



## Model trajektorii lotu pocisku wirującego o sześciu stopniach swobody zgodny ze Stanagiem 4355

LESZEK BARANOWSKI

Wojskowa Akademia Techniczna, Wydział Mechatroniki, Instytut Techniki Uzbrojenia,  
01-490 Warszawa, ul. S. Kaliskiego 2

**Streszczenie.** W pracy przedstawiono sposób konstruowania modelu matematycznego dynamiki lotu pocisków stabilizowanych obrotowo, w którym pocisk traktowany jest jako osiowosymetryczna bryła sztywna o sześciu stopniach swobody. Zastosowano nazewnictwo i oznaczenia zgodne ze Stanagiem 4355 ed.4 [7]. Wektorowa postać równań ruchu pocisku jest zaktualizowaną wersją równań opublikowanych w pracy [3]. Skalarne równania zarówno ruchu postępowego, jak i obrotowego wyprowadzono w układzie związanym z Ziemią, wykorzystując zamiast kątów Eulera, cosinusy kierunkowe osi symetrii pocisku.

**Słowa kluczowe:** balistyka zewnętrzna, dynamika lotu, równania ruchu

**Symbole UKD:** 623.54

### 1. Wstęp

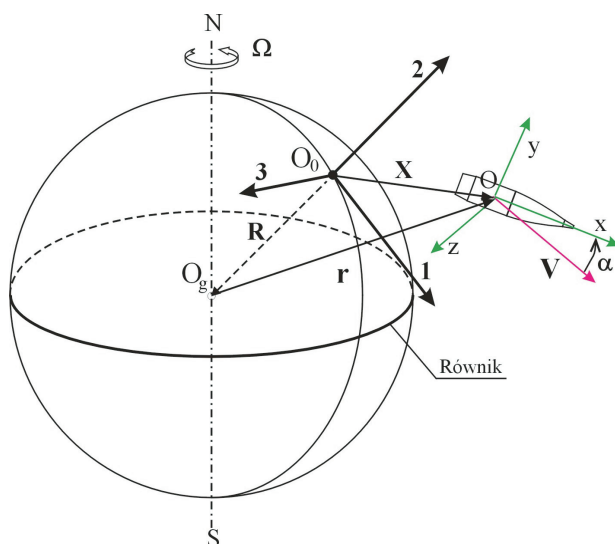
Wstąpienie Polski do Sojuszu Północnoatlantyckiego, a zwłaszcza chęć nawiązania bliższej współpracy z krajami członkowskimi przy realizowaniu wspólnych projektów badawczych, obliguje nas do poznania przepisów i procedur zawartych w dokumentach standaryzacyjnych NATO (typu STANAG czy AOP). W dziedzinach takich jak: balistyka zewnętrzna, teoria strzelania i systemy kierowania ogniem wydaje się być niezbędnym zaznajomienie się z metodyką modelowania trajektorii lotu pocisków i rakiet artylerii polowej. W zależności od przeznaczenia wyników badań państwa członkowskie NATO stosują modele o różnym stopniu uproszczenia — od modelu ruchu w próżni, poprzez model punktu materialnego o dwóch stopniach swobody oraz zmodyfikowany model punktu materialnego o czterech

stopniach swobody — po model przestrzennego ruchu pocisku traktowanego jako bryła sztywna o sześciu stopniach swobody.

W artykule podjęto próbę przeanalizowania i rozpowszechnienia wybranych zagadnień dotyczących modelowania lotu pocisków stabilizowanych obrotowo, opisanych w najnowszym Stanagu 4355 (edycja 4) z 2006 roku [7]. Szczególny nacisk położono na definicję sił i momentów aerodynamicznych, działających na pocisk w locie swobodnym oraz na metodykę wyprowadzania wektorowych i skalarnych równań ruchu pocisku jako bryły sztywnej.

## 2. Określenie położenia pocisku w przestrzeni

Do określenia położenia pocisku względem Ziemi w Stanagu 4355 ed.4 [7] stosuje się prawoskrętny, ortonormalny, kartezjański układ odniesienia, związany z Ziemią o początku w punkcie stania działa, oznaczany następująco  $O_0123$  (rys. 1). Położenie środka masy pocisku względem układu ziemskiego określa wektor  $\vec{X}$ .



Rys. 1. Położenie pocisku względem układu związanego z Ziemią  $O_0123$

Do opisu sił i momentów aerodynamicznych działających na pocisk w locie wykorzystuje się dwa wektory jednostkowe (wersory)  $\vec{x}$  i  $\vec{i}_V$  przyłożone w środku masy pocisku:

- wektor jednostkowy  $\vec{x}$  położony jest wzdłuż osi symetrii pocisku i zwrócony w kierunku noska (rys. 1), w układzie ziemskim ma składowe oznaczone następująco  $\vec{x} = [x_1, x_2, x_3]$ ,

- wektor jednostkowy  $\vec{i}_v$ , położony jest wzdłuż osi pokrywającej się z wektorem prędkości pocisku określonej względem powietrza  $\vec{v}$ , który w układzie ziemskim ma składowe oznaczone następująco  $\vec{v} = [v_1, v_2, v_3]$ .

Kąt  $\alpha$  (ang. *total angle of attack* [7]) zawarty między osią podłużną pocisku  $Ox$  a wektorem prędkości pocisku  $\vec{v}$  (rys. 1) nazywany jest w krajowej literaturze kątem nutacji (najczęściej symbol  $\delta$ ) lub przestrzennym kątem natarcia [1, 2, 6]. Z kolei płaszczyzna wyznaczona przez oś podłużną pocisku i wektor prędkości  $\vec{v}$  nazywana jest płaszczyzną oporu.

Poniżej zostaną przytoczone wybrane zasady rachunku wektorowego oraz zagadnienia mechaniki ogólnej ciała sztywnego, które są wykorzystywane w dalszej części pracy przy definiowaniu sił i momentów aerodynamicznych oraz przy wyprowadzaniu równań ruchu.

W układzie ziemskim  $O_0123$  mają zastosowanie następujące zasady rachunku wektorowego [5]:

- iloczyn skalarny dwóch wektorów  $\vec{a}$  i  $\vec{b}$  wynosi

$$(\vec{a} \cdot \vec{b}) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \phi, \quad (1)$$

gdzie  $\phi$  jest kątem zawartym między wektorami  $\vec{a}$  i  $\vec{b}$ ,

- wektor będący iloczynem wektorowym dwóch wektorów  $\vec{a}$  i  $\vec{b}$  ma następujące składowe

$$(\vec{a} \times \vec{b}) = (a_2 b_3 - a_3 b_2) \vec{1} + (a_3 b_1 - a_1 b_3) \vec{2} + (a_1 b_2 - a_2 b_1) \vec{3}, \quad (2)$$

a jego moduł wynosi

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \phi, \quad (3)$$

- iloczyny mieszane trzech wektorów dają się wyrazić następująco:

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b} \cdot (\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c} \cdot (\vec{a} \cdot \vec{b}), \quad (4)$$

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a}) = \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}), \quad (5)$$

- pochodna wektora jednostkowego  $\vec{x}$  względem czasu jest wektorem prostopadłym do tego wektora i wyraża się zależnością:

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{\omega}_p \times \vec{x}, \quad (6)$$

gdzie  $\vec{\omega}_p$  jest wektorem prędkości kątowej pocisku.

Zgodnie z zasadami mechaniki ogólnej [5] moment pędu pocisku (traktowanego jako osiowosymetryczna bryła sztywna wirująca dookoła osi symetrii) można wyrazić w postaci sumy dwóch wektorów:

- wektora momentu pędu względem osi  $x$ , który jest wprost proporcjonalny do momentu bezwładności pocisku względem osi  $x$  ( $I_x$ ) oraz prędkości kątowej pocisku względem tej osi ( $p$ ), i ma następującą postać

$$\vec{H}_x = I_x p \vec{x} \quad (7)$$

- oraz wektora momentu pędu względem osi  $y$  (prostopadłej do osi  $x$  i przechodzącej przez środek masy pocisku), który jest wprost proporcjonalny do momentu bezwładności pocisku względem osi  $y$  ( $I_y$ ) oraz prędkości kątowej pocisku względem tej osi (poprzeczna prędkość kątowa pocisku) i ma następującą postać

$$\vec{H}_y = I_y \left( \vec{x} \times \frac{d\vec{x}}{dt} \right). \quad (8)$$

Całkowity moment pędu (kręt) pocisku względem jego środka masy daje się wówczas wyrazić w postaci następującej sumy

$$\vec{H} = I_x p \vec{x} + I_y \left( \vec{x} \times \frac{d\vec{x}}{dt} \right). \quad (9)$$

Przemnażając skalarnie równanie (9) obustronnie przez wektor jednostkowy  $\vec{x}$  i wykorzystując wzór (5), otrzymujemy następującą zależność

$$(\vec{H} \cdot \vec{x}) = I_x p. \quad (10)$$

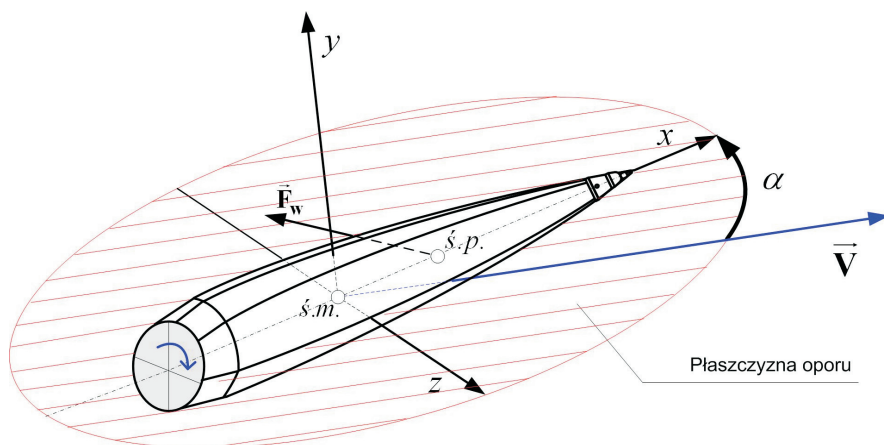
Przemnażając wektorowo równanie (9) obustronnie przez wektor jednostkowy  $\vec{x}$  i wykorzystując wzór (4) otrzymujemy

$$(\vec{H} \times \vec{x}) = I_y \frac{d\vec{x}}{dt}. \quad (11)$$

### 3. Siły i momenty aerodynamiczne działające na pocisk w locie

Spośród wszystkich sił i momentów aerodynamicznych działających na pocisk podczas jego lotu w atmosferze ziemskiej zostaną omówione tylko te, które w istotny sposób wpływają na jego lot. Podczas lotu oś podłużna pocisku odchylona jest

od kierunku wektora prędkości o kąt nutacji  $\alpha$ . Niesymetryczny opływ pocisku wywołuje niesymetryczny rozkład ciśnień na jego powierzchni, a tym samym pewne oddziaływanie, którego efekt wraz z siłami tarcia można zastąpić działaniem wypadkowej siły aerodynamicznej  $\vec{F}_w$  (rys. 2) przyłożonej w umownym punkcie leżącym na osi symetrii pocisku zwanym środkiem parcia (ś.p.). Wypadkowa siła aerodynamiczna  $\vec{F}_w$  wywołana kątem nutacji  $\alpha$  leży w płaszczyźnie oporu.



Rys. 2. Położenie wypadkowej siły aerodynamicznej  $\vec{F}_w$

Zgodnie z konwencją stosowaną w U.S. Army Ballistic Research Laboratory [4] (modele zawarte w Stanagu 4355 opierają się o raporty wytworzone w tym laboratorium) wyrażenia na siły i momenty sił aerodynamicznych zostaną przedstawione w dwóch postaciach: postaci wektorowej — określającej orientację definiowanej wielkości względem osi symetrii pocisku i wektora prędkości  $\vec{v}$  oraz skalarnej — określającej moduł wektora definiowanej wielkości.

### 3.1. Siła nośna

Siła nośna  $\vec{LF}$  (ang. *lift force*) jest składową wypadkowej siły aerodynamicznej  $\vec{F}_w$ , działającą w płaszczyźnie oporu prostopadle do wektora prędkości pocisku  $\vec{v}$  (rys. 3).

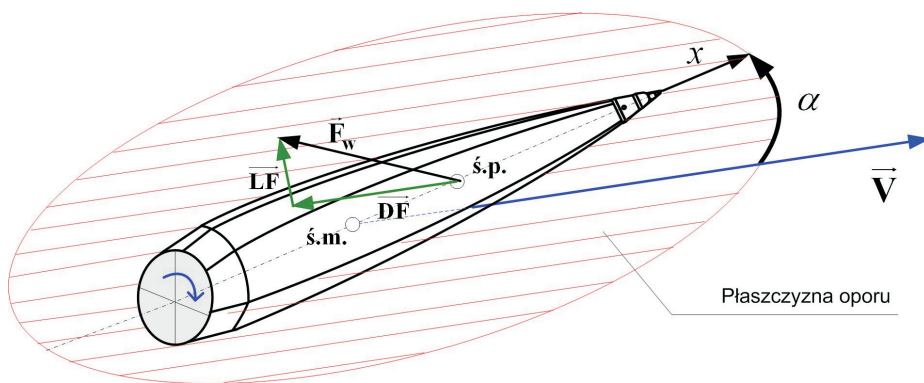
Wektor siły nośnej działającej na pocisk definiowany jest następująco [4]:

$$\vec{LF} = C_{L_\alpha} \frac{\rho v^2}{2} S [\vec{i}_v \times (\vec{x} \times \vec{i}_v)], \quad (12)$$

a jego moduł jest proporcjonalny do sinusa kąta nutacji  $\alpha$  i wyraża się wzorem

$$LF = C_{L_\alpha} \frac{\rho v^2}{2} S \sin \alpha, \quad (13)$$

gdzie:  $C_{L_\alpha}$  — liniowy współczynnik siły nośnej (ang. *linear lift force coefficient*);  
 $\rho$  — gęstość powietrza;  
 $S$  — powierzchnia charakterystyczna (pole przekroju poprzecznego pocisku).



Rys. 3. Rozkład całkowitej siły aerodynamicznej  $\vec{F}_w$  na siłę nośną  $\vec{LF}$  i siłę oporu  $\vec{DF}$

Podstawiając  $\vec{v} = v\vec{i}_v$ ,  $S = \pi d^2 / 4$  oraz uwzględniając we wzorze współczynnik dopasowania siły nośnej  $f_L$  [7], wzór (12) przyjmuje postać

$$\vec{LF} = \frac{\pi \rho d^2 f_L}{8} C_{L_\alpha} [\vec{v} \times (\vec{x} \times \vec{v})], \quad (14)$$

gdzie:  $d$  jest średnicą pocisku (kaliber).

Wykorzystując zasady rachunku wektorowego (4 i 5) wektor siły nośnej można wyrazić następującą zależnością

$$\vec{LF} = \frac{\pi \rho d^2 f_L}{8} C_{L_\alpha} [v^2 \vec{x} - (\vec{v} \cdot \vec{x}) \vec{v}]. \quad (15)$$

W ogólnym przypadku, gdy kąt nutacji w trakcie lotu może osiągać duże wartości, należy posługiwać się nieliniowym wyrażeniem na współczynnik siły nośnej i wówczas siła nośna może być przedstawiona w następującej postaci

$$\overline{\mathbf{LF}} = \frac{\pi\rho d^2 f_L}{8} (C_{L_\alpha} + C_{L_{\alpha^3}} \alpha^2) \left[ v^2 \bar{\mathbf{x}} - (\bar{\mathbf{v}} \cdot \bar{\mathbf{x}}) \bar{\mathbf{v}} \right], \quad (16)$$

gdzie:  $C_{L_{\alpha^3}}$  — sześcienny współczynnik siły nośnej (ang. *cubic lift force coefficient*).

### 3.2. Siła oporu

Siła oporu  $\overline{\mathbf{DF}}$  (ang. *drag force*) jest składową wypadkowej siły aerodynamicznej  $\overline{\mathbf{F}}_w$  działającą w płaszczyźnie oporu w kierunku przeciwnym do wektora prędkości pocisku  $\bar{\mathbf{v}}$  (rys. 3). W przypadku uwzględniania zależności siły oporu od kąta nutacji wektor siły oporu można wyrazić następującą zależnością [4]:

$$\overline{\mathbf{DF}} = -(C_{D_0} + C_{D_{\alpha^2}} \alpha^2) \frac{\rho v^2}{2} S \bar{\mathbf{i}}_v, \quad (17)$$

a wówczas moduł siły oporu wyraża się wzorem

$$DF = -(C_{D_0} + C_{D_{\alpha^2}} \alpha^2) \frac{\rho v^2}{2} S, \quad (18)$$

gdzie:  $C_{D_0}$  — współczynnik siły oporu przy zerowym kącie nutacji  $\alpha = 0$  (ang. *zero-yaw drag coefficient*);  
 $C_{D_{\alpha^2}}$  — współczynnik siły oporu indukowanego (ang. *yaw drag coefficient*).

Podstawiając  $\bar{\mathbf{v}} = v \bar{\mathbf{i}}_v$ ,  $S = \pi d^2 / 4$  oraz uwzględniając we wzorze współczynnik kształtu  $i$  [7], wzór (17) przyjmuje postać

$$\overline{\mathbf{DF}} = -\frac{\pi\rho i d^2}{8} (C_{D_0} + C_{D_{\alpha^2}} \alpha^2) v \bar{\mathbf{v}}. \quad (19)$$

### 3.3. Siła Magnusa

Siła Magnusa  $\overline{\mathbf{MF}}$  (ang. *Magnus force*) wynika z nierównomiernego rozkładu ciśnień wokół wirującego pocisku i działa prostopadle do płaszczyzny oporu. W związku z tym wektor siły Magnusa można wyrazić następująco [4]:

$$\overline{\mathbf{MF}} = \frac{\rho v^2}{2} S \left( \frac{pd}{v} \right) C_{mag-f} (\bar{\mathbf{i}}_v \times \bar{\mathbf{x}}), \quad (20)$$

a wówczas moduł siły Magnusa wyraża się wzorem

$$MF = C_{mag-f} \frac{\rho v^2}{2} S \left( \frac{pd}{v} \right) \sin \alpha, \quad (21)$$

gdzie:  $C_{mag-f}$  — współczynnik siły Magnusa (ang. *Magnus force coefficient*);  
 $\frac{pd}{v}$  — bezwymiarowa prędkość obrotowa pocisku;  
 $d$  — charakterystyczny parametr liniowy (średnica pocisku).

Podstawiając  $\vec{v} = v \vec{i}_v$ ,  $S = \pi d^2 / 4$  oraz uwzględniając z zależności (10), że  $p = (\vec{H} \cdot \vec{x}) / I_x$  wzór (20) przyjmuje następującą postać

$$\overline{\mathbf{MF}} = \frac{\pi \rho d^3}{8 I_x} C_{mag-f} (\vec{H} \cdot \vec{x}) (\vec{v} \times \vec{x}). \quad (22)$$

### 3.4. Siła tłumiąca

Siła tłumiąca  $\overline{\mathbf{PDF}}$  (ang. *pitch damping force*) wywoływana jest prędkością kątową pocisku w płaszczyźnie prostopadłej do osi podłużnej pocisku  $q_t = \sqrt{q^2 + r^2}$  oraz szybkością zmian kąta nutacji pocisku  $\dot{\alpha} = \frac{d\alpha}{dt}$ . Wektor siły tłumiącej można wyrazić w postaci następującej sumy [4]:

$$\overline{\mathbf{PDF}} = \frac{1}{2} \rho S d C_{N_q} v \left( \frac{d\vec{x}}{dt} \right) + \frac{1}{2} \rho S d C_{N_{\dot{\alpha}}} v \left[ \left( \frac{d\vec{x}}{dt} \right) - \left( \frac{d\vec{i}_v}{dt} \right) \right], \quad (23)$$

a wówczas moduł siły tłumiącej wyraża się wzorem

$$PDF = \frac{\rho v^2}{2} S \left[ \left( \frac{q_t d}{v} \right) C_{N_q} + \left( \frac{\dot{\alpha} d}{v} \right) C_{N_{\dot{\alpha}}} \right], \quad (24)$$

gdzie:  $C_{N_q}$  — współczynnik siły tłumiącej ze względu na  $q_t$  (ang. *pitch damping force coefficient due to  $q_t$* ),  
 $C_{N_{\dot{\alpha}}}$  — współczynnik siły tłumiącej ze względu na  $\dot{\alpha}$  (ang. *pitch damping force coefficient due to  $\dot{\alpha}$* ).

Ponieważ  $q_t$  i  $\dot{\alpha}$  są praktycznie prawie identyczne, zależność (23) na wektor siły tłumiącej można wyrazić w prostszej postaci



$$\overline{\mathbf{PDF}} = \frac{1}{2} S d v \left( C_{N_q} + C_{N_\alpha} \right) \left( \frac{d\bar{\mathbf{x}}}{dt} \right), \quad (25)$$

a wówczas moduł siły tłumiącej wyraża się następującym wzorem

$$PDF = \frac{\rho v^2}{2} S d \left( \frac{q_t d}{v} \right) \left( C_{N_q} + C_{N_\alpha} \right) \quad (26)$$

Podstawiając  $S = pd^2/4$  oraz uwzględniając, że na podstawie (11)

$$\left( \frac{d\bar{\mathbf{x}}}{dt} \right) = \frac{(\bar{\mathbf{H}} \times \bar{\mathbf{x}})}{I_y} \quad (27)$$

zależność (25) na wektor siły tłumiącej oscylacje przyjmuje postać

$$\overline{\mathbf{PDF}} = \frac{\pi \rho d^3 v}{8 I_y} \left( C_{N_q} + C_{N_\alpha} \right) (\bar{\mathbf{H}} \times \bar{\mathbf{x}}). \quad (28)$$

Siła tłumiąca jest znacznie mniejsza od siły nośnej i w praktyce jest często pomijana w równaniach ruchu postępowego pocisku. Z kolei moment tej siły ma istotne znaczenie na stateczność dynamiczną pocisku i musi być uwzględniany w równaniach ruchu obrotowego pocisku.

### 3.5. Moment siły Magnusa

Moment siły Magnusa  $\overline{\mathbf{MM}}$  (ang. *Magnus moment*) wynika z faktu, iż siła Magnusa nie jest przyłożona w środku masy pocisku. Wektor momentu siły Magnusa leży w płaszczyźnie oporu i wyraża się następującą zależnością [4]:

$$\overline{\mathbf{MM}} = \frac{\rho v^2}{2} S d \left( \frac{pd}{v} \right) C_{mag-m} \left[ \bar{\mathbf{x}} \times (\bar{\mathbf{i}}_v \times \bar{\mathbf{x}}) \right], \quad (29)$$

a wówczas moduł momentu siły Magnusa wyraża się wzorem

$$MM = \frac{\rho v^2}{2} S d \left( \frac{pd}{v} \right) C_{mag-m} \sin \alpha, \quad (30)$$

gdzie:  $C_{mag-m}$  — współczynnik momentu Magnusa (ang. *Magnus moment coefficient*).

Podstawiając  $\vec{v} = v\vec{i}_v$ ,  $S = \pi d^2 / 4$  oraz uwzględniając, że  $p = (\vec{H} \cdot \vec{x}) / I_x$  wzór (29) przyjmuje postać

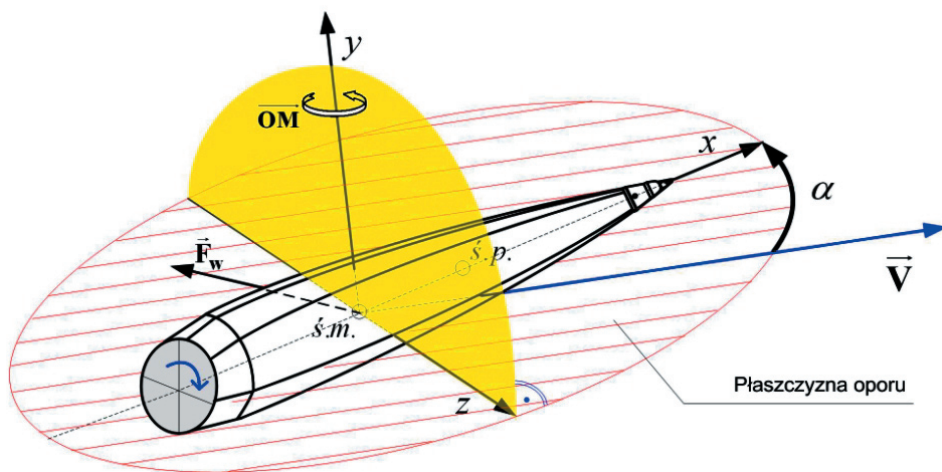
$$\overline{\mathbf{M}} = \frac{\pi \rho d^4}{8 I_x} C_{mag-m} (\vec{H} \cdot \vec{x}) [\vec{x} \times (\vec{v} \times \vec{x})]. \quad (31)$$

Wykorzystując zasady rachunku wektorowego (4, 5), wektor momentu Magnusa można wyrazić następującą zależnością

$$\overline{\mathbf{M}} = \frac{\pi \rho d^4}{8 I_x} C_{mag-m} (\vec{H} \cdot \vec{x}) [\vec{v} - (\vec{v} \cdot \vec{x})\vec{x}]. \quad (32)$$

### 3.6. Moment wywracający

Moment wywracający  $\overline{\mathbf{OM}}$  (ang. *overturning moment*) jest momentem aerodynamicznym wywołany wypadkową siłą aerodynamiczną  $\vec{F}_w$  i wynika z faktu, iż punkt przyłożenia wypadkowej siły aerodynamicznej ś.p. (środek parcia) najczęściej wyprzedza położenie środka masy pocisku ś.m. (rys. 4) co czyni pocisk niestatecznym statycznie.



Rys. 4. Schemat działania momentu wywracającego

Wektor momentu wywracającego jest prostopadły do płaszczyzny oporu i wyraża się następującą zależnością [4]:

$$\overline{\mathbf{OM}} = C_{M_\alpha} \frac{\rho v^2}{2} S d (\vec{i}_v \times \vec{x}), \quad (33)$$

a wówczas moduł momentu wywracającego wyraża się wzorem

$$OM = C_{M_\alpha} \frac{\rho v^2}{2} S d \sin \alpha, \quad (34)$$

gdzie:  $C_{M_\alpha}$  — współczynnik momentu wywracającego (ang. *overturning moment coefficient*).

Podstawiając  $\vec{v} = v\vec{i}_v$  oraz  $S = \pi d^2 / 4$  wzór (33) przyjmuje postać

$$\overline{\mathbf{OM}} = \frac{\pi \rho v d^3}{2} C_{M_\alpha} (\vec{v} \times \vec{x}). \quad (35)$$

W ogólnym przypadku, gdy kąt nutacji w trakcie lotu może osiągać duże wartości, należy posługiwać się nieliniowym wyrażeniem na współczynnik momentu wywracającego i wówczas zależność na wektor momentu wywracającego można wyrazić następującą zależnością [4]

$$\overline{\mathbf{OM}} = \frac{\pi \rho v d^3}{2} (C_{M_\alpha} + C_{M_{\alpha^3}} \alpha^2) (\vec{v} \times \vec{x}), \quad (36)$$

gdzie:  $C_{M_{\alpha^3}}$  — sześcienny współczynnik momentu wywracającego (ang. *cubic overturning moment coefficient*).

### 3.7. Moment tłumiący wirowanie

Moment tłumiący wirowanie ( $\overline{\mathbf{SDM}}$ ) (ang. *spin damping moment*) jest momentem aerodynamicznym wywołanym siłą tarcia powietrza wokół pocisku wirującego dookoła osi podłużnej. Wektor momentu tłumiącego wirowanie leży wzdłuż osi podłużnej pocisku i wyraża się następującą zależnością [4]:

$$\overline{\mathbf{SDM}} = \frac{\rho v^2}{2} S d \left( \frac{pd}{v} \right) C_{spin} \vec{x}, \quad (37)$$

a wówczas moduł momentu tłumiącego wirowanie przyjmuje wartość

$$SDM = C_{spin} \frac{\rho v^2}{2} S d \left( \frac{pd}{v} \right), \quad (38)$$

gdzie:  $C_{spin}$  — współczynnik momentu tłumiącego wirowanie (ang. *spin damping moment coefficient*).

Podstawiając  $S = \pi d^2 / 4$  oraz uwzględniając, że  $p = (\vec{H} \cdot \vec{x}) / I_x$  zależność (37) na wektor momentu tłumiącego wirowanie pocisku przyjmuje postać

$$\overline{\mathbf{SDM}} = \frac{\pi \rho d^4 v}{8 I_x} C_{spin} (\vec{H} \cdot \vec{x}) \vec{x}. \quad (39)$$

### 3.8. Moment tłumiący oscylacje

Moment tłumiący oscylacje  $\overline{\mathbf{PDM}}$  (ang. *pitch damping moment*) jest momentem aerodynamicznym, powodującym tłumienie ruchu oscylacyjnego pocisku dookoła środka masy. Wywoływany jest całkowitą prędkością kątową pocisku w płaszczyźnie

prostopadłej do osi podłużnej pocisku  $q_t = \sqrt{q^2 + r^2}$  oraz szybkością zmian kąta nutacji pocisku  $\dot{\alpha} = \frac{d\alpha}{dt}$ . Wektor momentu tłumiącego oscylacje można wyrazić następującą zależnością [4]:

$$\overline{\mathbf{PDM}} = \frac{1}{2} \rho S d^2 C_{M_q} v \left( \vec{x} \times \frac{d\vec{x}}{dt} \right) + \frac{1}{2} \rho S d^2 C_{M_{\dot{\alpha}}} v \left[ \left( \vec{x} \times \frac{d\vec{x}}{dt} \right) - \left( \vec{x} \times \frac{d\vec{i}_v}{dt} \right) \right], \quad (40)$$

a wówczas moduł momentu tłumiącego oscylacje wyraża się wzorem

$$PDM = \frac{\rho v^2}{2} S d \left[ \left( \frac{q_t d}{v} \right) C_{M_q} + \left( \frac{\dot{\alpha} d}{v} \right) C_{M_{\dot{\alpha}}} \right], \quad (41)$$

gdzie:  $C_{M_q}$  — współczynnik momentu tłumiącego oscylacje ze względu na  $q_t$  (ang. *pitch damping moment coefficient due to  $q_t$* ),

$C_{M_{\dot{\alpha}}}$  — współczynnik momentu tłumiącego oscylacje ze względu na  $\dot{\alpha}$  (ang. *pitch damping moment coefficient due to  $\dot{\alpha}$* ).

Ponieważ  $q_t$  i  $\dot{\alpha}$  są praktycznie prawie identyczne, zależność (40) na wektor momentu tłumiącego oscylacje można wyrazić w prostszej postaci [4]:

$$\overline{\mathbf{PDM}} = \frac{1}{2} S d^2 v (C_{M_q} + C_{M_{\dot{\alpha}}}) \left( \vec{x} \times \frac{d\vec{x}}{dt} \right), \quad (42)$$

a wówczas moduł momentu tłumiącego oscylacje wyraża się wzorem

$$PDM = \frac{\rho v^2}{2} S d \left( \frac{q_l d}{v} \right) (C_{M_q} + C_{M_{\dot{\alpha}}}). \quad (43)$$

Podstawiając  $S = \pi d^2/4$  oraz uwzględniając, że na podstawie (9)

$$\left( \bar{\mathbf{x}} \times \frac{d\bar{\mathbf{x}}}{dt} \right) = \frac{\bar{\mathbf{H}} - (\bar{\mathbf{H}} \cdot \bar{\mathbf{x}}) \bar{\mathbf{x}}}{I_y} \quad (44)$$

zależność (42) na wektor momentu tłumiącego oscylacje przyjmuje postać

$$\overline{\mathbf{PDM}} = \frac{\pi \rho d^4 v}{8 I_y} (C_{M_q} + C_{M_{\dot{\alpha}}}) [\bar{\mathbf{H}} - (\bar{\mathbf{H}} \cdot \bar{\mathbf{x}}) \bar{\mathbf{x}}]. \quad (45)$$

#### 4. Równania ruchu pocisku jako bryły sztywnej

Wektorowa postać równań ruchu pocisku jako bryły sztywnej o sześciu stopniach swobody (współrzędnych środka masy i kątowych współrzędnych orientacji bryły) jest zaktualizowaną wersją równań opublikowanych w pracy [3]. Aktualizacja polegała na przekształceniu równań celem uzyskania zgodności co do formy i oznaczeń stosowanych w Stanagu 4355 ed.4. Skalarne równania zarówno ruchu postępowego, jak i obrotowego wyprowadzono w układzie związanym z Ziemią  $O_0123$ , wykorzystując zamiast kątów Eulera, cosinusy kierunkowe osi symetrii pocisku (wersora  $\bar{\mathbf{x}}$ ).

##### 4.1. Wektorowa postać równań ruchu pocisku

W układzie związanym z Ziemią wektorowe równania ruchu pocisku jako bryły sztywnej można wyprowadzić z prawa zmiany pędu  $m\bar{\mathbf{u}}$  i krętu  $\bar{\mathbf{H}}$  określonego względem środka masy pocisku w następującej postaci [5]:

— wektorowe równanie ruchu środka masy

$$m\bar{\mathbf{u}} = \overline{\mathbf{DF}} + \overline{\mathbf{LF}} + \overline{\mathbf{MF}} + \overline{\mathbf{PDF}} + m\bar{\mathbf{g}} + m\bar{\Lambda}, \quad (46)$$

— wektorowe równanie ruchu dookoła środka masy

$$\bar{\mathbf{H}} = \overline{\mathbf{OM}} + \overline{\mathbf{PDM}} + \overline{\mathbf{MM}} + \overline{\mathbf{SDM}}. \quad (47)$$

Uwzględniając zależności (16, 19, 22, 28, 32, 36, 39, 45), równania ruchu (46) i (47) można wyrazić następująco:

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{\mathbf{u}}}{dt} = & -\frac{\pi\rho d^2}{8m} (C_{D_0} + C_{D_{\alpha^2}} \alpha^2) v \bar{\mathbf{v}} + \frac{\pi\rho f_L d^2}{8m} (C_{L_\alpha} + C_{L_{\alpha^3}} \alpha^2) [v^2 \bar{\mathbf{x}} - (\bar{\mathbf{v}} \cdot \bar{\mathbf{x}}) \bar{\mathbf{v}}] + \\ & + \frac{\pi\rho d^3}{8I_x} C_{mag-f} (\bar{\mathbf{H}} \cdot \bar{\mathbf{x}}) (\bar{\mathbf{v}} \times \bar{\mathbf{x}}) + \frac{\pi\rho d^3 v}{8m I_y} (C_{N_q} + C_{N_\alpha}) (\bar{\mathbf{H}} \times \bar{\mathbf{x}}) - m g_0 (R^2 / r^3) \bar{\mathbf{r}} + 2m(\bar{\omega} \times \bar{\mathbf{u}}), \end{aligned} \quad (48)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{\mathbf{H}}}{dt} = & \frac{\pi\rho v d^3}{2} (C_{M_\alpha} + C_{M_{\alpha^3}}) (\bar{\mathbf{v}} \times \bar{\mathbf{x}}) + \frac{\pi\rho d^4 v}{8I_y} (C_{M_q} + C_{M_\alpha}) [\bar{\mathbf{H}} - (\bar{\mathbf{H}} \cdot \bar{\mathbf{x}}) \bar{\mathbf{x}}] + \\ & + \frac{\pi\rho d^4}{8I_x} C_{mag-m} (\bar{\mathbf{H}} \cdot \bar{\mathbf{x}}) [\bar{\mathbf{v}} - (\bar{\mathbf{v}} \cdot \bar{\mathbf{x}}) \bar{\mathbf{x}}] + \frac{\pi\rho d^4 v}{8I_x} C_{spin} (\bar{\mathbf{H}} \cdot \bar{\mathbf{x}}) \bar{\mathbf{x}}, \end{aligned} \quad (49)$$

gdzie:  $m\bar{\mathbf{g}} = -mg_0 (R^2 / r^3) \bar{\mathbf{r}}$  — siła ciężkości,

$m\bar{\Lambda} = 2m(\bar{\omega} \times \bar{\mathbf{u}})$  — siła Coriolisa,

$$\bar{\omega} = \begin{bmatrix} \Omega \cos(lat) \cos(AZ) \\ \Omega \sin(lat) \\ -\Omega \cos(lat) \sin(AZ) \end{bmatrix} \text{ — wektor prędkość kątowej Ziemi,}$$

$$\bar{\mathbf{g}} = -g_0 (R^2 / r^3) \bar{\mathbf{r}} = -g_0 \begin{bmatrix} X_1 / R \\ 1 - 2X_2 / R \\ X_3 / R \end{bmatrix} \text{ — wektor przyspieszenia siły ciężkości,}$$

$\bar{\mathbf{r}} = \bar{\mathbf{X}} - \bar{\mathbf{R}}$  — wektor położenia pocisku względem środka masy Ziemi,

$\bar{\mathbf{v}} = \bar{\mathbf{u}} - \bar{\mathbf{w}}$  — wektor prędkości pocisku względem powietrza,

$\bar{\mathbf{w}}$  — wektor prędkości wiatru,

$R = 6356766$  [m] — promień Ziemi,

$\Omega = 7,292115 \cdot 10^{-5}$  [rad/s],

$g_0 = 9,80665[1 - 0,0026\cos(2lat)]$  [m/s<sup>2</sup>],

$lat, AZ$  — szerokość i długość geograficzna.

## 4.2. Skalarna postać równań ruchu pocisku

Skalarną postać równań ruchu pocisku otrzymujemy rzutując równania wektorowe (zarówno środka masy, jak i dookoła środka masy) na osie ziemskiego układu współrzędnych  $O_0123$ . Tak skonstruowany model matematyczny jest układem równań różniczkowo-algebraicznych, wśród których można wyróżnić:

- dynamiczne równania ruchu środka masy pocisku otrzymane z zależności (48):

$$\begin{aligned} \frac{du_1}{dt} = & -\left(\frac{\pi\rho id^2}{8m}\right)(C_{D_0} + C_{D_{a^2}}\alpha^2)v \cdot v_1 + \left(\frac{\pi\rho d^2 f_L}{8m}\right)(C_{L_a} + C_{L_{a^3}}\alpha^2)(v^2 x_1 - vv_1 \cos\alpha) + \\ & -\frac{\pi\rho d^3 C_{mag-f}}{8mI_x}(H_1 x_1 + H_2 x_2 + H_3 x_3)(x_2 v_3 - x_3 v_2) + \frac{\pi\rho d^3 (C_{N_q} + C_{N_a})}{8mI_y}(H_2 x_3 - H_3 x_2) + \quad (50) \\ & -g_0 \frac{X_1}{R} - 2\Omega(\sin(lat)u_3 + \cos(lat)\sin(AZ)u_2), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{du_2}{dt} = & -\left(\frac{\pi\rho id^2}{8m}\right)(C_{D_0} + C_{D_{a^2}}\alpha^2)v \cdot v_2 + \left(\frac{\pi\rho d^2 f_L}{8m}\right)(C_{L_a} + C_{L_{a^3}}\alpha^2)(v^2 x_2 - vv_2 \cos\alpha) + \\ & -\frac{\pi\rho d^3 C_{mag-f}}{8mI_x}(H_1 x_1 + H_2 x_2 + H_3 x_3)(x_3 v_1 - x_1 v_3) + \frac{\pi\rho d^3 (C_{N_q} + C_{N_a})}{8mI_y}(H_3 x_1 - H_1 x_3) + \quad (51) \\ & -g_0 \left(1 - \frac{2X_2}{R}\right) + 2\Omega(\cos(lat)\sin(AZ)u_1 + \cos(lat)\cos(AZ)u_3), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{du_3}{dt} = & -\left(\frac{\pi\rho id^2}{8m}\right)(C_{D_0} + C_{D_{a^2}}\alpha^2)v \cdot v_3 + \left(\frac{\pi\rho d^2 f_L}{8m}\right)(C_{L_a} + C_{L_{a^3}}\alpha^2)(v^2 x_3 - vv_3 \cos\alpha) + \\ & -\frac{\pi\rho d^3 C_{mag-f}}{8mI_x}(H_1 x_1 + H_2 x_2 + H_3 x_3)(x_1 v_2 - x_2 v_1) + \frac{\pi\rho d^3 (C_{N_q} + C_{N_a})}{8mI_y}(H_1 x_2 - H_2 x_1) + \quad (52) \\ & -g_0 \left(\frac{X_3}{R}\right) - 2\Omega(\cos(lat)\cos(AZ)u_2 - \sin(AZ)u_1), \end{aligned}$$

- kinematyczne równania ruchu środka masy pocisku

$$\frac{dX_1}{dt} = u_1, \quad (53)$$

$$\frac{dX_2}{dt} = u_2, \quad (54)$$

$$\frac{dX_3}{dt} = u_3, \quad (55)$$

- dynamiczne równania ruchu dookoła środka masy otrzymane z zależności (49)

$$\begin{aligned} \frac{dH_1}{dt} = & \frac{\pi\rho v d^3}{2} (C_{M_a} + C_{M_{a^3}}) (v_2 x_3 - v_3 x_2) + \frac{\pi\rho d^4 v}{8I_y} (C_{M_q} + C_{M_{\dot{\alpha}}}) [H_1 - (H_1 x_1 + H_2 x_2 + H_3 x_3) x_1] + \\ & + \frac{\pi\rho d^4}{8I_x} C_{mag-m} (H_1 x_1 + H_2 x_2 + H_3 x_3) (v_1 - v x_1 \cos \alpha) + \frac{\pi\rho d^4 v}{8I_x} C_{spin} (H_1 x_1 + H_2 x_2 + H_3 x_3) x_1, \end{aligned} \quad (56)$$

$$\begin{aligned} \frac{dH_2}{dt} = & \frac{\pi\rho v d^3}{2} (C_{M_a} + C_{M_{a^3}}) (v_3 x_1 - v_1 x_3) + \frac{\pi\rho d^4 v}{8I_y} (C_{M_q} + C_{M_{\dot{\alpha}}}) [H_2 - (H_1 x_1 + H_2 x_2 + H_3 x_3) x_2] + \\ & + \frac{\pi\rho d^4}{8I_x} C_{mag-m} (H_1 x_1 + H_2 x_2 + H_3 x_3) (v_2 - v x_2 \cos \alpha) + \frac{\pi\rho d^4 v}{8I_x} C_{spin} (H_1 x_1 + H_2 x_2 + H_3 x_3) x_2, \end{aligned} \quad (57)$$

$$\begin{aligned} \frac{dH_3}{dt} = & \frac{\pi\rho v d^3}{2} (C_{M_a} + C_{M_{a^3}}) (v_1 x_2 - v_2 x_1) + \frac{\pi\rho d^4 v}{8I_y} (C_{M_q} + C_{M_{\dot{\alpha}}}) [H_3 - (H_1 x_1 + H_2 x_2 + H_3 x_3) x_3] + \\ & + \frac{\pi\rho d^4}{8I_x} C_{mag-m} (H_1 x_1 + H_2 x_2 + H_3 x_3) (v_3 - v x_3 \cos \alpha) + \frac{\pi\rho d^4 v}{8I_x} C_{spin} (H_1 x_1 + H_2 x_2 + H_3 x_3) x_3, \end{aligned} \quad (58)$$

— równania na cosinusy kierunkowe otrzymujemy z zależności (11)

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{(H_2 x_3 - H_3 x_2)}{I_y}, \quad (59)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = \frac{(H_3 x_1 - H_1 x_3)}{I_y}, \quad (60)$$

$$\frac{dx_3}{dt} = \frac{(H_1 x_2 - H_2 x_1)}{I_y}, \quad (61)$$

— równanie określające kąt nutacji otrzymujemy z zależności na iloczyn skalarny

$$\cos \alpha = \frac{(\vec{v} \cdot \vec{x})}{v} = \frac{v_1 x_1 + v_2 x_2 + v_3 x_3}{v}, \quad (62)$$

— równania na składowe i moduł wektora prędkości pocisku względem powietrza

$$v_1 = u_1 - w_1, \quad v_2 = u_2 - w_2, \quad v_3 = u_3 - w_3, \quad v = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}, \quad (63)$$



Współczynniki sił i momentów aerodynamicznych oraz ich pochodne, występujące w modelu ( $C_{D_0}, C_{D_{\alpha^2}}, C_{L_{\alpha}}, C_{L_{\alpha^3}}, C_{mag-f}, C_{M_{\alpha}}, C_{M_{\alpha^3}}$ ), przedstawia się w funkcji liczby Macha w postaci wielomianu czwartego stopnia

$$C_i = a_0 + a_1M + a_2M^2 + a_3M^3 + a_4M^4. \quad (64)$$

## 5. Podsumowanie i wnioski końcowe

Podstawowym celem Stanagu 4355 jest ujednoczenie procedur obliczania trajektorii lotu szeroko rozumianych pocisków artylerii polowej, aby ułatwić i rozszerzyć współpracę między różnymi ośrodkami badawczymi i konstrukcyjnymi w głównej mierze przy opracowywaniu systemów kierowania ogniem i przeprowadzaniu identyfikacji charakterystyk modelu matematycznego pocisków.

W związku z tym w pracy przedstawiono sposób konstruowania modelu matematycznego dynamiki lotu pocisków stabilizowanych obrotowo, w którym pocisk traktowany jest jako osiowosymetryczna bryła sztywna o sześciu stopniach swobody, stosując nazewnictwo i oznaczenia zgodne ze Stanagiem 4355 ed.4 [7]. Skalarne równania zarówno ruchu postępowego, jak i obrotowego wyprowadzono w układzie związanym z Ziemią, wykorzystując zamiast kątów Eulera, cosinusy kierunkowe osi symetrii pocisku.

Wyprowadzony i zamieszczony w pracy model matematyczny jest tylko jednym z zagadnień, opisywanych w Stanagu 4355 ed.4. Stanowi on dobrą pozycję wyjściową do analizy pozostałych zagadnień zawartych w Stanagu, między innymi: uproszczonych modeli lotu klasycznych pocisków artyleryjskich (np. zmodyfikowany model punktu materialnego o czterech stopniach swobody), modeli lotu subamunicji, pocisków z dodatkowym napędem oraz pocisków raketowych, a także pocisków sterowanych.

Problematyka ta będzie przedmiotem dalszych badań i analiz, a wyniki przeprowadzonych prac zostaną przedstawione w kolejnych artykułach.

Artykuł wpłynął do redakcji 26.05.2008 r. Zweryfikowaną wersję po recenzji otrzymano w czerwcu 2008 r.

### LITERATURA

- [1] L. BARANOWSKI, *Modele trajektorii ruchu pocisku artyleryjskiego w układach odniesienia zgodnych z polską normą PN-83*, Biul. WAT, 51, 10, 2002, 85-104.
- [2] J. GACEK, *Balistyka zewnętrzna*, cz. I. *Modelowanie zjawisk balistyki zewnętrznej i dynamiki lotu*, Wydawnictwo WAT, Warszawa, 1999.
- [3] R. F. LIESKE, R. L. MCCOY, *Equations of Motion of a Rigid Projectile*, Ballistic Research Laboratories Report, 1244, 1964.

- [4] R. L. McCoy, *Modern Exterior Ballistics. The Launch and Flight Dynamics of Symmetric Projectiles*, Schiffer Publishing, 1999.
- [5] Z. OSIŃSKI, *Mechanika ogólna*, PWN, Warszawa, 1994.
- [6] J. SZAPIRO, *Balistyka zewnętrzna*, MON, Warszawa, 1956.
- [7] *The Modified Point Mass and Five Degrees of Freedom Trajectory Models*, STANAG 4355 (edition 4), 2006.

L. BARANOWSKI

**Equations of motion for six degrees of freedom trajectories of artillery projectiles  
consistent with Stanag 4355**

**Abstract.** In the paper, the equations of motion of a spin-stabilized, dynamically stable, conventional artillery projectile, possessing at least trigonal symmetry were introduced. The vector six degrees of freedom (6-DOF) differential equations of motion are an updated edition of those published at the BRL in report [1] and are consistent with Stanag 4355 [2]. This model is formulated to solve the projectile pitching and yawing motion in terms of direction cosines of the projectile's axis of symmetry, rather than the Euler-angle method.

**Keywords:** exterior ballistics, flight dynamics, equations of motion

**Universal Decimal Classification:** 623.54