



## Wybór związku konstytutywnego do analizy zachowania się materiału pierścienia rozpęczanego impulsowym silnym polem elektromagnetycznym

ROBERT PANOWICZ, EDWARD WŁODARCZYK\*,  
JACEK JANISZEWSKI\*

Wojskowa Akademia Techniczna, Instytut Optoelektroniki, \*Wydział Mechatroniki,  
00-908 Warszawa, ul. S. Kaliskiego 2

**Streszczenie.** W pracy dokonano analizy wybranych równań konstytutywnych opisujących zachowanie się metali w warunkach dynamicznego odkształcenia zachodzącego z bardzo dużymi szybkościami. Analizę tę wykonano w kontekście wyboru związku konstytutywnego, który najbardziej poprawnie opisuje zachowanie się metalu podczas rozpęczania cienkościennego pierścienia za pomocą silnego impulsowego pola elektromagnetycznego. Jako kryterium wyboru związku konstytutywnego przyjęto jakościową/ilościową zgodność wyników numerycznych z analogicznymi danymi doświadczalnymi zaczerpniętymi z pracy [1]. W wyniku analizy stwierdzono, że największą zgodność z eksperymentem otrzymano przy zastosowaniu związku Steinberga-Guinana oraz PTW.

**Słowa kluczowe:** dynamiczne właściwości metali, równania konstytutywne, metoda pierścieniowa  
**Symbole UKD:** 669.018.2

### 1. Wprowadzenie

Badanie reakcji materiałów na ekstremalne warunki dynamicznych obciążeń realizowanych w bardzo krótkim czasie jest interdyscyplinarną dziedziną nauki [2]. Zjawiska, które mają miejsce, kiedy ciało jest poddawane gwałtownej zmianie obciążeń, zwykle są znacząco różne od tych, które występują w warunkach statycznych i quasi-statycznych. Badanie tych zjawisk należy do bardzo trudnych i złożonych zagadnień, a ponadto wymaga stosowania nietypowej i drogiej aparatury doświadczalnej.

Dotychczas opracowano kilka metod eksperymentalnych umożliwiających badanie materiałów w warunkach dynamicznego obciążenia, do których można zaliczyć: dzielony pręt Hopkinsona (ang. *split Hopkinson pressure bar*) [3], uderzeniowy test Taylora (ang. *impact Taylor test*) [4], test typu płyta-płyta (ang. *planar plate impact method*) [5], a także test pierścieniowy (ang. *freely expanding ring test*) [6].

Stosunkowo prostą i wciąż rozwijaną techniką dynamicznych badań materiałów jest metoda pierścieniowa. Pozwala ona badać materiały przy szybkościach odkształceń od  $10^2 \text{ s}^{-1}$  do  $10^5 \text{ s}^{-1}$ . Największe prędkości odkształceń ( $\sim 5 \times 10^5 \text{ s}^{-1}$ ) uzyskuje się przy wybuchowym napędzaniu pierścienia. Jeżeli jednak nie jest konieczne badanie materiału z tak dużymi szybkościami odkształceń, to do napędzania pierścienia można użyć impulsowego pola elektromagnetycznego [7]. Elektromagnetyczna metoda pierścieniowa pozwala osiągać szybkość odkształcenia rzędu  $10^4 \text{ s}^{-1}$ . Przy maksymalnej szybkości odkształcenia ekspansja pierścienia zachodzi z prędkością radialną wynoszącą około 400 m/s.

Od kilku lat w Wojskowej Akademii Technicznej prowadzone są prace badawcze dotyczące określania dynamicznych właściwości materiałów za pomocą metody pierścieniowej [8]. Do tej pory badano materiały za pomocą metody wybuchowego rozszerzania pierścienia, w której do rejestracji radialnego ruchu ścianek pierścienia stosowano technikę rentgenografii impulsowej. Obecnie rozpoczęto prace badawcze, których celem jest zbudowanie stanowiska do elektromagnetycznego rozszerzania próbek pierścieniowych. Równocześnie podjęto prace teoretyczne [9, 10] i teoretyczno-numeryczne dotyczące opracowania modelu matematyczno-fizycznego, który opisywałby dynamiczne właściwości materiału cienkościennego pierścienia, rozszerzającego się radialnie pod działaniem sił silnego impulsowego pola elektromagnetycznego. Przy budowie tego modelu, podstawowym problemem okazał się wybór równania konstytutywnego, które najlepiej opisywałoby zachowanie się materiału w warunkach elektromagnetycznego rozszerzania pierścienia.

W związku z tym, w niniejszym artykule podjęto próbę analizy przydatności wybranych związków konstytutywnych w symulacji procesu elektromagnetycznego rozszerzania pierścienia. Wyboru związku konstytutywnego dokonano, stosując metodykę analizy porównawczej, a za punkt odniesienia przyjęto wyniki badań doświadczalnych zaprezentowane w pracy [1].

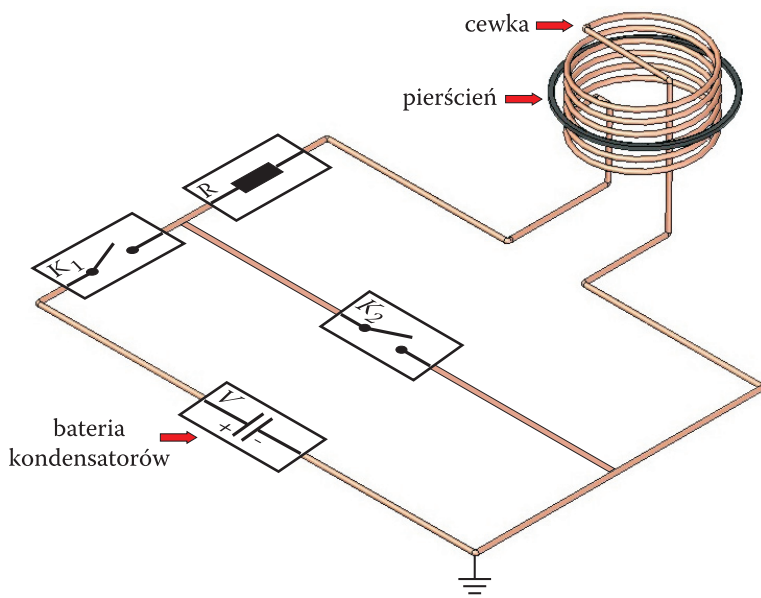
## 2. Elektromagnetyczna metoda pierścieniowa

W porównaniu z wybuchową metodą pierścieniową, technika rozpęczniania pierścienia za pomocą pola elektromagnetycznego posiada kilka istotnych zalet [11], a mianowicie: (1) Ruch jest nadawany próbce pierścieniowej w wyniku działania sił masowych zamiast obciążenia uderzeniowego, w wyniku czego nie występują początkowe zjawiska uderzeniowe (falowe). (2) Warunki obciążenia próbki są dużo

łatwiejsze do kontrolowania, dzięki możliwości zmiany szybkości narastania i amplitudy impulsu prądowego napędzającego próbkę pierścieniową. (3) Badanie materiałów tą metodą można przeprowadzać w typowych warunkach laboratoryjnych, podczas gdy w przypadku metody wybuchowej należy wykonywać je w specjalnie przygotowanych pomieszczeniach (bunkrach). Elektromagnetyczna metoda pierścieniowa nie jest też pozbawiona wad. Możemy do nich zaliczyć: nagrzewanie się materiału próbki w wyniku przepływu prądu (nagrzewanie indukcyjne) oraz możliwość powstawania, podczas fragmentacji pierścienia, łuku elektrycznego, który wywołuje dodatkowe, lokalne nagrzewanie się materiału, powodując zmianę warunków eksperymentu.

Radialne rozszerzanie metalowych pierścieni za pomocą impulsowego pola elektromagnetycznego zachodzi ogólnie w rezultacie wzajemnego oddziaływania pól elektromagnetycznych, które powstają w wyniku przepływu prądów przez cewkę i rozszerzany pierścień. Schemat stanowiska laboratoryjnego realizującego elektromagnetyczne rozszerzanie pierścienia przedstawiono na rysunku 1. Układ elektryczny składa się ze źródła zasilania w postaci baterii kondensatorów, dwóch kluczy, cewki oraz badanego cienkościennego pierścienia wykonanego z przewodzącego materiału.

Cały proces radialnego rozpęczniania metalowego pierścienia odbywa się następująco: początkowo kondensatory są ładowane do napięcia  $V_0$  (zazwyczaj wartości napięcia ładowania mieszczą się w przedziale od 4 do 10 kV), a następnie obwód elektryczny zasilania jest zamykany kluczem  $K_1$  (rys. 1). W obwodzie



Rys. 1. Schemat ideowy układu elektromagnetycznego rozpęczniania metalowych pierścieni;  $K_1, K_2$  — klucze przełączające,  $V$  — napięcie na kondensatorach,  $R$  — rezystancja obwodu

zaczyna płynąć prąd, który osiąga wartość kilkudziesięciu kiloamperów. Płynący, zmienny w czasie prąd generuje zmienne pole elektromagnetyczne wokół cewki. W wyniku tego, przez metalowy pierścień, który jest osadzony na cewce, tak jak to pokazano na rysunku 1, przechodzi zmienny w czasie strumień pola elektromagnetycznego. Indukuje on w pierścieniu prąd, którego kierunek jest przeciwny do kierunku prądu w obwodzie cewki. Prąd ten z kolei indukuje wokół pierścienia pole elektromagnetyczne, które wzajemnie oddziałuje z polem cewki. Konsekwencją opisanego wyżej oddziaływania jest wzajemne odpychanie się cewki i pierścienia. Duże zmiany strumienia pola magnetycznego wywołane przez duże zmiany prądu powodują pojawienie się tak dużych sił, że dochodzi do rozszerzania pierścienia z prędkościami radialnymi osiagającymi kilkaset metrów na sekundę, w przypadku sztywnego zamocowania zwojów cewki. Następnie w chwili  $t_1$ , kiedy prąd w obwodzie cewki ma małą bezwzględną wartość, przełącznik  $K_2$  odłącza od obwodu kondensatory. Od tego momentu pierścień porusza się wyłącznie dzięki siłom bezwładności, a mierzona wartość opóźnienia pierścienia jest zależna tylko od własności fizyko-mechanicznych materiału, z którego wykonano pierścień. Przyjmuje się, że w obszarze tym zarówno regresja prędkości, jak i szybkość odkształcenia jest stała. Końcowym stadium ekspansji pierścienia jest jego fragmentacja, która zachodzi po czasie charakterystycznym dla danego materiału i warunków napędzania.

Aby oszacować odkształcenia, szybkość odkształcenia oraz naprężenia występujące w pierścieniu podczas rozpękania, należy zmierzyć zmianę promienia pierścienia w czasie lub zmianę prędkości radialnej promienia w czasie. Pomiar tych wielkości jest zazwyczaj realizowany za pomocą kamery do rejestracji zjawisk szybkozmiennych, rentgenografii impulsowej lub za pomocą interferometru do pomiaru prędkości (ang. VISAR).

### 3. Równania opisujące układ badawczy pierścień-cewka

Do wyprowadzenia równań opisujących układ badawczy pierścień-cewka wykorzystano podstawowe zależności z teorii elektrodynamiki i mechaniki. Na rysunku 2 przedstawiono schematy obwodów elektrycznych, które odpowiadają konfiguracji układu badawczego w danym momencie procesu rozszerzania pierścienia.

Wykorzystując drugie prawo Kirchoffa do obwodów z rysunku 2, otrzymuje się równania opisujące prądy w układzie cewki i pierścienia:

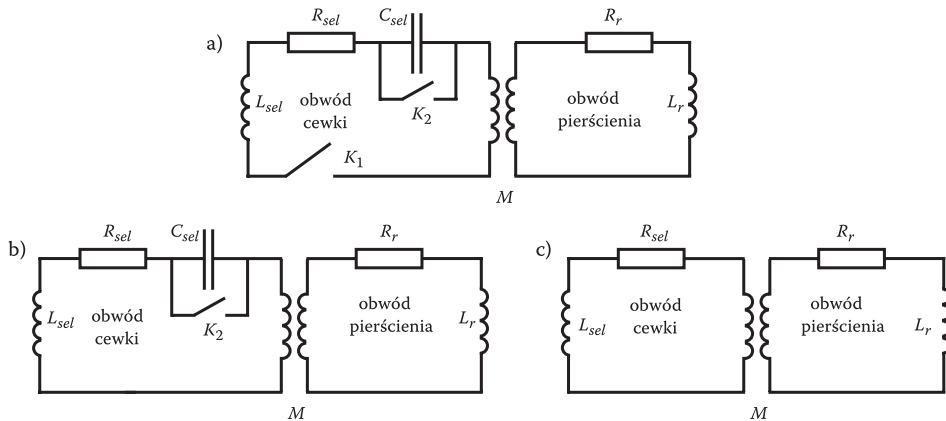
$$0 = I_{sel} R_{sel} + \delta \frac{Q}{C_{sel}} + L_{sel} \frac{dI_{sel}}{dt} + \frac{dM}{dx} v_p I_p + M \frac{dI_p}{dt} \quad (1)$$

$$0 = I_p R_p + \frac{dL_p}{dr} v_p I_p + L_p \frac{dI_p}{dt} + \frac{dM}{dr} v_p I_{sel} + M \frac{dI_{sel}}{dt} + \frac{dM}{dr} v_p I_{sel} \quad (2)$$

$$I_{sel} = \frac{dQ}{dt} \quad (3)$$

$$\delta = \begin{cases} 1 & t \leq t_1 \\ 0 & t > t_1 \end{cases}, \quad (4)$$

gdzie:  $I_p$  — prąd w elemencie badanym;  
 $R_p$  — rezystancja pierścienia;  
 $L_p$  — indukcyjność pierścienia;  
 $v_p$  — prędkość radialna pierścienia;  
 $C_{sel}$  — pojemność kondensatorów;  
 $L_{sel}$  — indukcyjność własna cewki;  
 $Q$  — ładunek zgromadzony na kondensatorze;  
 $M$  — indukcyjność wzajemna.



Rys. 2. Schematy obwodów elektrycznych dla poszczególnych etapów procesu napędzania elektromagnetycznego: (a) obwód elektryczny w chwili początkowej  $t = 0$ ; (b) obwód elektryczny dla  $t \leq t_1$ ; (c) obwód dla  $t \geq t_1$  (gdzie:  $t_1$  czas zadziałania klucza  $K_2$ ),  $R$  — rezystancja,  $C$  — pojemność,  $L$  — indukcyjność własna,  $M$  — indukcyjność wzajemna,  $K_1, K_2$  — klucze przełączające

Człony, w których występuje prędkość pierścienia, są związane ze zmianą parametrów elektrycznych układu na skutek zmiany promienia pierścienia.

Indukcyjność pierścienia opisuje zależność [12, 15]:

$$L_p = \mu_0 \mu_m r \left[ \ln \left( \frac{8r}{r_{prz}} \right) - 2 + \phi \right], \quad (5)$$

gdzie:  $\mu_0$  — przenikalność dielektryczna próżni;  
 $\mu_m$  — przenikalność dielektryczna ośrodka;

$r_{prz}$  — promień przewodnika;  
 $\phi$  — współczynnik:  $\phi = 0$ , kiedy prąd płynie po powierzchni przewodnika (efekt naskórkowy) i  $\phi = 1/4$ , kiedy jest równomiernie rozłożony w przewodniku.

Zakładając, że w pierścieniu występuje tylko obwodowy (jednowymiarowy) stan naprężenia oraz liniowy rozkład pola magnetycznego, równanie ruchu pierścienia można przedstawić w postaci:

$$\frac{dv_p}{dt} = \mu\mu_0 \frac{b(r)}{4\pi\rho A_p} I_p I_{sel} + \frac{1}{4\pi\rho_p A_p} \frac{dL_p}{dr} \frac{I_r^2}{r} - \frac{\sigma_\varphi}{r\rho_p}, \quad (6)$$

gdzie:  $\rho_p$  — gęstość;  
 $r$  — promień bieżący pierścienia (współrzędna Eulera);  
 $A_p$  — pole przekroju poprzecznego;  
 $\sigma_\varphi$  — naprężenie występujące w pierścieniu;  
 $b(r)$  — czynnik geometryczny wynikający z zastosowania prawa Biota-Savarta do cewki [13].

W rozpatrywanym problemie przyjęto, że gęstość próbki  $\rho = \text{const}$ .

Przyjęcie takich założeń pociąga za sobą konieczność stosowania pierścieni o niewielkim przekroju poprzecznym. Stosowane cewki i pierścienie mają średnicę rzędu kilku centymetrów, nakłada to wymóg stosowania próbek o rozmiarze charakterystycznym (grubość pierścienia) nie większym niż kilka milimetrów. W przeciwnym wypadku występują duże rozbieżności pomiędzy wynikami eksperymentalnymi a teoretycznymi, czy też symulacjami komputerowymi.

Pierwszy człon równania (6) związany jest z siłą Lorentza działającą na badany element znajdujący się w polu magnetycznym cewki. Charakter drugiego członu jest taki sam, ale związany jest z prądem indukowanym w elemencie badanym i wytworzonym przez ten prąd polem magnetycznym. Obie te siły powodują rozszerzanie pierścienia. Przeciwdziała im siła związana z wytrzymałością pierścienia — trzeci człon równania. Końcowa faza procesu, gdy odłączone są kondensatory ( $t > t_1$ ), decyduje o zachowaniu próbki. Wartość opóźnienia, z jakim porusza się próbka, zależy liniowo od występującego w niej naprężenia. Naprężenie to opisuje w zakresie sprężystym prawo Hooke'a, a w zakresie plastycznym — przyjęty związek konstytutywny danego materiału. Zakres stosowalności prawa Hooke'a określa warunek plastyczności Hubera-Misesa-Hencky'ego lub Treski. W obliczeniach stosowano pierwszy z tych warunków.

Przepływ dużych prądów w elemencie badanym, mimo jego niewielkiego oporu, powoduje wydzielenie znacznych ilości ciepła, które podnosi temperaturę elementu, przez co wpływa na zmianę jego własności mechanicznych. Drugą przyczyną

ogrzewania się próbki są odkształcenia plastyczne. Przy założeniu braku wymiany ciepła z otoczeniem i uwzględnieniu zjawisk wpływających na temperaturę badanego elementu równanie energii przyjmuje postać:

$$c_{pp} m_p \frac{dT_p}{dt} = R_p I_p^2 + \chi \sigma_\varphi \frac{d\varepsilon_{pp}}{dt} V_p, \quad (7)$$

gdzie:  $c_{pp}$  — ciepło właściwe przy stałym ciśnieniu;  
 $m_p$  — masa elementu badanego;  
 $V_p$  — objętość próbki;  
 $\varepsilon_{pp}$  — odkształcenie plastyczne w próbce;  
 $T_p$  — temperatura próbki;  
 $\chi = 0,9$  — czynnik Taylora-Quinney'a określający, jaka część energii pochodzącej z odkształceń plastycznych jest zamieniana na ciepło.

Przyczyną zmiany temperatury cewki jest tylko i wyłącznie płynący przez nią prąd, dlatego:

$$c_{psel} m_{sel} \frac{dT_{sel}}{dt} = R_{sel} I_{sel}^2, \quad (8)$$

gdzie:  $m_{sel}$  — masa cewki;  
 $T_{sel}$  — temperatura cewki;  
 $c_{psel}$  — ciepło właściwe przy stałym ciśnieniu.

Ciepło właściwe określano z zależności:

$$C_p = A_c + B_c T, \quad (9)$$

$$c_p = C_p / M_{atm}, \quad (10)$$

gdzie:  $A_c, B_c$  — stałe;  
 $C_p$  — pojemność cieplna;  
 $M_{atm}$  — masa atomowa.

Natomiast rezystancję przewodników z:

$$R_{sel} = R_{sel0} \left[ 1 + a_{op\ sel} (T_{sel} - T_0) \right] \quad (11)$$

$$R_p = \frac{2\pi r}{A_p} \xi_p \left[ 1 + a_{opr} (T_p - T_0) \right], \quad (12)$$

gdzie:  $R_{sel0}$  — rezystancja cewki w temperaturze odniesienia  $T_0$ ;

$a_{opl}$  — współczynnik temperaturowy;  
 $\xi_p$  — opór właściwy,

a zmianę szybkości odkształcenia plastycznego pierścienia z [1]:

$$\frac{d\varepsilon_{pp}}{dt} = \frac{\dot{\varepsilon}_{tot p} \frac{d\sigma_\phi}{E_p d\dot{\varepsilon}_{tot p}} - \frac{1}{E_p} \frac{R_p I_p^2}{c_{pp} V_p \rho_p} \frac{d\sigma_\phi}{dT_p}}{1 + \frac{1}{E_p} \frac{d\sigma_p}{d\varepsilon_{pp}} + \frac{\sigma_\phi}{E_p c_{pp} \rho_p} \frac{d\sigma_\phi}{dT_p}}, \quad (13)$$

gdzie:  $E_p$  — moduł Younga badanego materiału;  
 $\varepsilon_{tot p}$  — odkształcenie w elemencie badanym;  
 $\dot{\varepsilon}_{tot p} = v_p / r$ ,  $\ddot{\varepsilon}_{tot p} = \dot{v}_p / r - (v_p / r)^2$ .

Przedstawiony wyżej układ równań (1)-(13) wraz z wybranym związkiem konstytutywnym rozwiązywano za pomocą metod numerycznych.

#### 4. Związki konstytutywne

Jak wspomniano wyżej, ruch pierścienia, w drugiej fazie eksperymentu, zależy praktycznie tylko od własności fizyko-mechanicznych elementu. Znając prędkość lub położenie elementu, w różnych chwilach, można określić niektóre parametry związku konstytutywnego opisującego materiał, z którego wykonana jest próbka. Jednak nie wszystkie związki w równym stopniu odzwierciedlają zachodzące zjawiska w próbce. Dlatego należy sprawdzić, który związek konstytutywny będzie najlepiej opisywał zachowanie się próbki w kształcie cienkościennego pierścienia.

W pracy poddano analizie pięć najczęściej stosowanych w badaniach dynamicznych związków konstytutywnych:

- a) Johnsona-Cooka,
- b) Steinberga-Guinana,
- c) Zerilli-Armstronga dla metali o strukturze fcc,
- d) MTS,
- e) PTW.

Analizy dokonywano, modelując zachowanie się ekspandującego pierścienia wykonanego z miedzi, dla której dostępne są rzetelne dane teoretyczne i eksperymentalne. Do obliczeń wykorzystano literaturowe wartości parametrów opisujących badany materiał, którego właściwości fizyczno-mechaniczne odpowiadają miedzi badanej doświadczalnie w pracy [1] — miedź w gatunku OFE o wielkości ziarna  $10 \mu\text{m}$  i twardości 60 HV.



### Związek Johnsona-Cooka

W 1983 roku Johnson i Cook (JC) zaproponowali pierwszy fenomenologiczny związek o szerokim zakresie stosowania. Prawo to obejmuje: zakres wysokich temperatur, dużych odkształceń i szybkości odkształcenia. Jest jednym z prostszych równań, dla którego dostępne są liczne dane materiałowe.

Naprężenie w obszarze odkształceń plastycznych (ang. *flow stress*) w tym związku wyrażone jest zależnością:

$$\sigma = \left( A + B(\varepsilon_p)^n \right) \left( 1 + C \ln \frac{\dot{\varepsilon}_{tot}}{\dot{\varepsilon}_0} \right) (1 - T^{*m}) \quad (14)$$

$$T^* = \frac{T - T_0}{T_m - T_0}, \quad (15)$$

gdzie:  $A, B, C, n, m$  — stałe materiałowe;  
 $T_m$  — temperatura topnienia.

Dane materiałowe użyte do obliczeń zawarto w tabeli 1.

TABELA 1

Stałe materiałowe miedzi dla związku Johnsona-Cooka [2]

$A$ [MPa]	$B$ [MPa]	$C$ [-]	$n$ [-]	$m$ [-]	$T_m$ [K]
90	292	$2,5 \cdot 10^{-2}$	0,31	1,09	1356,15

### Związek Steinberga-Guinana

Do tej samej grupy związków — eksperymentalnych — zaliczamy równanie opracowane przez Steinberga i Guinana (SG) [17]. Podstawową różnicą pomiędzy związkiem Johnsona-Cooka a omawianym jest brak, w tym drugim, członu wiążącego wartość naprężenia uplastycznienia i szybkość odkształcenia plastycznego. Równanie to opisują następujące zależności:

$$\sigma = \sigma_0 (1 + \beta \varepsilon^p)^n \left[ 1 + bp(\rho_0/\rho)^{1/3} - h(T - 300) \right] \quad (16)$$

$$\sigma_0 (1 + \beta \varepsilon^p)^n \leq \sigma_{\max} \quad (17)$$

$$\sigma = 0 \text{ dla } T > T_m, \quad (18)$$

gdzie:  $\beta, n, b, h, \sigma_0, \sigma_{\max}$  — stałe;  
 $p$  — ciśnienie;  
 $\rho_0$  — gęstość początkowa.

Zależność na ciśnienie przyjmowano za [16] w postaci:

$$p = k_1 x + k_2 x^2 + k_3 x^3 + \gamma_0 \rho_0 E \quad (19)$$

$$x = 1 - \rho_0 / \rho \quad (20)$$

$$k_2 = 0 \quad x < 0 \quad (21)$$

$$T = 300 \frac{E_0 - E}{E_{00}} \quad (22)$$

$$E_0 = E_{00} + E_{01}x + E_{02}x^2 + E_{03}x^3 + E_{04}x^4, \quad (23)$$

gdzie:  $E$  — energia wewnętrzna właściwa;  
 $E_{00}, E_{01}, E_{02}, E_{03}, E_{04}, k_1, k_2, k_3$  — parametry;  
 $\gamma_0$  — współczynnik Grüneisena.

Dane wykorzystane w obliczeniach zawarto w tabeli 2.

TABELA 2

Stałe materiałowe miedzi dla związku Steinberga-Guinana [16, 17]

$\sigma_0$ [MPa]	$\sigma_{\max}$ [MPa]	$\beta$ [-]	$n$ [-]
120	600	36	0,45
$b$ [Gpa <sup>-1</sup> ]	$T_m$ [K]	$h$ [K <sup>-1</sup> ]	$\gamma_0$ [-]
0,03	1790	$3,8 \cdot 10^{-4}$	1,99
$E_{00}$ [J/kg]	$E_{01}$ [J/kg]	$E_{02}$ [J/kg]	$E_{03}$ [J/kg]
$-1,178 \cdot 10^5$	$-2,344 \cdot 10^5$	$7,529 \cdot 10^6$	$1,526 \cdot 10^7$
$E_{04}$ [J/kg]	$k_1$ [GPa]	$k_2$ [GPa]	$k_3$ [GPa]
$2,19 \cdot 10^7$	138,6	274,9	511,3

### Związek Zerilli-Armstronga dla metali o strukturze fcc

Równanie konstytutywne opracowane przez F. J. Zerillego i R. W. Armstronga (ZA) w 1987 roku na podstawie teorii dyslokacji [14] jest pierwszym związkiem opartym na przesłankach fizycznych, a nie tylko eksperymentalnych. Każda struktura krystalograficzna materiału (bcc, fcc, HPC) opisana jest trochę innym związkiem konstytutywnym, gdyż inaczej zachowuje się pod wpływem dynamicznych obciążeń.

Autorzy tego równania przyjęli, że naprężenia plastycznego płynięcia można przedstawić w postaci:

$$\sigma = \Delta\sigma'_G + \sigma_{th}(T, \dot{\varepsilon}), \quad (24)$$

gdzie: pierwszy człon jest stałym, atermicznym członem określonym przez długozasięgowe bariery — np. granice ziaren występujących w materiale, a drugi opisuje wpływ krótkozasięgowych barier — płaszczyzn poślizgu, które mogą być przekraczane, gdy materiał będzie miał odpowiednią energię termiczną — temperaturę. Korzystając z teorii dyslokacji, można przedstawić ten człon, dla metali typu fcc, w postaci:

$$\sigma_{th}(T, \dot{\varepsilon}) = s_1 \varepsilon^{1/2} \exp(-s_2 T + s_3 T \ln \dot{\varepsilon}). \quad (25)$$

Na wartość plastycznego płynięcia ma wpływ także wielkość ziaren materiału. Zależność ta jest zwykle opisywana równaniem Hall-Petcha.

Gdy uwzględni się te zależności, równanie (24) przyjmuje postać:

$$\sigma = \Delta\sigma'_G + s_1 \varepsilon^{1/2} \exp(-s_2 T + s_3 T \ln \dot{\varepsilon}) + kd^{-1/2}, \quad (26)$$

gdzie:  $\Delta\sigma'_G$ ,  $s_1$ ,  $s_2$ ,  $s_3$ ,  $k$  — stałe materiałowe;  
 $d$  — średnica ziaren.

Wartości stałych w związku przyjęto za Zerillim i Armstrongiem [14] (tab. 3).

TABELA 3

Stałe materiałowe dla związku Zerilli-Armstronga [14]

$\Delta\sigma'_G$ [MPa]	$s_1$ [MPa]	$s_2$ [K <sup>-1</sup> ]	$s_3$ [K <sup>-1</sup> ]	$k$ [MPa x mm <sup>1/2</sup> ]
46,5	890	0,0028	0,000115	5

### Związek MTS

Związek MTS (ang. *mechanical threshold stress*) (Follansbee i Kocks 1988 r.) oparty jest na tych samych przesłankach fizycznych jak zależność Zerillego i Armstronga (teoria dyslokacji). Ma on ogólną formę w postaci [19, 20]:

$$\sigma(\varepsilon_p, \dot{\varepsilon}, T) = \sigma_a + \frac{\mu(p, T)}{\mu_0} \sum S_i \sigma_i, \quad (27)$$

gdzie: pierwszy człon jest członem atermicznym mającym taki sam sens jak  $\Delta\sigma'_G$  w związku Zerilli-Armstronga;  
 $\mu$  — moduł ścinania;  
 $\mu_0$  — moduł ścinania w temperaturze 0 K;  
 $S_i$  — określa stosunek pomiędzy naprężeniem a naprężeniem plastycznego płynięcia, dla danego typu dyslokacji;  
 $\sigma_i$  — składowe uwzględniające oddziaływania różnego typu dyslokacji występujących w materiale.

Najczęściej związek ten przyjmuje postać:

$$\sigma(\varepsilon_p, \dot{\varepsilon}, T) = \sigma_a + \frac{\mu(p, T)}{\mu_0} (S_i \sigma_i + S_e \sigma_e), \quad (28)$$

gdzie:  $\sigma_i$  — uwzględnia wpływ szybkości odkształcenia na naprężenie;  
 $\sigma_e$  — zmienna opisująca proces plastycznego wzmocnienia materiału.

Dla miedzi równanie (28) upraszcza się do postaci [20]:

$$\sigma(\varepsilon_p, \dot{\varepsilon}, T) = \sigma_a + \frac{\mu(p, T)}{\mu_0} S_e \sigma_e, \quad (29)$$

gdzie:

$$S_e = \left[ 1 - \left( \frac{kT}{g_{0e} b^3 \mu(p, T)} \ln \left( \frac{\dot{\varepsilon}_{p0e}}{\dot{\varepsilon}_p} \right) \right)^{1/q_e} \right]^{1/p_e}. \quad (30)$$

Ewolucja mikrostruktury opisana jest zależnością:

$$\frac{\partial \sigma_e}{\partial \varepsilon_p} = \theta(\sigma_e), \quad (31)$$

gdzie:

$$\theta(\sigma_e) = \theta_0 (1 - F(\sigma_e)) \quad (32)$$

$\theta_0$  — określa utwardzenie materiału na skutek gromadzenia dyslokacji, a  $\theta_0 F(\sigma_e)$  — jego uplastycznienie. Zjawiska fizyczne występujące w procesie utwardzania nie zostały do tej pory dobrze zbadane. Dlatego utwardzanie materiału opisuje empiryczna formuła:

$$\theta_0 = a_0 + a_1 \ln \dot{\epsilon}_p + a_2 \sqrt{\dot{\epsilon}_p}, \quad (33)$$

a funkcję opisującą uplastycznienie:

$$F(\sigma_e) = \frac{\tanh\left(\alpha \frac{\sigma_e}{\sigma_{es}}\right)}{\tanh(\alpha)} \quad (34)$$

$$\ln\left(\frac{\sigma_{es}}{\sigma_{0es}}\right) = \frac{kT}{g_{0es} b^3 \mu(p, T)} \ln\left(\frac{\dot{\epsilon}_p}{\dot{\epsilon}_{p0es}}\right), \quad (35)$$

gdzie:  $k$  — stała Boltzmana;

$b$  — wektor Burgersa;

$\sigma_a, \sigma_{0es}, g_{0e}, g_{0es}, p_e, q_e, \dot{\epsilon}_{p0e}, \dot{\epsilon}_{p0es}, \alpha, \sigma_{e0}, a_0, a_1, a_2$  — parametry równania konstytutywnego.

W związku z (31) jest to jedyne równanie, które uwzględnia nie tylko bieżący stan materiału, ale także jego wcześniejszą ewolucję.

TABELA 4

Stałe materiałowe miedzi dla związku MTS [20]

$\sigma_a$ [MPa]	$\sigma_{0es}$ [MPa]	$g_{0e}$ [-]	$g_{0es}$ [-]	$p_e$ [-]	$q_e$ [-]	$\dot{\epsilon}_{p0e}$ [ $s^{-1}$ ]
40	770	1,6	0,2565	2/3	1	$10^7$
$\dot{\epsilon}_{p0es}$ [ $s^{-1}$ ]	$\alpha$ [-]	$\sigma_{e0}$ [-]	$a_0$ [GPa]	$a_1$ [MPa]	$a_2$ [MPa]	$b$ [m]
$10^7$	2	0	2,39	12	1,696	$2,56 \cdot 10^{-10}$

Moduł ścinania przyjęto za [20] w postaci:

$$\mu(T) = \mu_0 - \frac{D}{\exp(T_0/T) - 1}, \quad (36)$$

gdzie:  $\mu_0, D, T_0$  — parametry.

TABELA 5

Stałe materiałowe do modułu ścinania (36) [20]

$\mu_0$ [GPa]	$D$ [GPa]	$T_0$ [K]
45,78	3	180

Wartości stałych wykorzystanych w obliczeniach, w których stosowano związek MTS, zawarto w tabelach 4 i 5.

### Związek PTW

Związek o najszerszym zastosowaniu w zakresie temperatur (do temperatury topnienia) i szybkości odkształcenia (do  $10^{11} \text{ s}^{-1}$ ) został opracowany w 2003 roku przez Prestona, Tonksa i Wallace'a. Właściwie składa się z dwóch zależności. Do typowego równania, uwzględniającego uogólnione prawo Voce, włączono opracowaną przez Wallace'a teorię silnych fal uderzeniowych w metalach [21, 22], co pozwoliło rozszerzyć zakres stosowalności związku. Prawo Voce opisuje zmniejszenie energii potrzebnej do umocnienia materiału, gdy naprężenie w materiale osiąga wartość graniczną. Uogólnione prawo uwzględnia dodatkowo fakt, że dla metali typu fcc zmniejszenie energii umocnienia następuje w mniejszym stopniu dla większych wartości naprężenia granicznego:

$$\frac{d\hat{\sigma}}{d\varepsilon} = \theta \frac{\exp\left(p \frac{\hat{\sigma}_s - \hat{\sigma}_y}{s_0 - \hat{\sigma}_y}\right) - 1}{\exp\left(p \frac{\hat{\sigma}_s - \hat{\sigma}_y}{s_0 - \hat{\sigma}_y}\right) - 1},$$

gdzie:  $\hat{\sigma} = \sigma / \mu(\rho, T)$ ,  $\hat{\sigma}_y = \sigma_y / \mu(\rho, T)$  — naprężenie granicznego odkształcenia plastycznego (ang. *yield stress*);

$\hat{\sigma}_s = \sigma_s / \mu(\rho, T)$  — wartość naprężenia granicznego (ang. *saturation stress*);

$s_0, p, \theta$  — parametry.

Związek ten ma następującą postać [18]:

$$\hat{\sigma} = \hat{\sigma}_s + \frac{1}{p}(s_0 - \hat{\sigma}_y) \ln \left\{ 1 - \left[ 1 - \exp \left( -p \frac{\hat{\sigma}_s - \hat{\sigma}_y}{s_0 - \hat{\sigma}_y} \right) \right] \times \right. \\ \left. \times \exp \left[ - \frac{p\theta\varepsilon}{(s_0 - \hat{\sigma}_y) \left[ \exp \left( p \frac{\hat{\sigma}_s - \hat{\sigma}_y}{s_0 - \hat{\sigma}_y} \right) - 1 \right]} \right] \right\}. \quad (37)$$

Wartość naprężenia granicznego odkształcenia plastycznego opisana jest zależnością:

$$\hat{\sigma}_y = \max \left\{ s_0 - (s_0 - s_\infty) \operatorname{erf} \left[ k\hat{T} \ln \left( \frac{\gamma\dot{\zeta}}{\dot{\varepsilon}} \right) \right], \right. \\ \left. \min \left[ \gamma_1 \left( \frac{\dot{\varepsilon}}{\gamma\dot{\zeta}} \right)^{\gamma_2}, s_0 \left( \frac{\dot{\varepsilon}}{\gamma\dot{\zeta}} \right)^{\gamma_1} \right] \right\}, \quad (38)$$

a wartość naprężenia granicznego:

$$\hat{\sigma}_s = \max \left\{ s_0 - (s_0 - s_\infty) \operatorname{erf} \left[ k\hat{T} \ln \left( \frac{\gamma\dot{\zeta}}{\dot{\varepsilon}} \right) \right], s_0 \left( \frac{\dot{\varepsilon}}{\gamma\dot{\zeta}} \right)^{\gamma_1} \right\}, \quad (39)$$

$$\dot{\zeta} = \frac{1}{2} \left( \frac{4\pi\rho}{3M} \right)^{1/3} \left( \frac{\mu(\rho, T)}{\rho} \right)^{1/2}, \quad (40)$$

gdzie:  $\hat{T} = T/T_m$ ,  $M$  — masa atomowa;

$\rho$  — gęstość;

$s_0, s_\infty, \gamma_0, \gamma_\infty, p, k, \gamma, \theta, s_1, \gamma_1, \gamma_2$  — parametry równania konstytutywnego.

TABELA 6

Stałe materiałowe dla związku PTW [18]

$s_0$ [-]	$S_\infty$ [-]	$\gamma_0$ [-]	$\gamma_\infty$ [-]	$p$ [-]	$k$ [-]	$M$ [g/mol]
0,0085	0,00055	0,0001	0,0001	2	0,11	63,546
$s_1$ [-]	$\gamma_1$ [-]	$\gamma_2$ [-]	$\theta$ [-]	$\alpha$ [-]	$\gamma$ [-]	$\mu_0$ [GPa]
0,25	0,094	0,575	0,025	0,2	0,00001	51,8

Moduł ścinania przyjęto za [18] w postaci:

$$\mu(\rho, T) = \mu_0 (1 - \alpha \hat{T}). \quad (41)$$

Dane materiałowe dla miedzi przedstawiono w tabeli 6.

## 5. Analiza

Analizę porównawczą związków konstytutywnych wykonano na podstawie zachowania się rozszerzanych elektromagnetycznych pierścieni miedzianych o średniej średnicy 32 mm i przekroju poprzecznym ścianki  $1 \times 1$  mm. Tak jak w eksperymencie zaprezentowanym w pracy [1], przyjęto, że napięcie baterii kondensatorów wynosiło 4 kV. Pozostałe parametry układu zasilania zostały zawarte w tabeli 7 [1].

TABELA 7

Parametry układu zasilania

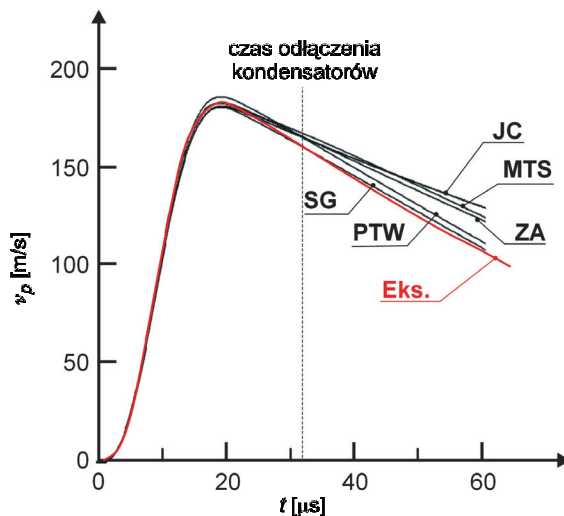
$A_r$ [cm <sup>2</sup> ]	$C_{sel}$ [μF]	$R_{sel0}$ [Ω]	$L_{sel}$ [μH]	$T_0$ [C]
0,01	56,36	0,0425	1,386	25
$A_c$ [J/mol K]	$B_c$ [J/mol K <sup>2</sup> ]	$a_{op}$ [K <sup>-1</sup> ]	$\xi_r$ [Ω m]	$E_r$ [GPa]
22,65	$5,86 \cdot 10^{-3}$	0,0039	$1,7 \cdot 10^{-8}$	120

Oceny badanych równań dokonywano na podstawie porównania zmiany prędkości radialnej pierścienia w czasie oraz zależności naprężenia plastycznego płynięcia od odkształcenia. Jak wspomniano wcześniej, wyniki otrzymane z poszczególnych związków porównano z analogicznymi wynikami badań doświadczalnych zawartych w pracy [1].

Wykres prędkości rozpęczenia elektromagnetycznego pierścienia miedzianego został przedstawiony na rysunku 3. Zawiera on krzywą eksperymentalną oraz krzywe otrzymane z rozwiązania przedstawionego wcześniej modelu matematyczno-fizycznego (1)-(13) dla różnych zależności konstytutywnych.

Przebieg procesu rozpęczenia pierścienia można podzielić na trzy etapy. W pierwszym etapie pierścień znajdując się w zmiennym polu elektromagnetycznym, przyspiesza od 0 do około 95% prędkości maksymalnej. W drugim etapie porusza się ze zmiennym, malejącym przyspieszeniem. Koniec tego etapu określa punkt, w którym pierścień zaczyna poruszać się ze stałym opóźnieniem. W ostatnim, trzecim etapie pierścień porusza się z tym opóźnieniem, aż do momentu fragmentacji. Z poznawczego punktu widzenia najważniejszy jest trzeci etap. Podczas tej fazy





Rys. 3. Prędkość elektromagnetycznie napędzanego pierścienia; Eks. — eksperyment [1], JC — Johnson-Cook, MTS — Mechanical Threshold Stress, ZA — Zerilli-Armstrong, SG — Steinberg-Guinana, PTW — Preston, Tonks, Wallace

rozpęczenia, na pierścień nie działają już siły elektromagnetyczne. Porusza się on tylko dzięki siłom inercji, a opóźnienie, z jakim się porusza zależy wyłącznie od własności wytrzymałościowych. Na podstawie tego opóźnienia można określić dynamiczne właściwości materiału pierścienia. Znajomość pierwszych dwóch etapów jest konieczna do określenia stanu początkowego pierścienia ( $T$ ,  $\sigma$ ,  $\varepsilon$ , ...) przed trzecim etapem rozpęczenia.

W pierwszej fazie, w wyniku działania sił pochodzących od zmiennego pola elektromagnetycznego, rozpęczenie zachodzi częściowo w zakresie odkształceń sprężystych. Jak widać na rysunku 3, w tej fazie procesu napędzania pierścienia (do około  $15 \mu\text{s}$ ) osiągnięto bardzo dobrą zgodność pomiędzy teorią a eksperymentem. Stąd można sądzić, że przedstawiony model niezależnie od przyjętego związku konstytutywnego poprawnie opisuje tę część rozpęczenia.

W drugiej fazie procesu maleją prądy w układzie cewki i próbki. Siły elektromagnetyczne przestają dominować w procesie napędzania. Coraz większą rolę zaczynają odgrywać własności wytrzymałościowe próbki (trzeci człon równania 6). Punkt ten odpowiada ok. 96% prędkości maksymalnej próbki. Pierścień osiąga go po czasie  $15,1 \mu\text{s}$ . Z analizy wyników modelowych wynika, że w tej chwili, prąd w obwodzie cewki  $I_{\text{sel}} = 19 \text{ kA}$  jest mniejszy o  $3,9 \text{ kA}$  od prądu maksymalnego, natomiast prąd w próbce wynosi  $27,2 \text{ kA}$ . Przy czym maksymalny, obliczony prąd w pierścieniu wynosił  $44,6 \text{ kA}$ .

Wartość maksymalnej prędkości radialnej osiągniętej w drugim etapie dla eksperymentu zaprezentowanego w pracy [1] wyniosła  $185 \text{ m/s}$ . Z kolei wartości

prędkości pierścienia otrzymane w wyniku modelowania dla poszczególnych związków konstytutywnych zostały przedstawione w tabeli 8. Największą prędkość rozpęczenia otrzymano, gdy do obliczeń zastosowano związek PTW, a najmniejszą — w przypadku związku MTS. Największa różnica względna wyniosła 3,7% w przypadku zastosowania równania PTW.

TABELA 8

Wartości maksymalnej prędkości elementu badanego

Związek	Eks.	JC	SG	ZA	MTS	PTW
$V_{\max}$ [m/s]	185	187,4	186,6	188,9	184,8	191,9
różnica [%]	–	1,3	0,9	2,1	0,11	3,7

W trzeciej fazie eksperymentu pierścień porusza się tylko w wyniku działania sił bezwładności ze stałym opóźnieniem zależnym jedynie od własności wytrzymałościowych materiału pierścienia i warunków napędzania. Wartości obliczonych opóźnień zawarto w tabeli 9.

TABELA 9

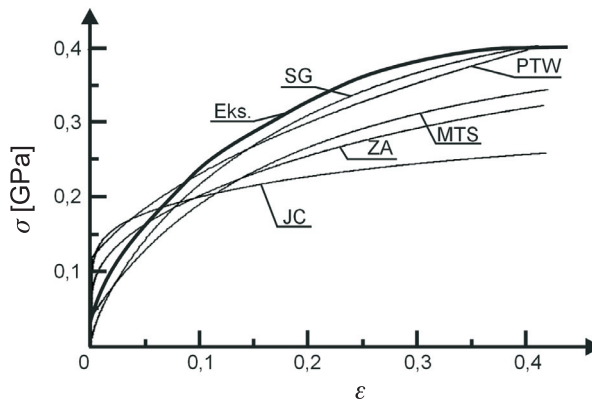
Opóźnienia elementu badanego w końcowej fazie ruchu

Związek	Eks.	JC	SG	ZA	MTS	PTW
$a$ [m/s <sup>2</sup> ]	1,927 10 <sup>6</sup>	1,26 10 <sup>6</sup>	1,88 10 <sup>6</sup>	1,53 10 <sup>6</sup>	1,57 10 <sup>6</sup>	1,93 10 <sup>6</sup>
różnica [%]	–	34,6	2,4	20,6	18,5	0,2

W tym zakresie rozpęczenia pierścienia, najlepszą zgodność z eksperymentem otrzymano dla związku PTW. Dla tej zależności względna różnica nie była większa niż 0,2%.

Porównując obliczoną i zmierzoną [1] zależność naprężenia plastycznego płynięcia w funkcji odkształcenia (rys. 4), otrzymujemy wyjaśnienie różnic w profilach prędkości (rys. 3). Naprężenie plastycznego płynięcia dla  $\varepsilon > 0,4$  wyliczone na podstawie prawa Johnsona-Cooka jest prawie o 35% mniejsze od wartości eksperymentalnej. Jest to najgorszy wynik ze wszystkich przebadanych równań konstytutywnych.

Otrzymane krzywe naprężenie-odkształcenie (rys. 4) pozostałych związków konstytutywnych układają się w taki sposób, że tworzą dwie grupy pod względem zgodności z krzywą eksperymentalną. Pierwsza grupa krzywych charakteryzuje się dużą rozbieżnością od krzywej eksperymentalnej. Do tej grupy należą krzywe otrzymane z obliczeń, w których wykorzystano związki konstytutywne Zerilli-Arm-



Rys. 4. Dynamiczne krzywe naprężenie-odkształcenie; Eks. — eksperyment [1], JC — Johnson-Cook, MTS — Mechanical Threshold Stress, ZA — Zerilli-Armstrong, SG — Steinberg-Guinana, PTW — Preston, Tonks, Wallace

stronga i MTS. Druga grupa (Steinberg-Guinana, PTW) charakteryzuje się dobrą zgodnością z wynikami doświadczalnymi.

W tym miejscu należy wspomnieć, że związki MTS i ZA należą do tej samej grupy modeli konstytutywnych — teoretycznych opartych na teorii dyslokacji. Równanie SG należy do grupy związków eksperymentalnych razem z zależnością JC, z kolei PTW należy do grupy związków teoretycznych. O ile równania konstytutywne MTS i ZA, pochodząc z tej samej grupy, powinny charakteryzować się podobnymi wynikami modelowania, o tyle w przypadku zależności SG i PTW trudno jest uzasadnić małą różnicę pomiędzy otrzymanymi wynikami.

Najlepszą zgodność z doświadczalną krzywą naprężenie-odkształcenie mają równania z drugiej grupy związków konstytutywnych. Przykładowo, dla związku SG maksymalna różnica, w końcowej fazie procesu ( $0,2 < \epsilon < 0,4$ ), pomiędzy krzywą eksperymentalną a obliczoną wynosiła 6,1%. Z kolei dla równania PTW różnica ta wynosiła 9,8%.

Analizując warunki eksperymentu oraz przyjęte założenia modelowe, można dostrzec pewne różnice mające wpływ na końcowy wynik. Przykładem tego może być geometria cewki, która w rzeczywistości nie jest zbiorem osiowosymetrycznych pierścieni, lecz układem sześciu równoległych zwojów drutu. Różnice te można uwzględnić przez wprowadzenie współczynnika korekcji  $\eta$  do czynnika geometrycznego  $b(r)$  w równaniu (6). Był on dobierany na drodze eksperymentu komputerowego tak, aby otrzymać taką samą prędkość maksymalną wynoszącą 185 m/s dla wszystkich związków konstytutywnych. Zabieg ten miał na celu stworzenie porównywalnych warunków napędzania (faza początkowa) niezależnie od zastosowanego równania konstytutywnego. Dzięki temu naprężenia w pierścieniu na początku trzeciego etapu rozpędzania miały porównywalną wartość.

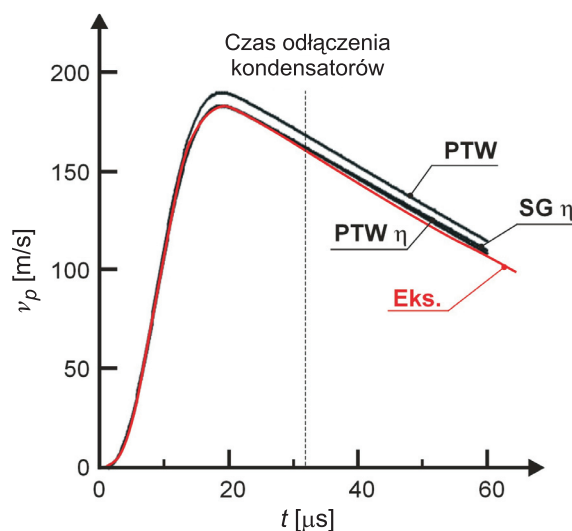
W tabeli 10 przedstawiono dobrane wartości parametru  $\eta$ .

TABELA 10

Wartości współczynnika  $\eta$

Związek	JC	SG	ZA	MTS	PTW
$\eta$	0,99395	0,9958	0,9897	1,0006	0,9820

Zmiana ta nie spowodowała istotnych różnic w opóźnieniu pierścienia. Największa różnica w opóźnieniu wystąpiła dla związku PTW, którego wyniki praktycznie pokryły się z wynikami otrzymanymi dla równania SG (rys. 5).



Rys. 5. Prędkość elektromagnetycznie napędzanego pierścienia z uwzględnieniem parametru  $\eta$ ; Eks. — eksperyment [1], związek SG  $\eta$  — dla  $\eta = 0,9958$ , związek PTW — dla  $\eta = 1$ , związek PTW  $\eta$  — dla  $\eta = 0,9820$

Z przeprowadzonego porównania wynika, że zastosowanie związków z drugiej grupy (SG lub PTW) w opisie procesu elektromagnetycznego napędzania pierścienia daje wyniki najbliższe eksperymentowi. Dla tych równań różnica pomiędzy eksperymentalnie otrzymaną wartością naprężenia plastycznego płynięcia a obliczoną nie była większa niż 9,8%, a opóźnienie — 0,2%.

Z tych dwóch praw, związek konstytutywny Steinberga-Guinana wydaje się lepszy do modelowania przedstawionego zjawiska. Wiąże się to z większą dostępnością danych literaturowych dla wielu różnorodnych materiałów oraz lepszym dopasowaniem do krzywej eksperymentalnej, bez konieczności znajomości prędkości maksymalnej elementu badanego i wprowadzania współczynnika  $\eta$ .

## 4. Zakończenie

Z analizy otrzymanych rezultatów wynika, że przedstawiony model matematyczno-fizyczny elektromagnetycznego rozpęczania cienkościennego pierścienia z odpowiednio dobranym związkiem konstytutywnym bardzo dobrze oddaje przebieg całego procesu. Stwierdzono, że do określenia własności wytrzymałościowych, na podstawie elektromagnetycznego testu pierścieniowego, najlepiej nadaje się zależność Steinberga-Guinana lub PTW. Przy zastosowaniu tych związków różnice względne nie były większe niż kilka procent. Małe różnice pomiędzy wynikami eksperymentalnymi a teoretycznymi wynikają z uwzględnienia zjawisk towarzyszących przepływom dużych prądów, w tym także procesów dysypatywnych.

Potwierdziły się doniesienia literaturowe o występujących rozbieżnościach pomiędzy danymi eksperymentalnymi a wynikami obliczeń dla niektórych materiałów otrzymywanych z wykorzystaniem równania Johnsona-Cooka, dla pewnej grupy eksperymentów [23, 24]. Stąd można uzasadnić liczne próby modyfikacji tego równania konstytutywnego.

Pracę zrealizowano w ramach projektu badawczego własnego nr 0 T00C 007 30 finansowanego przez Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego.

Artykuł wpłynął do redakcji 17.10.2007 r. Zweryfikowaną wersję po recenzji otrzymano w listopadzie 2007 r.

### LITERATURA

- [1] W. H. GOURDIN, *Analysis and assessment of electromagnetic ring expansion as a high-strain-rate test*, J. Appl. Phys., 65, 2, 1989.
- [2] M. A. MEYERS, *Dynamic behaviour of materials*, Johs Wiley and Sons, INC, New York-Chichester-Brisbane-Toronto-Singapoure, 1994.
- [3] H. KOLSKY, *An investigation of the Mechanical Properties of Materials at Very High Rates of Loading*, Proc. Phys. Soc., B, 62, 1949, 676-700.
- [4] G. TAYLOR, *The use of flat-ended projectiles for determining dynamic yield stress I. Theoretical considerations*, Proc. Roy. Soc. London Series A., 1948, 194, 289.
- [5] J. E. FIELD i in., *Review of experimental techniques for high rate deformation and shock studies*, Int. J. Impact Engng., vol. 30, 2004.
- [6] P. C. JOHNSON, B. A. STEIN, R. S. DAVIS, *Measurement of Dynamic Plastic Flow Properties under Uniform Stress, in Symposium on the Dynamic Behavior of Materials*, ASTM Special Publications, no. 336, 1963, 195.
- [7] F. I. NIORDSON, *A Unit for Testing Materials at High Strain Rates' Experimental mechanics*, 5(1), 1965.
- [8] E. WŁODARCZYK, J. JANISZEWSKI, *Static and dynamic ductility of copper and its sinters*, J. Tech. Phys., 45, 4, 2004.
- [9] E. WŁODARCZYK, J. JANISZEWSKI, Z. GŁODOWSKI, *Dynamiczny stan naprężenia i odkształcenia w cienkim, rozszerzanym wybuchowo metalowym pierścieniu*, Biul. WAT, LIV, 2-3, 2005.

- [10] E. WŁODARCZYK, J. JANISZEWSKI, *Dynamiczny jednoosiowy stan naprężenia i skończonego odkształcenia w cienkościennym pierścieniu napędzanym wybuchowo*, Biul. WAT, LIV, 2-3, 2005.
- [11] D. E. GRADY, D. A. BENSON, *Fragmentation of metal Rings by Electromagnetic Loading*, Experimental Mechanics, 23, 1983.
- [12] *Tablice fizyczno-astronomiczne*, Wyd. Adamantan, Warszawa, 1995.
- [13] M. ZAHN, *Pole elektromagnetyczne*, PWN, Warszawa, 1989.
- [14] F. J. ZERILLI, R. W. ARMSTRONG, *Dislocation — mechanics — based constitutive relations for material dynamics calculations*, J. Appl. Phys., 61(5), 1987.
- [15] A. C. M. DE QUEIROZ, *Mutual inductance and inductance calculations by Maxwell's Method*, Internet.
- [16] K. JACH i in., *Komputerowe modelowanie dynamicznych oddziaływań ciał metodą punktów swobodnych*, PWN, Warszawa, 2001.
- [17] D. J. STEINBERG, S. G. COCHRAN, M. W. GUINAN, *A constitutive model for metals applicable at high-strain rate*, J. Appl. Phys., 51, 1980.
- [18] D. L. PRESTON, D. L. TONKS, D. C. WALLACE, *Model of plastic deformation for extreme loading conditions*, J. Appl. Phys., 93, 2003.
- [19] S. R. CHEN, M. G. STOUT, U. F. KOCKS i in., *Constitutive modeling of a 5182 aluminum as a function of strain rate and temperature*, Hot deformation of aluminum alloys, II symposium, Rosemont, USA, 1998.
- [20] M. A. ZOCHER, P. J. MAUDLIN, S. R. CHEN, E. C. FLOWER-MAUDLIN, *An evaluation of several hardening models using Taylor cylinder impact data*, European congress on computational methods in applied sciences and engineering, Barcelona, Spain, 2000.
- [21] D. C. WALLACE, *Irreversible thermodynamics of overdriven shocks in solids*, Phys. Rev., B 24, 5597, 1981.
- [22] D. C. WALLACE, *Nature of the Process of Overdriven Shocks in Metals*, Phys. Rev., B 24, 5607, 1981.
- [23] G. R. JOHNSON, T. J. HOLMQUIST, *Evaluation of cylinder-impact test data for constitutive model constants*, J. Appl. Phys., 64 (8), 1988.
- [24] W. K. RULE, S. E. JONES, *A revised form for the Johnson-Cook strength model*, Int. J. Impact Engng., vol. 21, no. 8, 1998.

R. PANOWICZ, E. WŁODARCZYK, J. JANISZEWSKI

### **Selection of constitutive model for analysis of behaviour prediction of ring material expanded by pulse electromagnetic field**

**Abstract.** The selection of a constitutive model from among commonly used models, which in the best way describe dynamic behaviour of material during electromagnetic expanding ring test, is our primary goal in this paper. Five more popular constitutive models are depicted and examined: Johnson-Cook (JC), Steinberg-Guinan (SG), Zerilli-Armstrong (ZA), MTS and Preston-Tonks-Wallace (PTW) models. As a criterion of the selection, qualitative/quantitative agreement of the numerical results with analogous data obtained from experiment presented in Ref. 1 was taken. It was found that numerical results obtained by using SG or PTW model were the best consistent with experimental data.

**Keywords:** high-strain-rate material properties, stress-strain relations, electromagnetic expanding ring test, constitutive models

**Universal Decimal Classification:** 669.018.2