadku nie mówić o dynamicznej utracie stateczności, a raczej o dynamicznej odpowiedzi płyty na obciążenie impulsowe. Naturalne (dla inżyniera) dążenie do wyznaczenia granicznego (krytycznego bądź maksymalnego) dynamicznego obciążenia spowodowało, że w pracach dotyczących odpowiedzi płyt na obciążenie o charakterze impulsu stosowane jest wiele kryteriów stateczności dynamicznej, przy czym niektóre z nich są kryteriami związanymi z wyboczeniem dynamicznym, tzn. formułują warunki, w których określone obciążenie dynamiczne staje się obciążeniem krytycznym, inne zaś są kryteriami zniszczeniowymi, które podają jak określić maksymalne (graniczne) obciążenie dynamiczne.

W niniejszej pracy do zbadania dynamicznego zachowania się cienkich płyt kompozytowych i konstrukcji słupowych o przekroju zamkniętym, zbudowanych z takich płyt, zastosowana została metoda elementów skończonych (pakiet ANSYS). Przedmiotem pracy jest analiza wpływu następujących czynników:

kształtu i czasu trwania impulsu obciążenia,

- zastosowanych kryteriów stateczności dynamicznej,
- imperfekcji geometrycznych ścian,
- orientacji głównych kierunków ortotropii,
- parametrów związanych z charakterystykami materiałowymi (w zakresie sprężystym i plastycznym)

na odpowiedź dynamiczną kompozytowych konstrukcji płytowych i ocenę wielkości dynamicznego obciążenia krytycznego i dynamicznego obciążenia granicznego tych konstrukcji.

2. Przykłady impulsów obciążenia o skończonym czasie trwania

Czas trwania T_p impulsu obciążenia o amplitudzie σ_{dyn} jest przyjmowany, w rozważanych zagadnieniach dynamicznych, jako bliski okresowi podstawowych drgań giętnych konstrukcji T, najczęściej $T_p = T$ lub $T_p = 0.5 T$.



Rys. 1. Kształty rozważanych impulsów: półfala sinusoidy, prostokąt

W wielu pracach dotyczących stateczności dynamicznej wprowadza się za Budianskym i Hutchinsonem [2] pojęcie współczynnika dynamicznego obciążenia, $DLF = N^{dyn} / N_{kr}^{stat}$ (*Dynamic Load Factor*), definiowanego jako stosunek amplitudy dynamicznego obciążenia do statycznego obciążenia bifurkacyjnego. Współczynnik ten określa zdolność danej konstrukcji, przy założonym kształcie i czasie trwania impulsu, do przenoszenia obciążeń dynamicznych.

3. Zastosowane kryteria stateczności dynamicznej

Kryterium stateczności dynamicznej sformułowane przez Budiansky'ego-Hutchinsona [2, 3], zostało wyprowadzone dla konstrukcji, w których przy obciążeniach statycznych zachodzi "gwałtowna" utrata stateczności (punkt graniczny lub bifurkacja z niestateczną ścieżką pokrytyczną). Zgodnie z nim wielkość krytyczna obciążenia dynamicznego to ta amplituda impulsu, której niewielka zmiana powoduje nieograniczony wzrost ugięć konstrukcji. W konstrukcjach płytowych mamy do czynienia ze statecznym zachowaniem pokrytycznym, stąd dla płyt przyjmuje się jako wielkość krytyczną tę wartość amplitudy impulsu, dla której niewielka zmiana powoduje gwałtowny przyrosty ugięć. Kryterium to jest łatwe do zaadoptowania w obliczeniach numerycznych i szeroko stosowane.

Petry i Fahlbusch [4] zaproponowali kryterium bazujące na analizie stanu naprężenia, które stwierdza, że odpowiedź konstrukcji na obciążenia impulsowe jest dynamicznie stateczna do momentu, gdy naprężenie zredukowane jest mniejsze, a co najwyżej równe granicy plastyczności, w każdym punkcie konstrukcji, w każdej chwili. Kryterium to zostało podane dla konstrukcji izotropowych. Pewne wątpliwości może budzić przyjęte założenie, że własności materiału przy obciążeniu dynamicznym są takie same jak przy statycznym.

4. Rozważane konstrukcje płytowe

Rezultaty obliczeń numerycznych, które są przedmiotem dyskusji zostały otrzymane dla izotropowych i ortotropowych płyt swobodnie podpartych na wszystkich brzegach oraz słupów o obrysie prostokątnym o brzegach obciążonych swobodnie podpartych. Przyjęto, że wszystkie brzegi (płyty i słupa) pozostają proste i wzajemnie równoległe podczas obciążania. Rozważane konstrukcje poddane są impulsowemu obciążeniu opisanemu w punkcie 2.



Rys. 2. Geometria płyty a) i słupa b) oraz schemat obciążenia

Rozwiązania uzyskano na drodze numerycznej, za pomocą programu ANSYS, a szczegółowy opis postępowania został zamieszczony w pracach [5, 6].

Wyniki obliczeń przedstawione zostały w formie zależności pomiędzy maksymalnym ugięciem dynamicznym odniesionym do grubości płyty a stosunkiem amplitudy impulsu do statycznego obciążenia krytycznego dla konstrukcji idealnej. Należy wspomnieć, że relacje przedstawione w tej formie konstrukcji dla izotropowych nie zależą od rodzaju materiału, a jedynie od parametrów geometrycznych, ugięć wstępnych, warunków brzegowych i rodzaju impulsowego obciążenia.

5. Analiza wyników obliczeń

Jeśli rozważymy impulsy obciążenia o równym polu $\left(\int_{0}^{T_{p}} \sigma(t) dt = \text{const}\right)$, to

można stwierdzić (rys. 3), że dla impulsów o krótkim czasie trwania ugięcia są większe dla obciążeń prostokątnych, ale już dla czasów trwania równych okresowi drgań własnych większe ugięcia spowoduje impuls sinusoidalny. Na podstawie przedstawionych na rysunku 3 przebiegów wyraźnie widać, że charakter dynamicznej odpowiedzi płyty zależy silnie od czasu trwania impulsu T_p . Na osi rzędnych $\xi = \Delta w/h$.



Rys. 3. Wpływ kształtu impulsu o równym polu na dynamiczne ugięcia płyty stalowej (a/b = 1; b/h = 200) dla różnych czasów trwania impulsu

Wyrazisty wpływ ugięć wstępnych na dynamiczne zachowanie się płyty pod wpływem obciążeń impulsowych jest dobrze znany w literaturze przedmiotu [2, 7]. Porównanie pomiędzy statyczną odpowiedzią płyty (dla $\xi^* = 0,01$) a odpowiedzią dynamiczną dla amplitud początkowych bezwymiarowych ugięć $\xi^* = w_0/h$ zmieniających się od 0,005 do 0,05 pokazano na rysunku 4. Można zauważyć, że dla małych imperfekcji ($\xi^* \in < 0,005; 0,015 >$), krzywe opisujące ugięcia dynamiczne w funkcji narastającego obciążenia przecinają odpowiedź statyczną i w pewnym zakresie obciążeń ugięcia dynamiczne są niższe niż statyczne, dla tych samych obciążeń. Te wyniki zgadzają się z rezultatami podanymi przez Volmira [10]. Należy również zauważyć, że charakter krzywych zmienia się wraz ze wzrostem wartości amplitudy ugięcia wstępnego, a dynamiczne wyboczenie krytyczne zbliża się do wartości krytycznego obciążenia statycznego.



Rys. 4. Wpływ wielkości amplitudy ugięcia wstępnego na dynamiczną odpowiedź płyty

Dla konstrukcji wykonanych z materiałów ortotropowych, wielowarstwowych oprócz wyżej analizowanych parametrów, mających wpływ na dynamiczne zachowanie konstrukcji, dochodzi kolejny — sekwencja warstw oraz ich orientacja względem krawędzi płyty/ściany.

Dla płyty ortotropowej o zmiennym kącie θ ułożenia głównych kierunków ortotropii w stosunku do brzegów płyty (rys. 5) utrata stateczności dla kątów $\theta = 30 \div 45^{\circ}$ występuje przy małych wartościach *DLF*, a dla kąta $\theta = 0^{\circ}$ dopiero przy $N_{\rm dyn} = (2 \div 2, 1)N_{\rm kr}$. Fakt ten można wytłumaczyć w ten sposób, że w przypadku ułożenia głównych kierunków ortotropii pod kątem $\theta = 0^{\circ}$ do brzegów płyty zarówno sztywność, jak i siła krytyczna jest najmniejsza, zatem już przy niewielkich siłach — począwszy od siły dynamicznej równej statycznej sile krytycznej — płyta kwadratowa wyboczy się w dwie półfale, co w rezultacie powoduje mniejsze maksymalne ugięcie płyty. Dla kąta $\theta = 90^{\circ}$ płyta zachowuje się podobnie jak w przypadku izotropii.

Na kolejnym rysunku (rys. 6) pokazano wyniki dla słupa, którego ściany wykonane są z jednowarstwowego laminatu o stosunkowo dużym stopniu ortotropii $E_1/E_2 = 23.4$. Kąt laminacji zmieniano co 30° i wyznaczano charakterystykę ξ (*DLF*) w zakresie amplitud *DLF* \leq 2, gdyż dla wyższych wymuszeń występowały duże odkształcenia konstrukcji uniemożliwiające prowadzenie obliczeń. Jak wynika to z przebiegu odpowiedzi dynamicznych słupa dla różnych kątów laminacji, najniższe ugięcia ścian mają miejsce dla orientacji $\theta = 0^{\circ}$, zaś najwyższe dla kąta $\theta = 30^{\circ}$. Różnice pomiędzy odpowiedziami narastają wraz ze wzrostem amplitudy



Rys. 5. Maksymalne ugięcie płyty ortotropowej w funkcji obciążenia dynamicznego ($E_2/E_1 = 12$; $E_2/G = 11,66$; $v_{12} = 0,46$; $T_p = 106$ ms) [8]



Rys. 6. Maksymalne ugięcia ścian słupa w funkcji amplitudy impulsu

wymuszenia. Dla górnego zakresu wymuszeń i kątów laminacji $\theta \ge 60^{\circ}$ pojawiają się ponadto wyższe postacie wyboczenia w odpowiedzi słupa (dwie, trzy półfale). W przypadku słupów izotropowych efekty te miały miejsce dla znacznie wyższych amplitud wymuszenia.

Wyniki obliczeń przedstawione na rysunkach 3-6 powstały przy założeniu nieograniczonej sprężystości materiału.

Na rysunku 7 przedstawiono odpowiedzi dynamiczne dla płyty stalowej, obciążonej impulsem prostokątnym przy założeniu, że powyżej granicy plastyczności σ_0 charakterystyka materiałowa opisana jest równaniem Needlemana-Tvergaarda [9], w którym im większa wartość współczynnika "*n*", tym przebieg krzywej σ - ε bardziej płaski. Dla dużych wartości "*n*" ugięcia narastają gwałtownie prowadząc do zniszczenia.



Rys. 7. Wpływ charakterystyki materiałowej na odpowiedź dynamiczną płyty [8]

Przy analizie zachowania płyty bądź słupa, dla których przyjęto ortotropowy materiał ścian o charakterystyce biliniowej, ponownie powraca pytanie o wybór kryterium, na podstawie którego należy określać krytyczne obciążenie dynamiczne. Maksymalne wartości bezwymiarowego naprężenia efektywnego zostały wyznaczone dla płyty ortotropowej o ugięciach wstępnych $\xi^* = 0,05$ na podstawie kryterium Hilla [9]. Ich przebieg ilustruje współczynnik *S*_{ratio}, który zdefiniowany jest jako

iloraz bieżącego naprężenia efektywnego według hipotezy Hilla odniesionego do granicy plastyczności: $S_{ratio} = \frac{\sigma_{ef}}{\sigma_0}$ [11]. Jak widać z rysunku 8, wartość amplitudy

impulsu, dla której naprężenie efektywne w płycie osiąga granicę plastyczności w kierunku obciążenia, wynosi $N_{dyn} = 1.6N_{kr}$, podczas gdy wartość DLF_{kr} wyznaczona na podstawie kryterium Budiansky'ego-Hutchinsona jest bliska 1.

Dla słupa (rys. 9) przy zastosowaniu kryterium Budiansky'ego-Hutchinsona krytyczne obciążenie dynamiczne będzie bliskie $DLF_{kr} \approx 1,2$. Jednak wówczas



Rys. 8. Maksymalne ugięcia dynamiczne i bezwymiarowe naprężenia efektywne dla ortotropowej płyty obciążonej impulsem prostokątnym o czasie trwania $T_p = T$



Rys. 9. Maksymalne ugięcia ścian ortotropowego słupa w funkcji amplitudy impulsu

naprężenie efektywne jest dużo niższe od granicy plastyczności, która osiągnięta zostaje w ścianach słupa przy amplitudzie $DLF_{kr} \approx 2,05$.

Dla obciążenia krytycznego określonego na bazie kryterium Budiansky'ego--Hutchinsona konstrukcja ma — z punktu widzenia stanu naprężenia — duży zapas nośności. Dla drugiego podejścia, zgodnego z kryterium Petry'ego-Fahlbuscha, dynamiczne obciążenie krytyczne jest bez mała dwukrotnie większe. Gwałtowny skok obydwu linii na rysunku 9 związany jest z uplastycznieniem dużych obszarów ścian słupa (zniszczenie konstrukcji).

Wpływ granicy plastyczności na odpowiedź dynamiczną słupa jest wyraźnie widoczny w przypadku słupów, których ściany wykonane są z materiałów ortotropowych. Moduł Younga E_1 odpowiadał kierunkowi głównemu materiału, ułożonemu równolegle do kierunku ściskania. Wartości modułów stycznych przyjmowano równe 1/100 odpowiednich modułów Younga w kierunkach głównych. Słup miał geometrię sześcianu z jednakową grubością ścian. Przedstawiony na rysunku 10 przypadek malejącego stopnia ortotropii $E_1/E_2 < 1$, wiąże się z obniżaniem sztywności ścian słupa w kierunku poprzecznym do kierunku działającego prostokątnego impulsu dynamicznego. Powoduje to wyraźny wzrost ugięć ścian w stosunku do materiału izotropowego ($E_1/E_2 = 1$) oraz gwałtowny przyrost odkształcenia po przekroczeniu granicy plastyczności. Ma to miejsce dla względnie małych amplitud wymuszenia dynamicznego ($DLF < 1,5\div2,0$). Dość wyraźne są także różnice w kształcie krzywych dla poszczególnych stopni ortotropii, zarówno wzajemnie jak i wobec linii dla $E_1/E_2 = 1$.

Wiadomo że w zakresie sprężystym odpowiedź dynamiczna płyty nie zależy od stosunku szerokości do grubości *b/h*, jeżeli jednak w obliczeniach uwzględni się



Rys. 10. Maksymalne ugięcia ścian słupa w funkcji amplitudy impulsu

pełną charakterystykę materiałową, to przebiegi ugięcia maksymalnego w funkcji obciążenia dynamicznego wskazują, że im płyta cieńsza, tym wyższa wartość obciążenia odpowiadającego gwałtownemu narastaniu ugięć (rys. 11).



Rys. 11. Wpływ stosunku b/h płyty na odpowiedź dynamiczną płyty (zakres sprężysto-plastyczny) [8]

6. Wnioski

Przedstawione wybrane wyniki analiz płyt i słupów o prostokątnych przekrojach zamkniętych, pokazują bardzo szeroki i złożony zakres parametrów mających wpływ na dynamiczne zachowanie konstrukcji tego typu. Potwierdzona została wrażliwość płyt i słupów na obecność imperfekcji wstępnej oraz na kształt i charakter impulsu dynamicznego. Wydaje się, że konieczne jest prowadzenie obliczeń w pełnym zakresie obciążenia, tzn. powyżej granicy plastyczności. Wiąże się to z wyborem schematyzacji charakterystyki materiałowej, jak również jej przebiegiem w zależności od prędkości narastania obciążenia. Połączenie jednak w analizie powyższych parametrów oraz typowych dla kompozytów sekwencji warstw, ich orientacji oraz zagadnień stanu naprężenia sprawia, że inżynierskie przewidywanie zachowania konstrukcji na wymuszenie dynamiczne nie jest możliwe. Konieczna jest wieloparametrowa analiza konstrukcji przy zastosowaniu różnych narzędzi obliczeniowych, często w połączeniu ze starannie przygotowanym eksperymentem. Wydaje się jednak, iż wobec dość skomplikowanej geometrycznie odpowiedzi dynamicznej rozważanych konstrukcji rozwiązanie analityczne, oczywiście z numerycznym całkowaniem równań równowagi dynamicznej, daje dość ograniczoną ilość informacji. Pełna wieloparametrowa analiza zagadnienia możliwa jest jedynie przy wykorzystaniu metody elementów skończonych.

Artykuł wpłynął do redakcji 25.03.2008 r. Zweryfikowaną wersję po recenzji otrzymano w czerwcu 2008 r.

LITERATURA

- G. J. SIMITSES, Instability of dynamically-loaded structures, Appl. Mech. Rev., 40, 10, 1987, 1403-1407.
- [2] B. BUDIANSKY, J. W. HUTCHINSON, *Dynamic buckling of imperfection-sensitive structures*, Proc. Of the Eleventh Int. Congress of App. Mech., Goetler H. (ed.), Munich, 1966, 636-651.
- [3] J. W. HUTCHINSON, B. BUDIANSKY, Dynamic buckling estimates, AIAA Journal, 4-3, 1966, 525-530.
- [4] D. PETRY, G. FAHLBUSCH, *Dynamic buckling of thin isotropic plates subjected to in-plane impact*, Thin-Walled Structures, 38, 2000, 267-283.
- [5] K. KOWAL-MICHALSKA, R. MANIA, Wielokryterialna ocena stateczności dynamicznej płyt prostokątnych, VIII Konf. Naukowo-Techniczna Programy MES w komputerowym wspomaganiu analizy, projektowania i wytwarzania, Rynia, 2003.
- [6] R. MANIA, K. KOWAL-MICHALSKA, Parametryczna analiza stateczności dynamicznej konstrukcji cienkościennych metodą elementów skończonych, Analizy numeryczne wybranych zagadnień mechaniki, red. T. Niezgoda, Red. Wyd. WAT, Warszawa, 2007, 229-245.
- K. KOWAL-MICHALSKA (red.), Stateczność dynamiczna kompozytowych konstrukcji płytowych, PŁ/WNT, Łódź–Warszawa, 2007.
- [8] L. CZECHOWSKI, Stateczność dynamiczna w zakresie sprężysto-plastycznym kompozytowych płyt poddanych złożonemu obciążeniu, praca doktorska, Politechnika Łódzka, Łódź, 2007.
- [9] Z. KOŁAKOWSKI, K. KOWAL-MICHALSKA (red.), Selected problems of instabilities in composite structures, A Series of Monographs, Technical University of Lodz, 1999.
- [10] S. A. VOLMIR, Nieliniowa dynamika płyt i powłok, (rosyjski) Nauka, Moskwa, 1969.
- [11] User's Guide ANSYS 10, Ansys Inc., Houston, 2006.

K. KOWAL-MICHALSKA, R. MANIA, T. NIEZGODZIŃSKI

Some aspects of plated structures response to pulse loading

Abstract. The dynamic stability problem or dynamic buckling of thin-walled structures (rods, shells and plates) was a subject of many studies, although it seems that the analysis of dynamic response of plated structures — especially thin-walled composite structures is a difficult matter and special care in results interpretation is needed.

In the paper, the dynamic behaviour of thin-walled composite (multi-layered) plates and columns of closed cross-section built of such plates was considered where the pulse loading was of finite duration. The analysis concerns the determination of influence of: shape and duration of pulse loading, applied dynamic stability criteria, initial imperfections, geometry — walls dimensions, material parameters

(in elastic and plastic ranges) and layers lay-up on dynamic response of composite plated structures and their dynamic critical load and carrying capacity. In numerical calculations, the Finite Element Method was applied (software package ANSYS).

Keywords: dynamic stability, composites, FEM, plated structures

Universal Decimal Classification: 624.07