Biuletyn WAT
Vol. LVII, Nr 3, 2008

Analityczny model szacowania maksymalnych promieni plastycznie odkształconego krateru i otaczającej go warstwy tarczy

EDWARD WŁODARCZYK

Wojskowa Akademia Techniczna, Wydział Mechatroniki,
00-908 Warszawa, ul. S. Kaliskiego 2

Streszczenie. W zamkniętej analitycznej postaci rozwiązano problem ekspansji kulistej kawerny (pustki) w sprężysto-idealnie plastycznym ośrodku. Ekspansję spowodowano skokowym radialnym napędzeniem powierzchni kawerny do początkowej prędkości υ_0. Wyprowadzono zamknięte analityczne wzory, określające stan naprężenia i odkształcenia w ośrodku otaczającym pustkę. Określono maksymalne promienie plastycznie odkształconej kawerny i otaczającej ją warstwy ośrodka. Zamieszczone w pracy rozwiązanie można wykorzystać do szacowania średnicy kraterów wytworzonych w metalowych tarczach podczas wnikania w nie pocisków broni strzeleckiej. Sposób wykorzystania wyprowadzonych w niniejszej pracy wzorów do opisu geometrii kraterów podamy w oddzielnym opracowaniu.
Słowa kluczowe: Jednowymiarowe dynamiczne zagadnienia graniczne, ośrodek sprężysto-idealnie plastyczny, symetria kulista, wymuszenie kinematyczne
Symbole UKD: 623.4

1. Wprowadzenie

Proces wnikania pocisku broni strzeleckiej w tarczę charakteryzuje się złożonymi zjawiskami [1, 2]. Dla dokładnego opisu tego zagadnienia początkowo-brzegowego (jeśli znane są dynamiczne właściwości mechaniczne oddziałujących ze sobą ciał, tj. pocisku i tarczy) używa się skomplikowanego układu nieliniowych równań różniczkowych z pochodnymi cząstkowymi poszukiwanych funkcji, które rozwiązuje się numerycznie za pomocą szybkich komputerów [1-4]. Programy numeryczne stosowane do rozwiązywania tych równań są kosztowne i często wymagają długiego czasu do ich realizacji.

Z tej przyczyny proste inżynierskie teorie wnikania pocisku w różne przegrody mają istotne znaczenie praktyczne. Takie modele często umożliwiają badaczom wgląd we wzajemne oddziaływania fizycznych parametrów analizowanych ośrodków i ich stosunek do wyniku przypadkowego. Te wzajemne oddziaływania są trudne do ustalenia za pomocą złożonych wydruków komputerowych. Ponadto proste inżynierskie teorie często dostarczają podstawy do projektowania eksperymentów i interpretacji fizycznej ich wyników. Do tego rodzaju teorii można zaliczyć uproszczony model wnikania pocisku w metalową tarczę [5-7] oraz analityczny model pulsującej jamy postrzałowej [8, 9].

Jednym z głównych problemów badanych w balistyce końcowej pocisków jest końcowa geometria kraterów. W literaturze podawane są wzory empiryczne określające objętość, średni promień i głębokość krateru [6, 10, 11]. Brak jest natomiast danych określających wielkość obszaru tarczy odkształconego plastycznie wokół krateru.

Jak się okazuje, dynamikę i geometrię krateru oraz dynamiczny stan naprężenia i odkształcenia w materiale tarczy podczas wnikania w nią pocisku można analitycznie określić za pomocą podobnego modelu, jaki zastosowano do analizy pulsacyjnej jamy postrzałowej [8, 9]. Zatem jako pierwsze w kolejności w niniejszej pracy rozpatrzymy zagadnienie ekspansji kulistej kawerny w izotropowym sprężysto-idealnie plastycznym ośrodku, wywołanej skokowym radialnym napędzeniem jej powierzchni do początkowej prędkości v_0. Następnie w oparciu o to rozwiązanie oszacujemy średni promień krateru i plastycznie odkształconego obszaru tarczy metalowej. Określimy również prędkość propagacji fali plastycznej w tarczy.

Przyjmiemy, że pocisk wnikający w tarczę ma kulisty wierzchołek. Czas wnikania wierzchołka pocisku broni strzeleckiej jest rzędu kilku mikrosekund. Natomiast całkowity proces penetracji pocisku w tarczę trwa kilkadziesiąt milisekund. Zatem można założyć, że kulista część powierzchni kawerny jest napędzana w sposób skokowy do początkowej prędkości v_0 równej prędkości uderzenia pocisku w tarczę.

2. Sformułowanie problemu

Zbadamy dynamikę kulistej kawerny (pustki) w izotropowym ośrodku sprężysto-idealnie plastycznym oraz dynamiczny stan naprężenia i odkształcenia w tym ośrodku. Ruch ośrodka spowodowano w sposób kinematyczny przez skokowe napędzenie powierzchni kawerny do początkowej prędkości v_0.

Przy rozwiązywaniu tego zagadnienia posłużymy się układem współrzędnych sferycznych r, φ, θ. Ze względu na kulistą symetrię problemu, kierunki styczne φ i θ są równoważne. Radialny początkowy ruch powierzchni pustki i izotropowość ośrodka powodują, że problem jest przestrzennie jednowymiarowy i niezależny od zmiennych φ i θ.

Stany naprężenia i odkształcenia w ośrodku otaczającym pustkę reprezentowane są przez następujące składowe: σ_r — naprężenie promieniowe (radialne), $\sigma_\varphi = \sigma_\theta$ — naprężenia styczne (obwodowe), ε_r — odkształcenie promieniowe (radialne), $\varepsilon_\varphi = \varepsilon_\theta$ — odkształcenia styczne (obwodowe).

Pozostałe składowe tensorów naprężenia i odkształcenia w tym układzie współrzędnych są równe zeru.

Problem rozwiązujemy w zakresie małych odkształceń, zatem zgodnie z liniową teorią sprężystości mamy [12]:

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r}, \qquad \varepsilon_r = \varepsilon_\theta = \frac{u}{r}, \tag{2.1}$$

$$\sigma_r - \sigma_\varphi = 2\mu\left(\varepsilon_r - \varepsilon_\varphi\right) = 2\mu\left(\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r}\right), \tag{2.2}$$

$$\mu = \frac{E}{2\left(1+\nu\right)}, \tag{2.3}$$

gdzie u jest radialnym przemieszczeniem elementu ośrodka, a r oznacza współrzędną Lagrange'a. Symbole E i μ oznaczają odpowiednio moduły Younga i Kirchhoffa, natomiast ν jest liczbą Poissona.

Z prawa zachowania masy elementu ośrodka w opisie Lagrange'a dla symetrii kulistej otrzymuje się:

$$\left(r+u\right)^2 \frac{\partial}{\partial r}\left(r+u\right) = \frac{\rho_0}{\rho} r^2, \tag{2.4}$$

gdzie symbole ρ_0 i ρ oznaczają gęstości: początkową i aktualną ośrodka.

Równanie ruchu ośrodka w rozpatrywanym problemie ma postać:

$$\left(r+u\right)^2 \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + 2\left(\sigma_r - \sigma_\varphi\right)\,\left(r+u\right)\frac{\partial}{\partial r}\left(r+u\right) = \rho_0\, r^2\, \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \tag{2.5}$$

Równania (2.4) i (2.5) dla małych odkształceń, przy zaniedbaniu zmian gęstości ośrodka ($\rho \approx \rho_0$) i pominięciu małych wyższego rzędu, można zredukować do postaci:

$$\frac{\partial u}{\partial r} + 2\frac{u}{r} = 0, \tag{2.6}$$

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + 2\frac{\sigma_r - \sigma_\varphi}{r} = \rho_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \tag{2.7}$$

Zmiany gęstości ośrodka w zakresie obciążeń występujących w balistyce końcowej pocisków strzeleckich są rzędu ułamka procenta i można je zaniedbać [13].

Układ równań (2.6) i (2.7) rozwiążemy dla następujących warunków granicznych:

— warunki brzegowe:

$$\sigma_r(r_0,t)\equiv 0 \quad \text{dla} \quad r=r_0, \tag{2.8}$$

$$\sigma_r(\infty,t)\equiv 0 \quad \text{dla} \quad r=\infty, \tag{2.9}$$

— warunki początkowe:

$$u(r_0,0)=0 \quad \text{dla} \quad r=r_0 \quad \text{i} \quad t=0, \tag{2.10}$$

$$v(r_0,\ 0)=\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=v_0 \quad \text{dla} \quad r=r_0 \quad \text{i} \quad t=0, \tag{2.11}$$

gdzie r_0 jest początkowym promieniem kulistej kawerny.

Dla określenia plastycznego stanu odkształcenia ośrodka będziemy stosować warunek Hubera-Misesa-Hencky (HMH), który w rozpatrywanym przypadku ma postać [14]:

$$\sigma_\varphi-\sigma_r=\sigma_0, \tag{2.12}$$

gdzie σ_0 oznacza wartość dynamicznej granicy plastyczności ośrodka uzyskaną z próby rozciągania.

Tym samym problem został sformułowany. Jako pierwsze w kolejności rozwiążemy zagadnienie dynamiki pustki kulistej w ośrodku sprężystym.

3. Konstrukcja rozwiązania problemu w zakresie odkształceń sprężystych

Całka ogólna równania (2.6) ma postać:

$$u_s(r,t)=\frac{C_s(t)}{r^2}, \tag{3.1}$$

gdzie $C_s(t)$ jest dowolną, dwa razy różniczkowalną funkcją czasu. Indeksem dolnym s będziemy oznaczać wielkości w obszarze odkształceń sprężystych.

Oznaczymy przez $R_s(t)$ bieżący promień powierzchni kawerny — współrzędna Eulera. Ponieważ $R_s(t) = r_0 + u_s(r_0, t)$, to funkcję $C_s(t)$ można wyrazić przez współrzędną Eulera $R_s(t)$ w następującej postaci:

$$C_s(t) = r_0^2 \left[R_s(t) - r_0 \right]. \tag{3.2}$$

Jak się okazuje, za pomocą funkcji $R_s(t)$ i jej pochodnych można określić wszystkie parametry problemu, a mianowicie:

$$u_s(r,t) = \left[R_s(t) - r_0 \right] \left(\frac{r_0}{r} \right)^2 = r_0 \left[\frac{R_s(t)}{r_0} - 1 \right] \left(\frac{r_0}{r} \right)^2, \tag{3.3}$$

$$\varepsilon_{\varphi s}(r,t) = \frac{u_s(r,t)}{r} = \left[\frac{R_s(t)}{r_0} - 1 \right] \left(\frac{r_0}{r} \right)^3 \tag{3.4}$$

$$\varepsilon_{r s}(r,t) = \frac{\partial u_s(r,t)}{\partial r} = -2 \left[\frac{R_s(t)}{r_0} - 1 \right] \left(\frac{r_0}{r} \right)^3 = -2\varepsilon_{\varphi s}(r,t), \tag{3.5}$$

$$\sigma_{\varphi s}(r,t) - \sigma_{r s}(r,t) = \frac{3}{1+\nu} \left[\frac{R_s(t)}{r_0} - 1 \right] \left(\frac{r_0}{r} \right)^3 E, \tag{3.6}$$

$$v_s(r,t) = \frac{\partial u_s(r,t)}{\partial t} = \dot{R}_s(t) \left(\frac{r_0}{r} \right)^2, \qquad \dot{R}_s(t) = \frac{d\, R_s(t)}{d\, t}, \tag{3.7}$$

$$\frac{\partial^2 u_s(r,t)}{\partial t^2} = \ddot{R}_s(t) \left(\frac{r_0}{r} \right)^2, \qquad \ddot{R}_s(t) = \frac{d^2 R_s(t)}{d\, t^2}. \tag{3.8}$$

Po podstawieniu wyrażeń (3.6) i (3.8) do równania (2.7) i scałkowaniu względem zmiennej r oraz uwzględnieniu warunku brzegowego (2.9) otrzymuje się:

$$\sigma_{r s}(r,t) = -\frac{2}{1+\nu} \left[\frac{R_s(t)}{r_0} - 1 \right] \left(\frac{r_0}{r} \right)^3 E - r_0 \rho_0 \ddot{R}_s(t) \frac{r_0}{r}. \tag{3.9}$$

Z kolei, zgodnie z warunkiem brzegowym (2.8) i relacją (3.9) funkcja $R_s(t)$ musi spełniać równanie:

$$\left(1+\nu\right) r_0 \frac{\rho_0}{E} \ddot{R}_s\left(t\right)+\frac{2}{r_0}\left[R_s\left(t\right)-r_0\right]=0 \tag{3.10}$$

lub

$$\ddot{u}_{0s}\left(t\right)+\omega_0^2 u_{0s}\left(t\right)=0, \tag{3.11}$$

gdzie

$$u_{0s}\left(t\right)=R_s\left(t\right)-r_0, \quad u_{0s}\left(0\right)=R_s\left(0\right)-r_0=0, \quad \dot{u}_{0s}\left(t\right)\Big|_{t=0}=\dot{R}_s\left(t\right)\Big|_{t=0}=\upsilon_0 \tag{3.12}$$

$$\omega_0^2=\frac{2}{1+\nu}\frac{E}{r_0^2\rho_0}=\frac{2}{1+\nu}\left(\frac{c_0}{r_0}\right)^2, \qquad c_0=\sqrt{\frac{E}{\rho_0}}. \tag{3.13}$$

Rozwiązanie równania (3.11) spełniające warunki początkowe $(3.12)_2$ i $(3.12)_3$ ma postać:

$$u_{0s}\left(t\right)=\frac{\upsilon_0}{\omega_0}\sin\omega_0 t, \tag{3.14}$$

a zgodnie z $(3.12)_1$ mamy:

$$R_s\left(t\right)=r_0+\frac{\upsilon_0}{\omega_0}\sin\omega_0 t. \tag{3.15}$$

Jak widać, powierzchnia kawerny, po nagłym napędzeniu jej do prędkości początkowej υ_0 w ośrodku liniowo-sprężystym drga harmonicznie wokół położenia początkowego r_0 z częstością ω_0 i amplitudą υ_0/ω_0.

Z postaci funkcji $R_s(t)$ (3.15) wynika ograniczenie na początkową prędkość powierzchni kawerny, a mianowicie:

$$\upsilon_0 \le r_0\omega_0=\sqrt{\frac{2}{1+\nu}\frac{E}{\rho_0}}. \tag{3.16}$$

Dla $\upsilon_0=\sqrt{2E/\rho_0\left(1+\nu\right)}$ przy ruchu wstecznym powierzchni kawerny następuje całkowita redukcja jej objętości.

Z wzorów (3.9), (3.10) i (3.15), po przekształceniach otrzymuje się:

$$\sigma_{rs}(r,t)=\frac{2E}{1+\nu}\left[\frac{r_0}{r}-\left(\frac{r_0}{r}\right)^3\right]\left[\frac{R_s(t)}{r_0}-1\right]=\frac{2E}{1+\nu}\frac{v_0}{r_0\omega_0}\left[\frac{r_0}{r}-\left(\frac{r_0}{r}\right)^3\right]\sin\omega_0 t. \quad (3.17)$$

Następnie z zależności (3.6) i (3.17) mamy:

$$\sigma_{\varphi s}(r,t)=\frac{E}{1+\nu}\left[2\frac{r_0}{r}+\left(\frac{r_0}{r}\right)^3\right]\left[\frac{R_s(t)}{r_0}-1\right]=\frac{E}{1+\nu}\frac{v_0}{r_0\omega_0}\left[2\frac{r_0}{r}+\left(\frac{r_0}{r}\right)^3\right]\sin\omega_0 t, \quad (3.18)$$

$$\sigma_{\varphi s}(r,t)-\sigma_{rs}(r,t)=\frac{3E}{1+\nu}\left(\frac{r_0}{r}\right)^3\left[\frac{R_s(t)}{r_0}-1\right]=\frac{3E}{1+\nu}\frac{v_0}{r_0\omega_0}\left(\frac{r_0}{r}\right)^3\sin\omega_0 t. \quad (3.19)$$

Z analizy wzoru (3.19) i warunku (2.12) bezpośrednio wynika, że w ośrodku nie występują odkształcenia plastyczne, jeśli spełniona jest następująca relacja:

$$\frac{3E}{1+\nu}\frac{v_0}{r_0\omega_0}=\frac{3E}{\sqrt{2(1+\nu)}}\frac{v_0}{c_0}<\sigma_0 \qquad v_0\le\frac{\sqrt{2(1+\nu)}}{3}\frac{\sigma_0}{E}c_0. \quad (3.20)$$

Na przykład dla tarczy stalowej $(\sigma_0\approx 3\ \text{GPa},\quad E\approx 200\ \text{GPa},\quad c_0\approx 5000\ \text{m/s},\ \nu\approx 0{,}3)$ z zależności (3.20) otrzymuje się v_0 < 40 m/s. Oznacza to, że w procesie wnikania pocisków broni strzeleckiej ($v_0 \approx 300 \div 1000$ m/s) w metalowe tarcze w otoczeniu kraterów powstają zawsze obszary odkształceń plastycznych.

Obecnie przejdziemy do konstrukcji rozwiązania problemu w obszarze odkształceń plastycznych.

4. Rozwiązanie problemu w obszarze odkształceń plastycznych

Z wyrażenia (3.19) i warunku HMH (2.12) otrzymuje się na płaszczyźnie (r, t) równanie fali plastycznej w postaci:

$$r_p(t)=r_0\sqrt[3]{b}\ \sqrt[3]{\sin\omega_0 t},\qquad \mathrm{b}=\frac{3}{\sqrt{2(1+\nu)}}\frac{E}{\sigma_0}\frac{v_0}{c_0}, \quad (4.1)$$

która propaguje się z prędkością

$$V_p(t)=c_0\frac{1}{3}\sqrt{\frac{2}{1+\nu}}\;\sqrt[3]{b}\;\frac{\cos\omega_0 t}{\sqrt[3]{\left(\sin\omega_0 t\right)^2}}. \tag{4.2}$$

Jak wynika z (4.1), maksymalny promień obszaru odkształceń plastycznych tarczy jest równy:

$$r_{p\max}=r_0\sqrt[3]{b}=r_0\sqrt[3]{\frac{3}{\sqrt{2(1+\nu)}}\frac{E}{\sigma_0}\frac{v_0}{c_0}}, \tag{4.3}$$

i osiągany jest po upływie czasu $t=\pi/2\omega_0$.

Równania (2.6) i (2.7) obowiązują również w obszarze odkształceń plastycznych. Całka ogólna równania (2.6) ma obecnie postać:

$$u_p(r,t)=\left[R_p(t)-r_0\right]\left(\frac{r_0}{r}\right)^2. \tag{4.4}$$

Z równania ruchu (2.7), po wykorzystaniu warunku plastyczności (2.12) i wyrażenia (4.4) oraz scałkowaniu względem zmiennej *r* z uwzględnieniem warunku brzegowego (2.8), otrzymuje się:

$$\sigma_{r\,p}(r,t)=2\sigma_0\ln\frac{r}{r_0}+\rho_0 r_0\left(1-\frac{r_0}{r}\right)\ddot{R}_p(t). \tag{4.5}$$

Na granicy kontaktu obszarów odkształceń plastycznych i sprężystych ma miejsce ciągłość naprężeń radialnych, tj.:

$$\sigma_{r\,p}\left(r_p,t\right)\equiv\sigma_{r\,s}\left(r_p,t\right). \tag{4.6}$$

Z wyrażeń (3.17) i (4.5) oraz warunku ciągłości naprężeń radialnych (4.6) mamy:

$$\ddot{R}_p(t)=-2\frac{\sigma_0}{\rho_0}\frac{r_p}{r_0}\frac{\ln\left(r_p/r_0\right)}{r_p-r_0}+\sqrt{\frac{2}{1+\nu}}\frac{E}{\rho_0}\frac{v_0}{c_0}\frac{r_p}{\left(r_p-r_0\right)r_0}\left[\frac{r_0}{r_p}-\left(\frac{r_0}{r_p}\right)^3\right]\sin\omega_0 t. \tag{4.7}$$

Po podstawieniu pochodnej $\ddot{R}_p(t)$ do wzoru (4.5) i prostych przekształceniach, otrzymuje się analityczne zamknięte wyrażenie na radialne naprężenie w obszarze odkształceń plastycznych, a mianowicie:

$$\sigma_{rp}\left(r,t\right)=2\sigma_0\left[\ln\frac{r}{r_0}-\frac{\ln r_p/r_0}{1-\left(r_0/r_p\right)}\left(1-\frac{r_0}{r}\right)+\sqrt{\frac{2}{1+\nu}}\frac{E}{\sigma_0}\frac{\upsilon_0}{c_0}\frac{r_0}{r_p}\left(1+\frac{r_0}{r_p}\right)\left(1-\frac{r_0}{r}\right)\sin\omega_0 t\right]. \quad (4.8)$$

Dalej z warunku HMH (2.12) i wyrażenia (4.8) wynika, że naprężenie obwodowe określone jest wzorem:

$$\begin{aligned}\sigma_{\varphi p}\left(r,t\right)=\sigma_0+\sigma_{rp}\left(r,t\right)=\sigma_0\Bigg\{1+2\Bigg[\ln\frac{r}{r_0}-\frac{\ln r_p/r_0}{1-\left(r_0/r_p\right)}\left(1-\frac{r_0}{r}\right)+\\ +\sqrt{\frac{2}{1+\nu}}\frac{E}{\sigma_0}\frac{\upsilon_0}{c_0}\frac{r_0}{r_p}\left(1+\frac{r_0}{r_p}\right)\left(1-\frac{r_0}{r}\right)\sin\omega_0 t\Bigg]\Bigg\}.\end{aligned} \quad (4.9)$$

W celu określenia pól przemieszczenia, prędkości masowej i odkształceń w otoczeniu kawerny, należy w pierwszej kolejności zidentyfikować funkcję $R_p(t)$.

Z analizy wyrażenia (3.19) i warunku (2.12) wynika, że stan odkształceń plastycznych w materiale wokół kawerny osiągany jest po upływie pewnego czasu t_p od chwili nagłego napędzenia jej powierzchni do prędkości υ_0.

Czas t_p można określić z wzoru:

$$t_p=\frac{1}{\omega_0}\arcsin\left(\frac{\sqrt{2\left(1+\nu\right)}}{3}\frac{\sigma_0}{E}\frac{c_0}{\upsilon_0}\right). \quad (4.10)$$

Promień kawerny osiąga w tym czasie, zgodnie z (3.15) wartość:

$$R_s\left(t_p\right)=\left(1+\frac{1+\nu}{3}\frac{\sigma_0}{E}\right)r_0, \quad (4.11)$$

a prędkość jej powierzchni wynosi:

$$\dot{R}_s\left(t_p\right)=\upsilon_0\cos\omega_0 t_p. \quad (4.12)$$

Jak się okazuje, dla tarcz metalowych czas t_p jest rzędu 10^{-2} μs, a promień $R_s\left(t_p\right)\approx r_0$. Na przykład dla tarczy stalowej mamy:

$$t_p\approx 6{,}5\cdot 10^{-8}s,\quad R_s\left(t_p\right)\approx 1{,}0065r_0 \;\text{ i }\; \dot{R}_s\left(t_p\right)\approx 0{,}9992\upsilon_0.$$

Mając na uwadze te wartości wymienionych wielkości, w dalszym ciągu rozważań przyjmujemy, że:

$$t_p \approx 0, \quad R_s\left(t_p\right) \approx r_0 \quad \text{i} \quad \dot{R}_s\left(t_p\right) \approx v_0.$$

Zatem funkcja $R_p(t)$ spełnia w przybliżeniu następujące warunki początkowe:

$$R_p\left(0\right) \approx r_0 \quad \text{i} \quad \dot{R}_p\left(t\right)\Big|_{t=0} \approx v_0. \tag{4.13}$$

Z równania (4.7), po kolejnych całkowaniach i wykorzystaniu warunków (4.13), otrzymuje się:

$$\begin{aligned}\dot{R}_p\left(t\right) = &-\sqrt{2\left(1+\nu\right)}\frac{\sigma_0}{\rho_0 c_0}\frac{\ln\left(r_p/r_0\right)}{\left(r_p-r_0\right)/r_p}\omega_0 t + \\ &+v_0\left[1+\frac{r_0}{r_p}\left(1+\frac{r_0}{r_p}\right)\right] - v_0\frac{r_0}{r_p}\left(1+\frac{r_0}{r_p}\right)\cos\omega_0 t,\end{aligned} \tag{4.14}$$

$$\begin{aligned}R_p\left(t\right) = &\left\{-\frac{1+\nu}{2}\frac{\sigma_0}{E}\frac{\ln\left(r_p/r_0\right)}{\left(r_p-r_0\right)/r_p}\left(\omega_0 t\right)^2 + \sqrt{\frac{1+\nu}{2}}\frac{v_0}{c_0}\left[1+\frac{r_0}{r_p}\left(1+\frac{r_0}{r_p}\right)\right]\omega_0 t - \right. \\ &\left. -\sqrt{\frac{1+\nu}{2}}\frac{v_0}{c_0}\frac{r_0}{r_p}\left(1+\frac{r_0}{r_p}\right)\sin\omega_0 t + 1\right\} r_0.\end{aligned} \tag{4.15}$$

Stan małych odkształceń plastycznych w otoczeniu kawerny zgodnie z wzorami (2.1), (4.4) i (4.15) można określić za pomocą następujących wyrażeń:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{r\,p}\left(r,t\right) = -2\varepsilon_{\varphi\,p}\left(r,t\right) = &\left\{\left(1+\nu\right)\frac{\sigma_0}{E}\frac{\ln\left(r_p/r_0\right)}{\left(r_p-r_0\right)/r_p}\left(\omega_0 t\right)^2 - \right. \\ &-\sqrt{2\left(1+\nu\right)}\frac{v_0}{c_0}\left[1+\frac{r_0}{r_p}\left(1+\frac{r_0}{r_p}\right)\right]\omega_0 t + \\ &\left. +\sqrt{2\left(1+\nu\right)}\frac{v_0}{c_0}\frac{r_0}{r_p}\left(1+\frac{r_0}{r_p}\right)\sin\omega_0 t\right\}\left(\frac{r_0}{r}\right)^3.\end{aligned} \tag{4.16}$$

Wyprowadzone wyżej zależności, określające stan ośrodka w otoczeniu kawerny, są słuszne w przedziale $r_0 \leq R_p\left(t\right) \leq R_{p\max}$. Maksymalną wartość promienia kawerny określamy za pomocą wzoru:

$$R_{p\max} = R_p\left(\eta_e\right) = \left\{ -\frac{1+\nu}{2}\frac{\sigma_0}{E}\frac{\ln\left(r_{p\max}/r_0\right)}{\left(r_{p\max}-r_0\right)/r_{p\max}}\eta_e^2 + \sqrt{\frac{1+\nu}{2}}\frac{v_0}{c_0}\left[1+\frac{r_0}{r_{p\max}}\left(1+\frac{r_0}{r_{p\max}}\right)\right]\eta_e - \right.$$
$$\left. -\sqrt{\frac{1+\nu}{2}}\frac{v_0}{c_0}\frac{r_0}{r_{p\max}}\left(1+\frac{r_0}{r_{p\max}}\right)\sin\eta_e + 1 \right\} r_0, \tag{4.17}$$

gdzie η_e jest pierwiastkiem rzeczywistym następującego równania:

$$-\sqrt{2\left(1+\nu\right)}\frac{\sigma_0}{\rho_0 c_0}\frac{\ln\left(r_{p\max}/r_0\right)}{\left(r_{p\max}-r_0\right)/r_{p\max}}\eta_e + v_0\left[1+\frac{r_0}{r_{p\max}}\left(1+\frac{r_0}{r_{p\max}}\right)\right] =$$
$$= v_0\frac{r_0}{r_{p\max}}\left(1+\frac{r_0}{r_{p\max}}\right)\cos\eta_e. \tag{4.18}$$

5. Przykład

Rozpatrzymy ekspansję kulistej kawerny (pustki) o początkowym promieniu r_0, której powierzchnię napędzono w sposób nagły (skokowo) do prędkości $v_0 = 500$ m/s w ośrodku sprężysto-idealnie plastycznym. Ośrodek charakteryzowany jest następującymi wartościami parametrów:

$$\rho_0 = 7800 \text{ kg/m}^3, \quad E = 200 \text{ GPa}, \quad c_0 = 5000 \text{ m/s},$$
$$\sigma_0 = 3 \text{ GPa}, \quad \nu = 0,3. \tag{5.1}$$

Dla danych (5.1) z wzoru (4.3) otrzymuje się:

$$r_{p\max} = \sqrt[3]{\frac{3\cdot 200}{3}\frac{500}{5000}\frac{1}{\sqrt{2,6}}} = 2,3\ r_0. \tag{5.2}$$

Po podstawieniu wartości parametrów (5.1) i wyniku (5.2) do równania (4.16) mamy:

$$-0,02874\eta_e + 0,1309 - 0,0503\cos\eta_e = 0. \tag{5.3}$$

Równanie przestępne (5.3) jest spełnione w przybliżeniu dla

$$\eta_e = 4,67. \tag{5.4}$$

Zatem maksymalny promień kawerny po plastycznym odkształceniu, zgodnie z (4.17) i (5.1)-(5.4), wynosi:

$$R_{p\max} = \left(-0,01437\eta_e^2 + 0,1309\eta_e - 0,0503\sin\eta_e + 1\right) r_0 = 1,348\ r_0. \quad (5.5)$$

Na rysunku 1 pokazany jest przekrój krateru w stalowej tarczy $\left(\sigma_0 \approx 3000\ \mathrm{MPa}\right)$ wraz z widokiem rdzenia pocisku o średnicy $d_0 = 2r_0 = 5,8$ mm. Prędkość uderzenia pocisku w tarczę $\upsilon_0 = 500$ m/s. Średnica wlotowa krateru położona za strefą wierzchnich odkształceń plastycznych tarczy (zdeterminowanych przez oddziaływanie fali naprężenia ze swobodną powierzchnią tarczy), wynosi ~8 mm. Z przedstawionego modelu analitycznego dla wymienionych danych liczbowych otrzymuje się $d_k = 2R_{p\max} = 1,348 \times 2r_0 = 1,348 \times 5,8 = 7,82$ mm.

Rys. 1. Przekrój krateru i widok pocisku

Jeśli znana jest prędkość penetracji pocisku wzdłuż krateru [5, 6, 11, 16], to za pomocą metody przedstawionej w pracach [8 i 9] można, wykorzystując prezentowany model, określić kształt całego krateru. Problemem tym zajmiemy się w oddzielnym opracowaniu.

6. Wnioski końcowe

Z analizy zamkniętego rozwiązania rozpatrywanego problemu można wyciągnąć następujące wnioski:

- Podczas wnikania pocisku broni strzeleckiej w metalową tarczę zawsze powstaje w niej obszar odkształceń plastycznych w bezpośrednim otoczeniu krateru. W pracy określono maksymalne promienie tego obszaru i odkształconej plastycznie kawerny.

- Stan odkształcenia i naprężenia w tarczy zdeterminowany jest fizycznymi parametrami jej materiału $(\rho_0, E, \sigma_0, \nu)$ i początkową prędkością uderzenia pocisku w tarczę v_0.
- Przedstawiony w pracy uproszczony model ekspansji kulistej kawerny można wykorzystać do przybliżonego oszacowania wlotowej średnicy krateru oraz średnicy plastycznie odkształconego obszaru tarczy otaczającego krater.

Artykuł wpłynął do redakcji 26.05.2008 r. Zweryfikowaną wersję po recenzji otrzymano w czerwcu 2008 r.

LITERATURA

[1] M. E. Backman, W. Goldsmith, *The mechanics of penetration of projectiles into targets*, Int. J. Engng. Sci., 16, 1, 1978, 1-99.

[2] W. Goldsmith, *Review. Non-ideal projectile impact on targets*, Int. J. Impact Engng., 22, 23, 1999, 95-395.

[3] A. Ya. Sagomonyan, *Penetration*, M.Y., Moscow, 1974 (in Russian).

[4] K. Jach et al., *Computer modeling dynamical interactions of bodies by means of free points*, PWN, Warsaw, 2001 (in Polish).

[5] A. Tate, *A theory for the deceleration of long rods after impact*, J. Mech. Phys. Solids, 15, 6, 1967, 387-399.

[6] A. Tate, *Further results in the theory of long rod penetration*, J. Mech. Phys. Solids, 17, 2, 1969, 141-150.

[7] V. P. Alekseevskii, *Penetration of a rod into a target at high velocity*, Combust. Expansion. Shock Waves, 2, 1966, 63-66.

[8] E. Włodarczyk, M. Maruszyński, *Mathematical model of the temporary pulsating gunshot cavity*, J. Tech. Phys., 45, 4, 2004, 275-288.

[9] E. Włodarczyk, M. Maruszyński, *Analytical model of the shape of the temporary gunshot cavity*, J. Tech. Phys., 45, 4, 2004, 289-299.

[10] R. Kinslow, *High-velocity impact phenomena*, New York and London: Academic Press, 1970.

[11] W. A. Allen, J. W. Rogers, *Penetration of rod into a semi-infinite target*, J. Franklin Inst., 272, 1961, 275-284.

[12] W. Nowacki, *Theory of elasticity,* PWN, Warsaw, 1970 (in Polish).

[13] E. Włodarczyk, M. Zielenkiewicz, *Influence of elastic material compressibility on parameters pf expanding spherical stress wave*, I. Analytical solution of the problem, JTAM, 46, 1, 2008, 21-40.

[14] W. Olszak, et. al., *Theory of plasticity*, PWN, Warsaw, 1965 (in Polish).

[15] E. Włodarczyk, *Normal penetration of the rigid penetrator into ductile half space with viscosity*, Engineering Transactions, 55, 4, 2007, 335-344.

E. WŁODARCZYK

Analytical model of maximal radii estimation of plasticly deformed crater and of surrounding it a target layer

Abstract. Spherical cavity dynamics in the elastic-ideal plastic body has been determined in the analytic closed form. Motion of the spherical cavity was forced by a radial jump driven its surface up to the initial velocity υ_0. The formulae determining, in the closed form, the stress and strain state in the surrounding cavity body have been derived. The analytical formulae for the maximal radii of the plasticly deformed cavity and of the surrounding it body layer have been derived too. It seems that this simplified model can be used to estimate the inlet diameter crater due to the projectile penetrating a plastic metal target.
Keywords: dynamical one-dimensional boundary value problem, elastic-ideal plastic body, spherical symmetry, kinematicly forced motion
Universal Decimal Classification: 623.4