



## Radialne drgania grubościennej kulistej osłony balistycznej wymuszone wewnętrznym ciśnieniem produktów natychmiastowej detonacji materiału wybuchowego (MW)

EDWARD WŁODARCZYK, MARIUSZ ZIELENKIEWICZ\*

Wojskowa Akademia Techniczna, Wydział Mechatroniki,  
00-908 Warszawa, ul. S. Kaliskiego 2

\*Wojskowy Instytut Techniczny Uzbrojenia, Zakład Uzbrojenia Artyleryjskiego,  
05-220 Zielonka, ul. Prymasa Stefana Wyszyńskiego 7

**Streszczenie.** Rozwiązano w zamkniętej analitycznej postaci problem radialnych drgań kulistej grubościennej osłony balistycznej, obciążonej udarowo wewnętrznym ciśnieniem produktów nagłej detonacji wysokoenergetycznego materiału wybuchowego. Założono, że gęstość materiału osłony podczas drgań nie ulega zmianie ( $\rho = \rho_0 = \text{const}$ ). Pominięto ruch falowy w produktach detonacji. Założono adiabatyczny proces sprężania i rozprężania produktów detonacji podczas drgań osłony. Przy takich założeniach na gruncie teorii małych deformacji uzyskano zamknięte analityczne rozwiązanie problemu. Wykazano, że ciśnienie w produktach detonacji podczas drgań osłony w zakresie małych odkształceń można aproksymować stałą wartością, równą ciśnieniu początkowemu w produktach detonacji.

**Słowa kluczowe:** kulista osłona balistyczna, drgania wymuszone, wewnętrzne obciążenie uderzeniowe, nagła detonacja materiału wybuchowego

**Symbole UKD:** 623.52

### 1. Wprowadzenie

W pracy [1] rozwiązano w zamkniętej analitycznej postaci zagadnienie radialnych drgań wymuszonych grubościennej rury, spowodowanych nagle wytworzonym wewnętrznym ciśnieniem równomiernie rozłożonym wzdłuż jej długości. Założono, że ciśnienie i gęstość materiału rury są stałe podczas procesu drgań. Dla takiego

fizycznego modelu wyprowadzono zamknięte analityczne wzory na kinematyczne i wytrzymałościowe parametry rury. Analogiczne zagadnienie dla grubościennej osłony kulistej rozpatrzono w pracy [2].

Wybuchowe (uderzeniowe) oddziaływania produktów spalania MW na obudowy o różnej geometrii występują między innymi w pociskach artyleryjskich, granatach, bombach lotniczych, a także w lufach urządzeń miotających [3, 4]. Grubościenne obudowy balistyczne stosuje się również w urządzeniach laboratoryjnych przeznaczonych do wybuchowego napędzania pierścieniowych próbek w celu określenia dynamicznych właściwości ich materiału [5, 6].

Powstaje pytanie, czy za pomocą rozwiązań podanych w pracach [1] i [2] można aproksymować oddziaływanie na obudowy ciśnienia produktów detonacji materiałów wybuchowych umieszczonych w ich wnętrzu. Okazuje się, że przy realizacji hipotezy natychmiastowej detonacji MW w zakresie teorii małych odkształceń uzyskuje się analogiczne rozwiązanie jak w pracach [1] i [2]. Zagadnienie to dla osłony kulistej rozpatruje się w niniejszej pracy.

## 2. Sformułowanie problemu

Określimy dynamiczne stany przemieszczenia oraz naprężeń i odkształceń w grubościennej osłonie kulistej, obciążonej wewnętrznym ciśnieniem produktów natychmiastowej detonacji wysokoenergetycznego materiału wybuchowego (MW).

Oznaczmy przez  $a$  i  $b$  promienie osłony — odpowiednio wewnętrzny i zewnętrzny. Zagadnienie będziemy rozwiązywać w sferycznym układzie współrzędnych Lagrange'a  $r, \phi, \theta$ . Ze względu na kulistą symetrię problem jest przestrzennie jednowymiarowy. W związku z tym stany naprężeń i odkształceń w materiale osłony reprezentowane są przez następujące składowe główne tensora naprężenia i odkształcenia:

- $\sigma_r$  — naprężenie promieniowe (radialne),
- $\sigma_\phi = \sigma_\theta$  — naprężenia obwodowe (styczne),
- $\varepsilon_r$  — odkształcenie promieniowe (radialne),
- $\varepsilon_\phi = \varepsilon_\theta$  — odkształcenia obwodowe (styczne).

Pozostałe składowe tensorów naprężenia i odkształcenia w tym układzie współrzędnych są równe zeru.

Problem rozwiązujemy w ramach liniowej teorii sprężystości, zgodnie z którą mamy następujące relacje [7]:

$$\varepsilon_r(r, t) = \frac{\partial u(r, t)}{\partial r}, \quad \varepsilon_\phi(r, t) = \varepsilon_\theta(r, t) = \frac{u(r, t)}{r}, \quad (2.1)$$

$$\sigma_r(r, t) - \sigma_\phi(r, t) = 2\mu(\varepsilon_r - \varepsilon_\phi), \quad (2.2)$$

gdzie  $u$  oraz  $r$  i  $t$  są odpowiednio przemieszczeniem radialnym elementu osłony i współrzędnymi Lagrange'a,  $\mu$  oznacza moduł Kirchhoffa:

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}. \quad (2.3)$$

Z kolei symbolami  $E$  i  $\nu$  oznaczono odpowiednio moduł Younga i liczbę Poissona.

Z prawa zachowania masy, zapisanego dla elementu osłony we współrzędnych Lagrange'a  $r$ ,  $t$  w symetrii kulistej, otrzymuje się:

$$(r+u)^2 \left(1 + \frac{\partial u}{\partial r}\right) = \frac{\rho_0}{\rho} r^2, \quad (2.4)$$

gdzie symbole  $\rho_0$  i  $\rho$  oznaczają gęstości materiału osłony: początkową i bieżącą.

Dla umiarkowanych ciśnień nie przekraczających kilku tysięcy MPa, w przypadku metali można przyjąć, że  $\rho \approx \rho_0 = \text{const}$ . Po uwzględnieniu tego założenia,

dla małych odkształceń, ( $\varepsilon_\varphi \varepsilon_r = \frac{u}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \approx 0$ ,  $\varepsilon_\varphi^2 = \left(\frac{u}{r}\right)^2 \approx 0$ ) równanie (2.4) można

zredukować do postaci:

$$\frac{\partial u}{\partial r} + 2\frac{u}{r} = 0. \quad (2.5)$$

Z dynamicznej równowagi elementu osłony, zapisanej we współrzędnych Lagrange'a  $r$ ,  $t$ , po przekształceniach otrzymuje się ogólne równanie ruchu tego elementu w następującej postaci:

$$\rho_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \left(1 + \frac{u}{r}\right)^2 \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + 2\left(1 + \frac{u}{r}\right) \left(1 + \frac{\partial u}{\partial r}\right) \frac{\sigma_r - \sigma_\varphi}{r}. \quad (2.6)$$

Dla odkształceń, wyrażonych wzorami (2.1), po pominięciu małych wyższego rzędu, równanie (2.6) można zredukować do postaci:

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + 2\frac{\sigma_r - \sigma_\varphi}{r} = \rho_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \quad (2.7)$$

Przejdziemy obecnie do modelowania ruchu gazowych produktów wybuchu (GPW) materiału wybuchowego (MW). Dla określenia początkowych parametrów stanu GPW zastosujemy hipotezę natychmiastowej (momentalnej) detonacji ładunku MW. Stosowanie tej hipotezy w praktyce inżynierskiej jest uzasadnione małym udziałem energii kinetycznej w bilansie energetycznym GPW w fali detonacyjnej.

Jako przykład w tabeli 1 podajemy ułamkowe udziały energii potencjalnej i kinetycznej GPW w fali detonacyjnej trotylu [8] dla różnych symetrii:  $s = 1$  — symetria płaska,  $s = 2$  — symetria cylindryczna i  $s = 3$  — symetria kulista.

TABELA 1

Udział energii	$s = 1$	$s = 2$	$s = 3$
Energia potencjalna	0,9340	0,9266	0,9206
Energia kinetyczna	0,0660	0,0734	0,0794

Jak widać z zamieszczonych danych, największy udział energii kinetycznej (symetria kulista) nie przekracza 8%. Podobne wyniki uzyskuje się dla innych, stałych materiałów wybuchowych, zatem w fali detonacyjnej ponad 90% energii GPW stanowi energia potencjalna (sprężysta i cieplna). Energię kinetyczną można zaniedbać — tym samym przyjmujemy, że cząstki GPW w czasie detonacji pozostają nieruchome. W wyniku tego założenia początkowa gęstość GPW równa się gęstości materiału wybuchowego, którą oznaczymy przez  $\rho_{0e}$ . Natomiast ciśnienie początkowe  $p_{0e}$  określamy z następującego wzoru [9]:

$$p_{0e} = 0,5 p_H; \quad p_H = \frac{\rho_{0e} D^2}{k_H + 1}, \quad (2.8)$$

gdzie  $p_H$  oznacza ciśnienie GPW w punkcie Jougueta,  $D$  jest prędkością detonacji, a  $k_H$  — wykładnikiem izentropy GPW w punkcie Jougueta.

Jeśli zaniedbać zjawiska falowe w GPW i założyć, że gazowe produkty wybuchu rozszerzają się w sposób adiabatyczny, to średnią gęstość  $\rho_e(t)$  i średnie ciśnienie  $p_e(t)$  w GPW można określić z następujących wzorów:

$$\rho_{GPW}(r_0, t) = \rho_e(t) = \rho_{0e} \left[ \frac{a}{R_0(t)} \right]^3, \quad (2.9)$$

$$p_{GPW}(r_0, t) = p_e(t) = p_{0e} \left[ \frac{a}{R_0(t)} \right]^{3k_0}, \quad (2.10)$$

gdzie  $R_0(t)$  oznacza wewnętrzny bieżący promień osłony (współrzędna Eulera), który wynosi:

$$R_0(t) = a + u(a, t), \quad (2.11)$$

natomiast  $k_0$  jest skorelowanym wykładnikiem politropy GPW.

Sposób określania jego wartości podany jest w pracy [10]. Jest on nieco większy od wykładnika izentropy GPW w punkcie Jougueta ( $k_0 > k_H$ ). Przykładowe wartości  $k_0$  i  $k_H$  dla kilku klasycznych MW podajemy w tabeli 2.

TABELA 2

MW	$\rho_{0e}$ kg/m <sup>3</sup>	$p_H$ MPa	$D$ m/s	$k_H$	$k_0$
Trotyl	1630	21 000	6930	2,73	3,00
Trotyl/Heksogen 36/64	1717	29 500	7980	2,71	3,00
Oktogen	1891	42 000	9110	2,74	3,40
Pentryt	1770	33 500	8300	2,64	2,90
Nitrometan	1128	12 500	6280	2,56	2,73

Zlinearyzowany układ równań (2.5) i (2.7) rozwiążemy dla następujących warunków granicznych:

$$\sigma_r(a,t) = -p_e(t) = -p_{0e} \left[ \frac{a}{R_0(t)} \right]^{3k_0} \quad \text{dla } r = a, \quad (2.12)$$

$$\sigma_r(b,t) \equiv 0 \quad \text{dla } r = b, \quad (2.13)$$

$$u(r,0) \equiv 0 \quad \text{i} \quad v(r,0) = \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} \equiv 0. \quad (2.14)$$

Tak sformułowany problem rozwiązujemy w następnym paragrafie.

### 3. Rozwiązanie ogólne problemu

Całka ogólna równania (2.5) ma postać:

$$u(r,t) = \frac{C(t)}{r^2},$$

a ponieważ

$$u(a,t) = R_0(t) - a,$$

zatem

$$C(t) = a^2 u(a, t) = a^2 [R_0(t) - a],$$

$$u(r, t) = \frac{a^2 [R_0(t) - a]}{r^2}; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{a^2}{r^2} \ddot{R}_0(t), \quad (3.1)$$

gdzie

$$\ddot{R}_0(t) = \frac{d^2 R_0(t)}{dt^2}.$$

Z wyrażeń (2.1), (2.2) i (3.1) wynika, że:

$$\varepsilon_r(r, t) = -2 \frac{a^2 [R_0(t) - a]}{r^3}; \quad \varepsilon_\varphi(r, t) = \varepsilon_\theta(r, t) = \frac{a^2 [R_0(t) - a]}{r^3}, \quad (3.2)$$

$$\sigma_r(r, t) - \sigma_\varphi(r, t) = -6\mu \frac{a^2 [R_0(t) - a]}{r^3}. \quad (3.3)$$

Po podstawieniu zależności (3.1) i (3.3) do równania ruchu (2.7) i scałkowaniu względem  $r$ , otrzymuje się:

$$\sigma_r(r, t) = -4\mu \frac{a^2 [R_0(t) - a]}{r^3} - \rho_0 \frac{a^2}{r} \ddot{R}_0(t) + A(t), \quad (3.4)$$

gdzie  $A(t)$  jest dowolną funkcją czasu.

Z warunku brzegowego (2.13) i wyrażenia (3.4) wynika, że:

$$A(t) = 4\mu \frac{a^2 [R_0(t) - a]}{b^3} + \rho_0 \frac{a^2}{b} \ddot{R}_0(t) \quad (3.5)$$

i naprężenie  $\sigma_r(r, t)$  można określić wzorem:

$$\sigma_r(r, t) = -\rho_0 a^2 \left( \frac{b-r}{br} \right) \ddot{R}_0(t) - 4\mu a^2 \left( \frac{b^3 - r^3}{b^3 r^3} \right) [R_0(t) - a]. \quad (3.6)$$

Z kolei, po podstawieniu wzoru (3.6) do warunku brzegowego (2.12) i przekształceniach, mamy:

$$\ddot{R}_0(t) = \frac{p_{0e}}{\rho_0} \frac{b}{a(b-a)} \left[ \frac{a}{R_0(t)} \right]^{3k_0} - 4 \frac{\mu}{\rho_0} \frac{b^2 + ab + a^2}{a^2 b^2} [R_0(t) - a]. \quad (3.7)$$

Warunki początkowe dla funkcji  $R_0(t)$ , zgodnie z zależnościami (2.14) i (3.1) mają postać:

$$R_0(0) = a; \quad v(a, 0) = \left. \frac{dR_0(t)}{dt} \right|_{t=0} = \dot{R}_0(t) \Big|_{t=0} = 0. \quad (3.8)$$

Po podstawieniu pochodnej  $\ddot{R}_0(t)$  określonej wzorem (3.7) do wyrażenia (3.6) i przekształceniach otrzymuje się:

$$\begin{aligned} \sigma_r(r, t) = & -p_{0e} \frac{a}{b-a} \frac{b-r}{r} \left[ \frac{a}{R_0(t)} \right]^{3k_0} - \\ & - 4\mu \frac{a}{b} \frac{b-r}{r} \left( \frac{a^2 b^2 + br + r^2}{b^2} - \frac{b^2 + ab + a^2}{r^2} \right) \left[ \frac{R_0(t) - a}{a} \right]. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Dalej ze wzorów (3.3) i (3.9) wynika, że:

$$\begin{aligned} \sigma_\varphi(r, t) = & -p_{0e} \frac{a}{b-a} \frac{b-r}{r} \left[ \frac{a}{R_0(t)} \right]^{3k_0} - \\ & - 2\mu \left[ 2 \frac{a}{b} \frac{b-r}{r} \left( \frac{a^2 b^2 + br + r^2}{b^2} - \frac{b^2 + ab + a^2}{r^2} \right) - 3 \frac{a^3}{r^3} \right] \left[ \frac{R_0(t) - a}{a} \right]. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Jak widać, wszystkie parametry problemu określone są zamkniętymi algebraicznymi wzorami (3.1), (3.2), (3.9) i (3.10), w których występuje funkcja  $R_0(t)$ . Funkcja  $R_0(t)$  charakteryzuje ruch wewnętrznej powierzchni osłony. Określamy ją z równania (3.7) i warunków początkowych (3.8). Równanie (3.7) jest nieliniowe i w ogólnym przypadku całkujemy je numerycznie, np. za pomocą metody Runge-Kutty. Okazuje się jednak, że w zakresie małych odkształceń równanie (3.7) można zlinearyzować.

Rzeczywiście, nieliniowy człon

$$\left[ \frac{a}{R_0(t)} \right]^{3k_0} = \left[ \frac{a}{a+u(a,t)} \right]^{3k_0} = \left[ \frac{1}{1+u(a,t)/a} \right]^{3k_0},$$

a ponieważ  $u(a, t)/a = \varepsilon_\varphi(a, t) \ll 1$ ,  
zatem

$$\left[ \frac{a}{R_0(t)} \right]^{3k_0} \approx 1$$

i równanie (3.7) redukuje się do postaci:

$$\ddot{R}_0(t) + 4 \frac{\mu}{\rho_0} \frac{b^2 + ab + a^2}{a^2 b^2} R_0(t) = \frac{p_{0e}}{\rho_0} \frac{b}{a(b-a)} + 4 \frac{\mu}{\rho_0} \frac{b^2 + ab + a^2}{ab^2}, \quad (3.11)$$

$$R_0(0) = a, \quad \dot{R}_0(t)|_{t=0} = 0. \quad (3.12)$$

#### 4. Rozwiązanie problemu zlinearyzowanego

Wprowadzimy następujące oznaczenia

$$c = \sqrt{\frac{\mu}{\rho_0}}, \quad \beta = \frac{b}{a}, \quad \xi = \frac{r}{a}, \quad \eta = \frac{t}{T_0}, \quad (4.1)$$

$$\omega_0^2 = 4 \frac{\mu}{\rho_0} \frac{b^2 + ab + a^2}{a^2 b^2} = 4 \left( \frac{c}{a} \right)^2 \frac{\beta^2 + \beta + 1}{\beta^2},$$

gdzie  $c$  oznacza prędkość propagacji fali poprzecznej w materiale osłony, a  $\omega_0$  jest kołową częstością drgań własnych osłony, tj.:  $\omega_0 = 2\pi/T_0$ ;  $T_0$  — okres drgań własnych.

Funkcja  $R_0(t)$ , po uwzględnieniu oznaczeń (4.1) określona jest następującym równaniem:

$$\ddot{R}_0(t) + \omega_0^2 R_0(t) = \left( \frac{\beta}{\beta-1} \frac{p_{0e}}{\rho_0 a} + a \omega_0^2 \right) \quad (4.2)$$

i warunkami początkowymi (3.12).



Po scałkowaniu równania (4.2) i spełnieniu warunków (3.12) otrzymuje się:

$$\frac{R_0(t)}{a} = 1 + \frac{\beta^3}{4(\beta^3 - 1)} \frac{p_{0e}}{\mu} (1 - \cos \omega_0 t) = 1 + \frac{\beta^3}{4(\beta^3 - 1)} \frac{p_{0e}}{\mu} (1 - \cos 2\pi\eta). \quad (4.3)$$

Dalej zgodnie z równaniami (3.1), (3.2), (3.9), (3.10) i (4.3) mamy:

$$\frac{u(\xi, \eta)}{a} = \frac{\beta^3}{4(\beta^3 - 1)} \frac{1}{\xi^2} (1 - \cos 2\pi\eta) \frac{p_{0e}}{\mu} \quad (4.4)$$

$$\varepsilon_\varphi(\xi, \eta) = -\frac{1}{2} \varepsilon_r(\xi, \eta) = -\frac{\beta^3}{4(\beta^3 - 1)} \frac{1}{\xi^3} (1 - \cos 2\pi\eta) \frac{p_{0e}}{\mu} \quad (4.5)$$

$$\begin{aligned} \sigma_r(\xi, \eta) = & -\frac{1}{\beta^3 - 1} \left\{ \left( \frac{\beta}{\xi} \right)^3 - 1 - \right. \\ & \left. - \left[ \left( \frac{\beta}{\xi} \right)^3 - (\beta^2 + \beta + 1) \left( \frac{\beta}{\xi} - 1 \right) - 1 \right] \cos 2\pi\eta \right\} p_{0e}. \end{aligned} \quad (4.6)$$

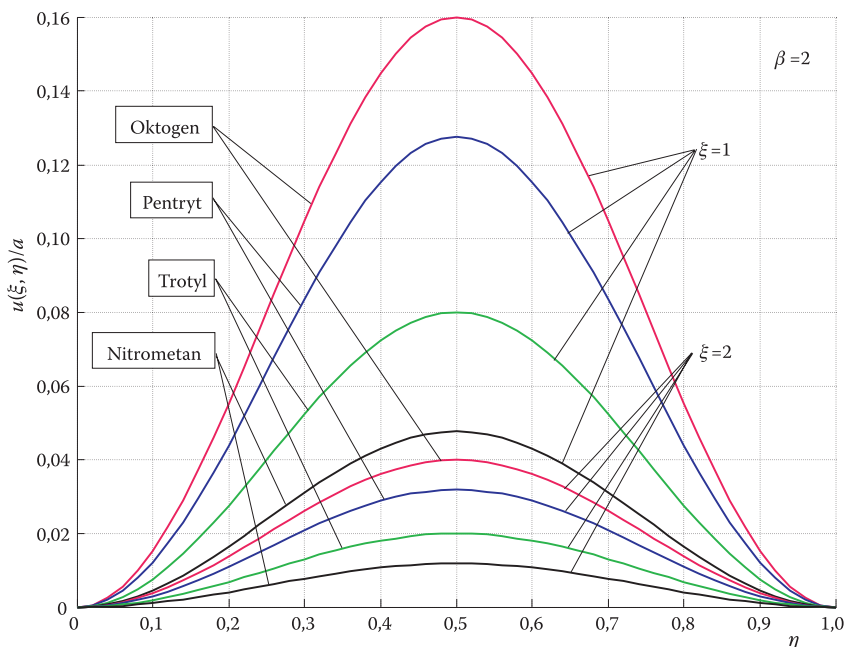
$$\begin{aligned} \sigma_\varphi(\xi, \eta) = & \frac{1}{2(\beta^3 - 1)} \left\{ 2 + \left( \frac{\beta}{\xi} \right)^3 - \right. \\ & \left. - \left[ \left( \frac{\beta}{\xi} \right)^3 + 2(\beta^2 + \beta + 1) \left( \frac{\beta}{\xi} - 1 \right) + 2 \right] \cos 2\pi\eta \right\} p_{0e}. \end{aligned} \quad (4.7)$$

W ten sposób dla problemu zlinearyzowanego otrzymaliśmy zamknięte analityczne wzory, za pomocą których można określić wszystkie kinematyczne i wytrzymałościowe parametry kulistej osłony obciążonej wewnątrz ciśnieniem produktów natychmiastowej detonacji MW. Wzory te w zakresie teorii małych odkształceń osłony są identyczne jak uzyskane w pracy [2] dla stałego ciśnienia wytworzonego nagle wewnątrz osłony.

## 5. Przykład

Przyjmujemy, że osłona wykonana jest ze stali, dla której  $\rho_0 \cong 7800 \text{ kg/m}^3$  i  $\mu = 75 \text{ GPa}$ . Obliczenia wartości parametrów wykonano dla czterech rodzajów MW, a mianowicie: oktogonu, pentrytu, trotylu i nitrometanu. Wyniki obliczeń prezentujemy w formie graficznej na rysunkach.

Na rysunku 1 przedstawiono zmianę względnego przemieszczenia  $u(\xi, \eta)/a$  wewnętrznej ( $\xi = 1$ ) i zewnętrznej ( $\xi = 2$ ) powierzchni osłony w czasie jednego okresu drgań, tj. w przedziale  $0 \leq \eta \leq 1$ , dla wybranych rodzajów materiałów wybuchowych. Jak widać, maksymalne wartości przemieszczenia są osiągane dla  $\eta = 0,5$  i występują na wewnętrznej powierzchni osłony. Przemieszczenie podczas procesu drgań przyjmuje tylko wartości dodatnie. Dla rozpatrzonych rodzajów MW można zauważyć, że jest spełniony warunek małych odkształceń, tj.  $u/a \ll 1$ .

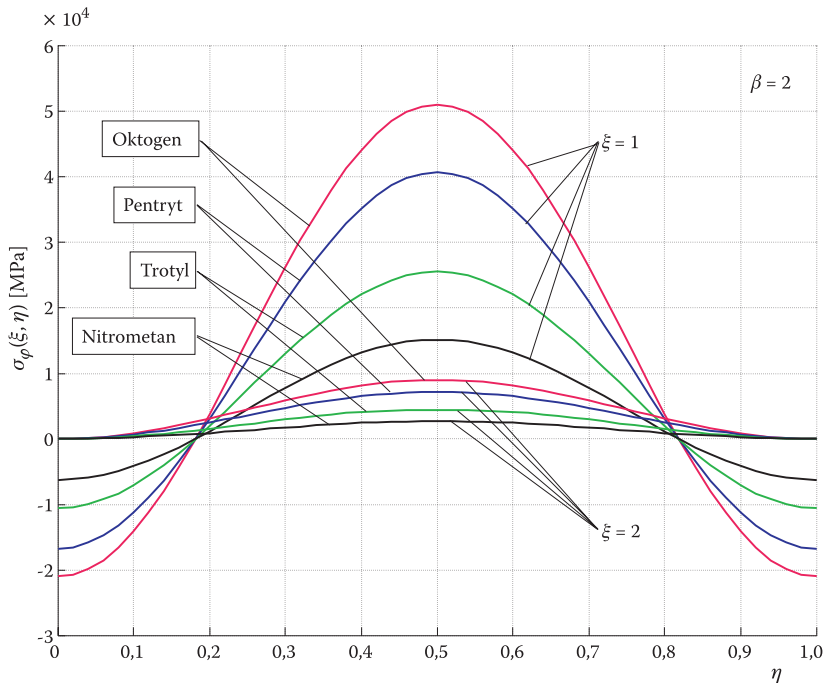


Rys. 1. Zmiana względnego przemieszczenia  $u(\xi, \eta)/a$  wewnętrznej ( $\xi = 1$ ) i zewnętrznej ( $\xi = 2$ ) powierzchni osłony w przedziale  $0 \leq \eta \leq 1$  dla wybranych rodzajów MW

Zmiana naprężenia  $\sigma_\varphi$  dla przyjętego układu danych jak na rysunku 1 prezentowana jest na rysunku 2. Należy zwrócić uwagę na fakt, że naprężenie obwodowe  $\sigma_\varphi$  na wewnętrznej powierzchni osłony ( $\xi = 1$ ) zmienia znak podczas jej drgań. Na początku i przy końcu okresu drgań wewnętrznej powierzchni osłony naprężenie  $\sigma_\varphi$  jest ujemne (ściskające). Wartości zerowe  $\sigma_\varphi(1, \eta)$  podczas okresu drgań  $T_0$  występują dla:

$$\eta = \frac{1}{2\pi} \arccos \frac{2 + \beta^3}{3\beta^3}.$$

Na przykład dla  $\beta = 2$  mamy  $\eta_1 = 0,182$  i  $\eta_2 = 0,82$  (patrz rys. 2).

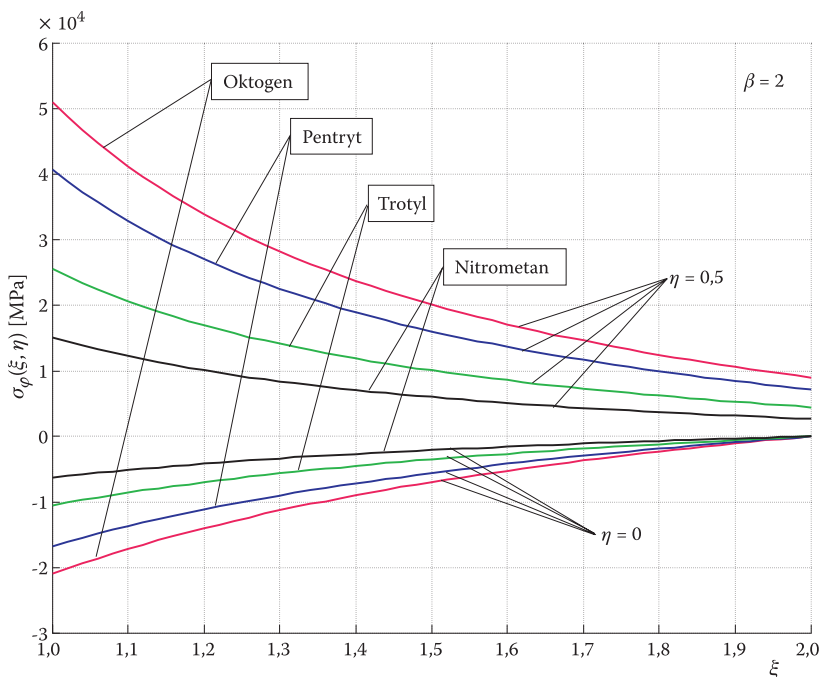
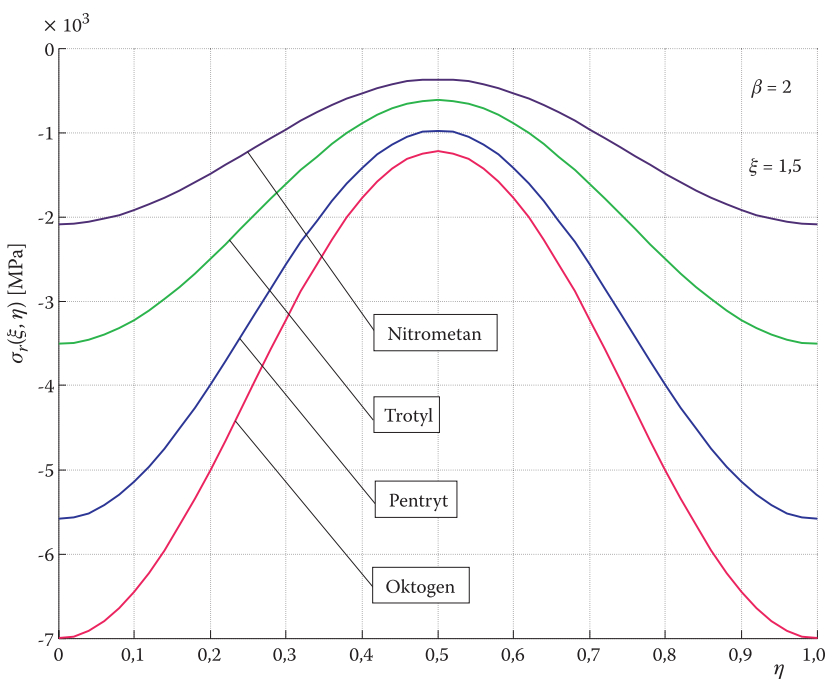


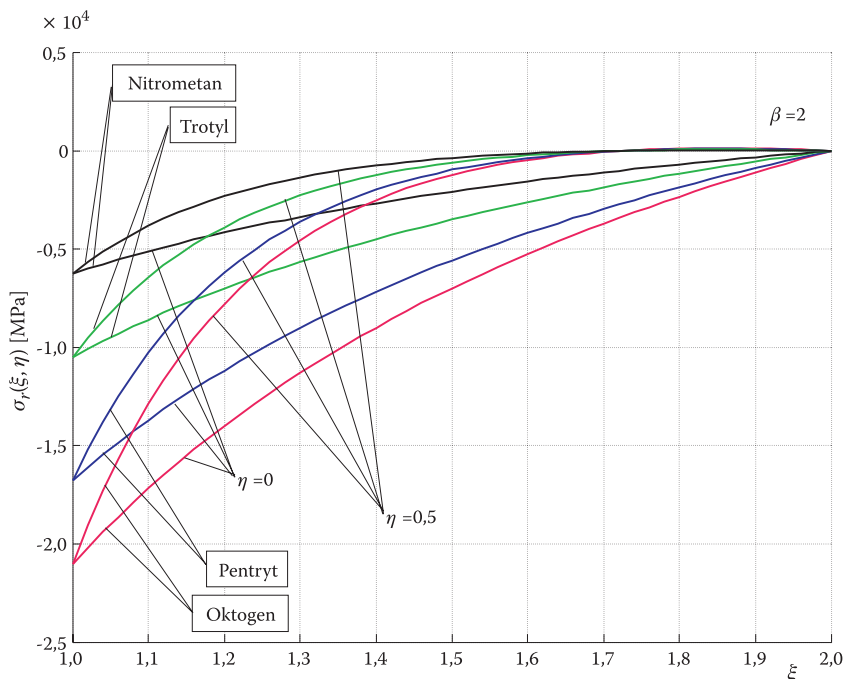
Rys. 2. Zmiana naprężenia obwodowego  $\sigma_\varphi$  na wewnętrznej ( $\xi = 1$ ) i zewnętrznej ( $\xi = 2$ ) powierzchni osłony w funkcji  $\eta$

Z kolei na rysunku 3 przedstawiono zmianę  $\sigma_\varphi$  w funkcji zmiennej  $\xi$  dla dwóch wartości czasu ( $\eta = 0$  i  $\eta = 0,5$ ). Jak widać, naprężenie obwodowe jest monotonicznie malejącą funkcją promienia ( $\xi$ ). Zwróćmy uwagę na fakt, że na zewnętrznej powierzchni osłony, niezależnie od rodzaju materiału wybuchowego w chwili początkowej ( $\eta = 0$ ) naprężenie  $\sigma_\varphi(0,2) = 0$ , natomiast dla  $\eta \neq 0$  naprężenie obwodowe na swobodnej powierzchni osłony ( $\xi = 2$ )  $\sigma_\varphi(\eta, 2) \neq 0$  i jest zróżnicowane rodzajem MW.

Zmiana naprężenia radialnego  $\sigma_r$  w czasie i przestrzeni pokazana jest fragmentarycznie na rysunkach 4 i 5. Z zamieszczonych wykresów wynika, że pole naprężeń radialnych podczas drgań osłony ulega silnej dyspersji czasowej i przestrzennej.

Z analizy pól naprężeń w osłonie wynika wniosek, że wewnętrzne jej obciążenie produktami natychmiastowej detonacji MW powoduje plastyczne odkształcenia osłony. Dlatego przedstawione w niniejszej pracy rozwiązanie ma ograniczone zastosowanie. Stanowi ono wstęp do rozwiązania problemu dynamiki osłony balistycznej w zakresie sprężysto-plastycznym. Zagadnieniem tym zajmiemy się w oddzielnym opracowaniu.

Rys. 3. Zmiana naprężenia  $\sigma_\varphi$  w funkcji  $\xi$  dla  $\eta = 0$  i  $\eta = 0,5$ Rys. 4. Zmiana naprężenia  $\sigma_r$  w funkcji  $\eta$  w środkowym przekroju ( $\xi = 1,5$ ) osłony

Rys. 5. Zmiana naprężenia  $\sigma_r$  w funkcji  $\xi$  dla  $\eta = 0$  i  $\eta = 0,5$ 

Artykuł wpłynął do redakcji 21.02.2008 r. Zweryfikowaną wersję po recenzji otrzymano w marcu 2008 r.

## LITERATURA

- [1] E. WŁODARCZYK, Z. GŁODOWSKI, R. PASZKOWSKI, *Radialne drgania grubościennnej rury wymuszone wewnętrznym ciśnieniem impulsowym*, Biul. WAT, 54, 10, 2005, 31-48.
- [2] E. WŁODARCZYK, M. ZIELENKIEWICZ, *Dynamika grubościennnej kulistej osłony obciążonej wewnętrznym ciśnieniem zmiennym w czasie*, Biul. WAT, 56, 2, 2007, 123-145. (Przekład na język angielski: *Dynamics of a thick-walled spherical casing loaded with a time depending internal pressure*, JTAM, 46, 1, 2008, 21-40).
- [3] W. P. WALTERS, J. A. ZUKAS, *Fundamentals of shaped charges*, New York: A. Wiley-Interscience Publication, 1989.
- [4] E. WŁODARCZYK, J. JANISZEWSKI, M. MAGIER, *Analiza koncentracji osiowego naprężenia w rdzeniu wydłużonego pocisku podkalibrowego podczas strzału*, Biul. WAT, 53, 2-3, 2004, 109-132.
- [5] E. WŁODARCZYK, J. JANISZEWSKI, *Static and dynamic ductility of copper and its sinters*, J. Tech. Phys., 45, 4, 2004, 263-274.
- [6] E. WŁODARCZYK, J. JANISZEWSKI, Z. GŁODOWSKI, *Dynamiczny stan naprężenia i odkształcenia w cienkim, rozszerzonym wybuchowo metalowym pierścieniu*, Biul. WAT, 54, 2-3, 2005, 109-119.
- [7] W. NOWACKI, *Teoria sprężystości*, Warszawa, PWN, 1970.
- [8] Т. М. Саламахин, *Физические основы механического действия взрыва и методы определения взрывных нагрузок*, Москва, Издание ВИА, 1974.

- [9] Ф. А. Баум, Л. П. Орленко, К. П. Станюкович, В. П. Чельшев, Б. И. Шехтер, *Физика взрыва*, Наука, Москва, 1975.
- [10] E. WŁODARCZYK, *Płaski rozlot rzeczywistych produktów detonacji. Zamknięte rozwiązania*, Biul. WAT, 33, 6, 1984, 3-33. (Przekład na język angielski: *Plane expansion of real detonation products. Closed form solutions*, J. Tech. Phys., 25, 3-4, 1984, 367-392.

E. WŁODARCZYK, M. ZIELENKIEWICZ

**Vibration of thick-walled spherical ballistic casing loaded with inner pressure surge of products of abrupt explosive detonation**

**Abstract.** The problem of radial vibration of the thick-walled spherical ballistic casing loaded with inner pressure surge of the detonation products of a high explosive has been solved. The abrupt detonation of high explosive has been considered.

The density of casing material was assumed as constant during a vibration process. The wave motion of the detonation products has been neglected. The adiabatic process of the compression and expansion of the detonation products during the casing vibration has been assumed. Under such assumptions, on the basis of small strains theory, the closed form of an analytical solution of the considered problem has been solved. It follows from this solution that during the casing vibration, the pressure of detonation products changes insignificantly and can be approximated by their initial values.

**Keywords:** spherical ballistic casing, forced vibrations, pulsed internal pressure, abrupt detonation high explosive

**Universal Decimal Classification:** 623.52