



Zagadnienie odwrotne balistyki zewnętrznej i algorytm wyznaczania parametrów modeli ruchu pocisków artyleryjskich

LESZEK BARANOWSKI, MAREK ANDRZEJ KOJDECKI*

Wojskowa Akademia Techniczna, Instytut Elektromechaniki,

*Instytut Matematyki i Kryptologii, 00-908 Warszawa, ul. S. Kaliskiego 2

Streszczenie. W artykule opisano regularyzujący algorytm numerycznego rozwiązywania zagadnienia odwrotnego balistyki zewnętrznej, czyli wyznaczania, na podstawie danych doświadczalnych, współczynników sił i momentów aerodynamicznych pocisku, przydatny dla każdego z trzech używanych w balistyce modeli ruchu pocisku osiowosymetrycznego (punktu materialnego, zmodyfikowanego punktu materialnego i bryły sztywnej). Zaproponowano i przedyskutowano zapis współczynnika siły oporu jako funkcji liczby Macha w postaci funkcji sklepanej trzeciego stopnia, której wartości w węzłach są elementami rozwiązania zagadnienia odwrotnego. Użyteczność i skuteczność algorytmu przetestowano na danych ze strzelań z haubic oraz z moździerza i zilustrowano wynikami obliczeń zasięgów pocisków uzyskanych z modelu punktu materialnego.

Słowa kluczowe: mechanika, balistyka zewnętrzna, metody identyfikacji

Symbole UKD: 623.54

1. Wstęp

Ruch pocisków artylerii polowej, stabilizowanych zarówno obrotowo, jak i brzechwowo, najczęściej opisuje się, stosując jeden z trzech modeli matematycznych różniących się liczbą zmiennych zależnych i przyjętymi uproszczeniami odnośnie działania sił i momentów aerodynamicznych na pocisk w locie.

W modelu o sześciu stopniach swobody pocisk traktuje się jako obrotową bryłę sztywną poruszającą się w lepkim, ściśliwym gazie (powietrzu) wypełniającym trójwymiarową przestrzeń, uwzględniając w równaniach równowagę wszystkich sił i momentów spowodowanych oddziaływaniami poruszającej się Ziemi i atmosfery,

charakteryzując stan pocisku przez jego położenie (trzy odległości) i orientację (trzy kąty) w przestrzeni [1, 2, 3]. W najprostszym modelu o trzech stopniach swobody pocisk traktuje się jako punkt materialny poruszający się w atmosferze pod wpływem siły ciężkości i zastępczej wypadkowej siły aerodynamicznej skierowanej przeciwnie do kierunku jego ruchu, często uwzględnia się również siłę Coriolisa spowodowaną ruchem obrotowym Ziemi [1, 2, 3]. W modelu pośrednim o czterech stopniach swobody uwzględnia się wszystkie siły i momenty spowodowane oddziaływaniami Ziemi i atmosfery, ale orientację pocisku charakteryzuje się, biorąc pod uwagę tylko zastępczy kąt nutacji równowagi dynamicznej, a w bilansie energetycznym uwzględnia się prędkość kątową pocisku wokół osi symetrii [10].

Użyteczne (semiempiryczne) modele matematyczne dla konkretnych pocisków i dział, umożliwiające symulacje trajektorii pocisków przy różnych warunkach początkowych i warunkach atmosferycznych, tworzy się przez wyznaczanie wszystkich współczynników sił i momentów aerodynamicznych występujących w równaniach ruchu. Na ogół przyjmuje się (zob. np. STANAG 4144 [5], STANAG 4355 [6]), że można je wyrazić w postaci wielomianów niskiego stopnia (nie większego niż czwarty) od liczby Macha i kąta nutacji jako argumentów; wtedy ich wyznaczanie sprowadza się do doboru współczynników wielomianów jako liczbowych parametrów modelu. Innym przydatnym modelem funkcyjnej zależności współczynników oporu powietrza od liczby Macha może być funkcja sklejana. Aby wyznaczyć parametry modelu (których nie można zmierzyć bezpośrednio), trzeba rozwiązać odpowiednie zagadnienie odwrotne, w którym wyniki prób poligonowych służą jako dane wejściowe, a parametry modelu są argumentami funkcjonałów charakteryzujących zgodność wyników symulacji z wynikami strzelań.

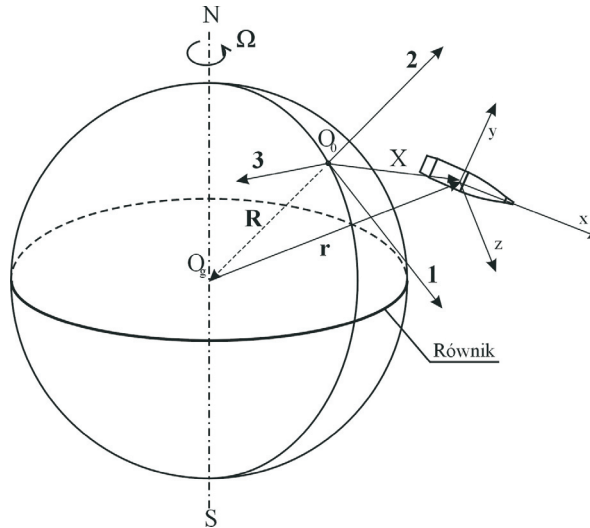
Celem niniejszego artykułu jest przedstawienie ogólnego algorytmu rozwiązywania zagadnienia odwrotnego balistyki zewnętrznej oraz jego weryfikacja w oparciu o model punktu materialnego ze współczynnikiem oporu powietrza modelowanym funkcją sklejaną i danych z próbnych strzelań pociskami ze 122 mm haubicy 2S1 oraz 98 mm moździerza. Metodyka przeprowadzania strzelań poligonowych omówiona jest w pracy [4].

2. Modelowanie ruchu pocisków artylerii polowej

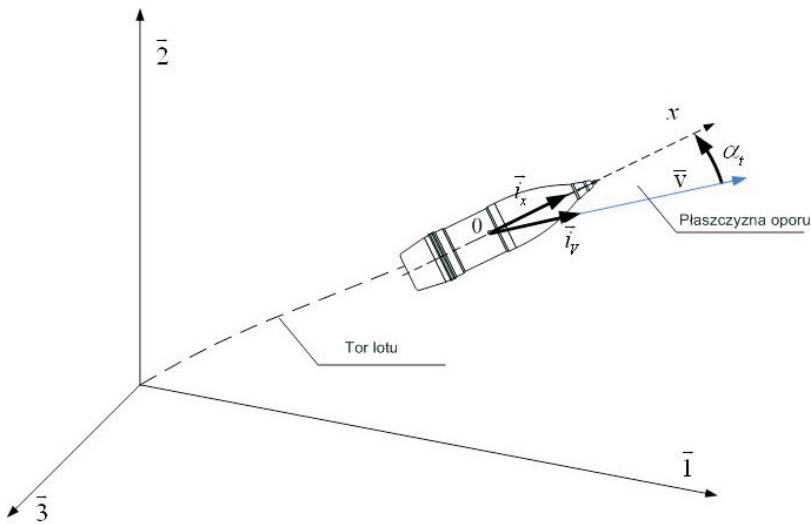
2.1. Układy współrzędnych i zmienne zależne

Do opisu ruchu pocisków względem Ziemi stosuje się prawoskrętny, ortonormalny, kartezjański układ odniesienia, związany z Ziemią o początku zgodnym z miejscem stania działa, oznaczany następująco O_0123 (rys. 1). Położenie osi podłużnej pocisku Ox względem wektora prędkości pocisku \mathbf{v} (rys. 2) określane jest kątem nutacji α_t (ang. *total yaw angle*). Płaszczyzna wyznaczona przez oś podłużną pocisku i wektor prędkości nazywana jest płaszczyzną oporu. Dodatkowo wyko-

rzystuje się również układ związany $Oxyz$, którego osie pokrywają się z głównymi centralnymi osiami bezwładności pocisku.



Rys. 1. Orientacja układów odniesienia według normy STANAG 4355



Rys. 2. Określenie położenia pocisku względem wektora prędkości

Przekształceń współrzędnych od jednego układu do drugiego dokonuje się, mnożąc wektory przez macierze przejścia zależne od kątów między osiami układów. Trajektorię pocisku określają w zależności od czasu (tj. jako trójwymiarową krzywą

przestrzenną z czasem jako parametrem): wektor położenia pocisku w układzie ziemskim $\mathbf{X} = \mathbf{X}_0 + \int_0^t \mathbf{u} dt$, (przy czym $\mathbf{r} = \mathbf{X} - \mathbf{R}$, jak na rysunku 1) oraz wektor prędkości względem Ziemi $\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + \int_0^t \dot{\mathbf{u}} dt$ i wektory przyspieszeń. W powyższych zależnościach \mathbf{X}_0 i \mathbf{u}_0 są wartościami początkowymi w chwili wylotu pocisku z lufy. Do obliczeń sił i momentów aerodynamicznych potrzebna jest prędkość pocisku względem powietrza $\mathbf{v} = \mathbf{u} - \mathbf{w}$ przy znanej prędkości wiatru względem Ziemi \mathbf{w} . Do uzyskania dokładnego opisu toru lotu uwzględnia się zależność: temperatury, gęstości, ciśnienia i prędkości dźwięku w powietrzu oraz prędkości wiatru, a także siły ciężkości (i wywołanego nią przyspieszenia \mathbf{g}) od wysokości lotu. W równaniach ruchu występuje też wektor prędkości kątowej obrotu Ziemi $\boldsymbol{\omega}$, którego współrzędne w układzie odniesienia związanym z Ziemią zależą od szerokości geograficznej i azymutu toru lotu (prędkość obrotu Ziemi wokół własnej osi wynosi $\Omega = 7,292115 \cdot 10^{-5} \text{ rad/s}$).

2.2. Model punktu materialnego

W modelu tym (o trzech stopniach swobody — współrzędnych położenia) przyjmuje się, że pocisk idealnie stabilizuje się na torze lotu, czyli oś pocisku zawsze pokrywa się z kierunkiem wektora prędkości pocisku. Zgodnie z zasadą zmiany pędu, równanie ruchu pocisku w układzie związanym z Ziemią można wówczas zapisać następująco [6]:

$$m \dot{\mathbf{u}} = \mathbf{F}_D + m\mathbf{g} + m\boldsymbol{\Lambda}, \quad (1)$$

gdzie \mathbf{F}_D jest siłą oporu aerodynamicznego:

$$\mathbf{F}_D = -\frac{1}{8} \pi \rho i d^2 C_D \mathbf{v} \mathbf{v} \quad (2)$$

$\boldsymbol{\Lambda} = -2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}$ jest przyspieszeniem od siły Coriolisa spowodowanej ruchem obrotowym Ziemi, a C_D jest współczynnikiem siły oporu powietrza. Współczynnik dopasowania donośności i , który jest funkcją kąta podniesienia lufy działa QE , wprowadza się, aby zapewnić zgodność obliczeń numerycznych z wynikami strzelań poligonowych w całym użytkowym zakresie kątów QE . Podstawową niedoskonałością omawianego modelu, w przypadku pocisków stabilizowanych obrotowo, jest brak możliwości zasymulowania odchylenia bocznego pocisku od płaszczyzny strzelania spowodowanego derywacją pocisku na torze lotu.

2.3. Zmodyfikowany model punktu materialnego

W modelu tym (o czterech stopniach swobody — współrzędnych położenia i zastępczym kącie nutacji równowagi dynamicznej α_e) rozpatruje się tylko uprosz-

zione równanie równowagi sił działających na pocisk o średnicy d i masie m , wyrzucony z lufy działa i poruszający się w powietrzu, ale uwzględnia się w nim także siły spowodowane ruchami obrotowymi pocisku i wektora nutacji:

$$m \dot{\mathbf{u}} = \mathbf{F}_D + \mathbf{F}_L + \mathbf{F}_M + m\mathbf{g} + m\mathbf{\Lambda}, \quad (3)$$

gdzie \mathbf{F}_D jest siłą oporu aerodynamicznego:

$$\mathbf{F}_D = -\frac{1}{8}\pi\rho id^2 \left(C_{D_0} + C_{D_{\alpha^2}} (Q_D \alpha_e^2) \right) \mathbf{v}\mathbf{v} \quad (4)$$

ze współczynnikiem oporu powietrza przy zerowym kącie nutacji C_{D_0} i jego drugą pochodną po kącie nutacji $C_{D_{\alpha^2}}$, oraz współczynnikami dopasowania $i = f(QE)$ i $Q_D = \text{const}$.

\mathbf{F}_L jest siłą nośną w płaszczyźnie oporu:

$$\mathbf{F}_L = -\frac{1}{8}\pi\rho d^2 f_L \left(C_{L_{\alpha}} + C_{L_{\alpha^3}} \alpha_e^2 \right) v^2 \mathbf{\alpha}_e \quad (5)$$

ze współczynnikami siły nośnej $C_{L_{\alpha}}$ i $C_{L_{\alpha^3}}$ oraz współczynnikiem dopasowania $f_L = f(QE)$.

\mathbf{F}_M jest siłą Magnusa:

$$\mathbf{F}_M = -\frac{1}{8}\pi\rho d^3 Q_M p C_{mag-f} (\mathbf{\alpha}_e \times \mathbf{v}) \quad (6)$$

ze współczynnikiem C_{mag-f} i współczynnikiem dopasowania $Q_M = \text{const}$.

W przypadku dokładnej identyfikacji współczynników sił i momentów aerodynamicznych oraz warunków początkowych wylotu pocisku z lufy działa, współczynniki dopasowania są równe jedności.

Kąt równowagi dynamicznej $\mathbf{\alpha}$ (ang. *yaw of repose*) występujący w wyrażeniach na siły aerodynamiczne wyznaczany jest z zależności [10]

$$\mathbf{\alpha}_e = -\frac{8I_x p (\mathbf{v} \times \dot{\mathbf{u}})}{\pi\rho d^3 (C_{M_{\alpha}} + C_{M_{\alpha^3}} \alpha_e^2) v^4} \quad \text{przy } \mathbf{\alpha}_{e|t=0} = \mathbf{0}, \quad (7)$$

gdzie C_{M_α} i $C_{M_{\alpha^3}}$ współczynniki momentu wywracającego, I_x jest momentem bezwładności pocisku względem jego osi symetrii.

Prędkość kątowna pocisku wokół osi symetrii p , wyznaczana jest z zależności $p = p_0 + \int_0^t \dot{p} dt$, w której przyspieszenie kątowe spełnia równanie

$$\dot{p} = \frac{\pi \rho d^4 v C_{spin}}{8 I_x} p \quad (8)$$

z warunkiem początkowym $p_0 = \frac{2\pi u_0}{t_c d}$ (p_0 jest prędkością kątowną pocisku przy wylocie z lufy o skoku gwintu równym t_c kalibrów).

2.4. Model bryły sztywnej

W modelu tym (o sześciu stopniach swobody — współrzędnych położenia i kątowych współrzędnych orientacji bryły) rozpatruje się pełne równania równowagi sił i momentów siłowych działających na pocisk (osiowosymetryczną bryłę sztywną) poruszający się w atmosferze. W układzie współrzędnych poruszającym się z pociskiem wektorowe równania, opisujące zmianę pędu i zmianę krętu pocisku jako bryły sztywnej, mają postać [1, 3]:

$$m(\dot{\mathbf{u}} + \boldsymbol{\omega}_p \times \mathbf{u}) = \mathbf{R}^A + m\mathbf{g} + m\boldsymbol{\Lambda} \quad (9)$$

$$\dot{\mathbf{K}}_O + \boldsymbol{\omega}_p \times \mathbf{K}_O = \mathbf{M}_O^A, \quad (10)$$

gdzie: $\boldsymbol{\omega}_p$ — wektor prędkości kątownej pocisku względem środka masy;

\mathbf{K}_O — wektor krętu pocisku względem środka masy;

\mathbf{R}^A — wektor wypadkowej siły aerodynamicznej działającej na pocisk;

\mathbf{M}_O^A — wektor wypadkowego momentu aerodynamicznego działającego na pocisk.

Składowe siły aerodynamicznej \mathbf{R}^A w układzie związanym z pociskiem $Oxyz$ oznaczamy kolejno: P_x — siła osiowa, P_y — siła normalna, P_z — siła poprzeczna i wyrażamy poprzez współczynniki siły aerodynamicznej następująco:

$$P_x = C_x \frac{\rho v^2}{2} S \quad P_y = C_y \frac{\rho v^2}{2} S \quad P_z = C_z \frac{\rho v^2}{2} S. \quad (11)$$

Moment aerodynamiczny M_O^A ma w układzie związanym z pociskiem Oxyz wartości składowych równe kolejno: momentowi przechylającemu L^A , momentowi odchyłającemu M^A i momentowi pochyłającemu N^A . Składowe te można wyrazić poprzez współczynniki momentów aerodynamicznych następująco:

$$L^A = C_l^A \frac{\rho V^2}{2} Sd \quad M^A = C_m^A \frac{\rho V^2}{2} Sl \quad N^A = C_n^A \frac{\rho V^2}{2} Sl. \quad (12)$$

Określając położenie pocisku względem strumienia powietrza za pomocą kąta natarcia α i kąta ślizgu β , współczynniki sił i momentów aerodynamicznych można wyrazić poprzez pochodne tych współczynników (będące funkcjami liczby Macha) w następującej postaci:

$$C_x = C_{x0}(Ma, Re) + C_{x\alpha^2}(Ma)\alpha^2 + C_{x\beta^2}(Ma)\beta^2 \quad (13)$$

$$C_z = C_{z\beta}(Ma)\beta + C_{z\overline{p}\alpha}(Ma)\overline{p}\alpha \quad (14)$$

$$C_y = C_{y\alpha}(Ma)\alpha + C_{y\overline{p}\beta}(Ma)\overline{p}\beta \quad (15)$$

$$C_l^A = C_{l\overline{p}}^A(Ma)\overline{p} \quad (16)$$

$$C_n^A = C_{n\alpha}^A(Ma)\alpha + C_{nq}^A(Ma)q + C_{n\overline{p}\beta}^A(Ma)\overline{p}\beta \quad (17)$$

$$C_m^A = C_{m\beta}^A(Ma)\beta + C_{mr}^A(Ma)r + C_{m\overline{p}\alpha}^A(Ma)\overline{p}\alpha. \quad (18)$$

gdzie: $C_{x0}(Ma, Re)$ — współczynnik siły osiowej przy $\alpha = \beta = 0$;

$$C_{x\alpha^2} = \frac{\partial^2 C_x}{\partial \alpha^2}, \quad C_{z\beta} = \frac{\partial C_z}{\partial \beta}, \quad C_{y\alpha} = \frac{\partial C_y}{\partial \alpha} \quad \text{— pochodne cząstkowe}$$

współczynników składowych siły aerodynamicznej;

$$C_{l\overline{p}}^A = \frac{\partial C_l^A}{\partial \overline{p}}, \quad C_{mr}^A = \frac{\partial C_m^A}{\partial r}, \quad C_{nq}^A = \frac{\partial C_n^A}{\partial q}, \quad C_{n\alpha}^A = \frac{\partial C_n^A}{\partial \alpha}, \quad C_{m\beta}^A = \frac{\partial C_m^A}{\partial \beta}, \quad \text{—}$$

pochodne cząstkowe współczynników składowych momentu aerodynamicznego;

$$C_{z\overline{p}\alpha} = \frac{\partial^2 C_z}{\partial \overline{p}\alpha}, \quad C_{y\overline{p}\beta} = \frac{\partial^2 C_y}{\partial \overline{p}\beta} \quad \text{— pochodne cząstkowe współczynników}$$

siły Magnusa;

$$C_{np\beta}^A = \frac{\partial^2 C_n^A}{\partial p \beta}, \quad C_{mp\alpha}^A = \frac{\partial^2 C_m^A}{\partial p \alpha} \text{ — pochodne cząstkowe współczynników}$$

momentu wywołanego siłą Magnusa;

$$\bar{p} = \frac{pd}{2V}, \quad \bar{q} = \frac{ql}{V}, \quad \bar{r} = \frac{rl}{V} \text{ — bezwymiarowe składowe}$$

prędkości kątowej pocisku w układzie związanym *Oxyz*.

3. Zagadnienie odwrotne balistyki zewnętrznej i algorytm jego rozwiązywania

Wszystkie modele ruchu pocisku mają charakter semiempiryczny ze względu na konieczność doboru współczynników sił aerodynamicznych C_i dla zapewnienia adekwatności i dokładności opisu. Współczynniki te (jeden w modelu punktu materialnego, osiem w zmodyfikowanym modelu punktu materialnego oraz jedenaście w modelu bryły sztywnej) są funkcjami liczby Macha i można wyznaczyć je z odpowiednio dużą dokładnością (bez stosowania w równaniach współczynników dopasowania) jedynie jako rozwiązania odpowiednich zagadnień odwrotnych balistyki zewnętrznej, a nie z pomiarów bezpośrednich.

Ze względu na brak teoretycznej postaci współczynników sił i momentów aerodynamicznych pocisku w funkcji liczby Macha, zadanie to daje się rozwiązać tylko poprzez modelowanie ich funkcjami o założonej postaci zależnej od skończonej liczby parametrów. Typowymi funkcjami, jakie można zastosować, są wielomiany niskiego stopnia (w normie STANAG 4355 [6] sugeruje się wielomiany co najwyżej czwartego stopnia), wielomiany trygonometryczne lub funkcje sklepane o odpowiednio dobranych węzłach; parametrami liczbowymi, które trzeba wyznaczyć na podstawie danych doświadczalnych, są wszystkie współczynniki wielomianów lub funkcji sklepanych.

Do rozwiązania zadania odwrotnego, jako dane doświadczalne, można wykorzystać dowolny skończony zbiór dyskretnych wartości elementów torów lotu pocisków ustalonego typu, uzyskanych w wyniku pomiarów dla różnych ładunków miotających (czyli różnych prędkości początkowych) i różnych kątów podniesienia lufy działa *QE*. Elementami tymi mogą być zarówno położenia, jak i prędkości oraz przyspieszenia pocisków mierzone w określonych chwilach czasu lub punktach torów lotu. Zasięgi i czasy lotu pocisków określa się przez bezpośrednie obserwacje i pomiary geodezyjne, położenia i prędkości lecącego pocisku określa się z namiarów radiolokacyjnych, a przyspieszenia podczas lotu można mierzyć za pomocą czujników umieszczonych na pocisku.

W każdym przypadku zagadnienie odwrotne stawia się podobnie: należy na podstawie danych doświadczalnych (otrzymanych z pomiarów podczas prób-

nych strzelań) wyznaczyć współczynniki sił i momentów aerodynamicznych (i ewentualnie inne parametry, jak na przykład kąt podrzutu) w taki sposób, aby elementy torów lotu symulowanych przez rozwiązanie jednego z powyższych układów równań zgadzały się możliwie najdokładniej z zadanymi (określonymi podczas strzelań poligonowych). Zagadnienie to można postawić jako zadanie minimalizacji funkcjonału celu Φ , charakteryzującego podobieństwo (odległość) wektora danych doświadczalnych $\mathbf{d}^d = (d_1^d, \dots, d_n^d)$ do wektora odpowiadających im wyników symulacji $\mathbf{d}^s = (d_1^s, \dots, d_n^s)$ i znajdowania parametrów poszukiwanych charakterystyk pocisku (rozwiązania zagadnienia odwrotnego) jako zbioru wartości $\mathbf{a}^r = (a_1^r, \dots, a_m^r)$ argumentów $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_m)$ tego funkcjonału odpowiadających jego najmniejszej wartości:

$$\mathbf{a}^r = \arg \min \{ \Phi(\mathbf{a}): \mathbf{a} \in \mathbf{R}^m \}. \quad (19)$$

Funkcjonał podobieństwa wybiera się zwykle w postaci kwadratu ważonej normy euklidesowej [9]:

$$\Phi(\mathbf{a}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{d_i^s - d_i^d}{\sigma_i} \right)^2 \quad (20)$$

z dodatnimi wagami σ_i .

Dla danych $d_i^d > 0$ można przyjąć $\sigma_i = d_i^d$, a wtedy $\sqrt{\Phi(\mathbf{a})}$ jest średnio-kwadratowym względnym błędem przybliżenia pojedynczego elementu wektora danych przez odpowiadający mu element wektora wyników symulacji. Zależność $\mathbf{d}^d = \mathbf{d}^d(\mathbf{a})$ (a tym samym zależność $\Phi = \Phi(\mathbf{a})$) określona jest przez układ równań ruchu pocisku wybranego modelu balistycznego i wybór kontrolowanych elementów torów lotu pocisków. Zagadnienie to charakteryzuje się typową dla zagadnień odwrotnych niestabilnością, będącą skutkiem nieciągłej zależności poszukiwanych wartości parametrów \mathbf{a}^r od danych i wartości funkcjonału Φ . Aby je skutecznie rozwiązywać numerycznie, trzeba je regularyzować [8].

Opracowano algorytm rozwiązywania tak postawionego zagadnienia, użyteczny i skuteczny dla wszystkich trzech modeli ruchu pocisku. Zastosowana regularyzacja (według Tichonowa) polega na zastąpieniu funkcjonału podobieństwa funkcjonałem wygładzającym Ψ

$$\Psi(\mathbf{a}) = \Phi(\mathbf{a}) + \gamma \Theta(\mathbf{a}), \quad (21)$$

w którym funkcjonal stabilizujący $\Theta(\mathbf{a})$ jest sumą całek kwadratów pochodnych wszystkich wyznaczanych funkcyjnych współczynników sił i momentów aerodynamicznych, wyrażonych (tak dla funkcji sklepanych, jak i wielomianów) za pomocą odpowiednich podzbiorów elementów wektora parametrów \mathbf{a} , a małą dodatnią liczbą γ jest parametrem regularyzacji.

Zregularyzowane rozwiązanie zagadnienia odwrotnego znajduje się numerycznie jako wektor parametrów \mathbf{a}^γ minimalizujący funkcjonal wygładzający:

$$\mathbf{a}^\gamma = \arg \min \{ \Psi(\mathbf{a}) : \mathbf{a} \in \mathbf{R}^m \} \quad (22)$$

z odpowiednio wybranym parametrem regularyzacji γ .

W algorytmie można wyróżnić wewnętrzną procedurę numerycznego rozwiązywania układu równań ruchu pocisku do wyznaczania trajektorii przy znanych parametrach modelu ruchu oraz zewnętrzną procedurę do numerycznego wyznaczania wektora minimalizującego funkcjonal wygładzający.

Wewnętrzna procedura została opracowana jako wariant metody Rungego-Kutty czwartego rzędu z automatycznym doбором kroku całkowania (automatyczny dobór kroku zapewnia zmniejszenie kosztu obliczeniowego bez istotnego zmniejszenia dokładności obliczeń).

Zewnętrzna procedura została opracowana jako wariant bezgradientowej metody kierunków poprawy Powella (bezpośredniej metody rachunku wariacyjnego), z odświeżaniem kierunków minimalizacji i minimalizacją funkcjonu celu (czyli funkcjonu wygładzającego) w kierunkach metodą złotego podziału. Elementem zewnętrznej procedury jest też adaptacyjny dobór parametru regularyzacji, zainspirowany kryteriami doboru tego parametru dla liniowych równań operatorowych pierwszego rodzaju według pierwotnego i wtórnego uchybu.

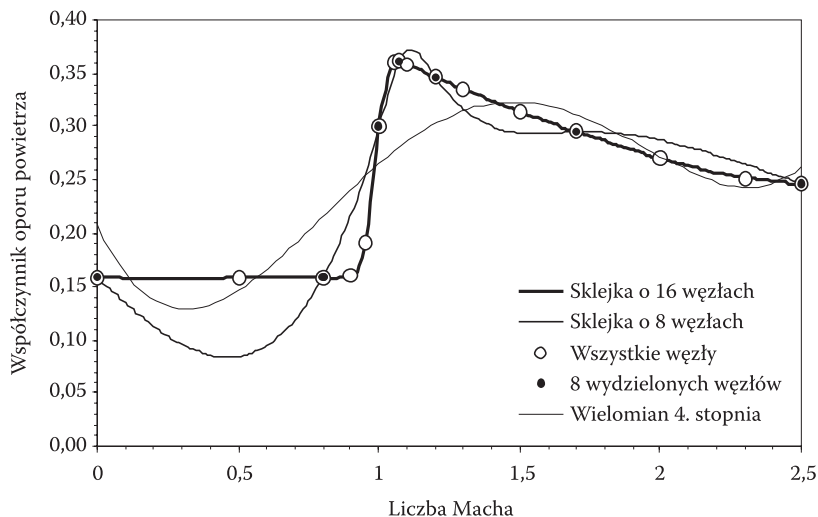
Należy podkreślić, że wszystkie modelowe współczynniki sił i momentów aerodynamicznych można wiarygodnie wyznaczać tylko dla zakresu prędkości pocisku (liczb Macha) rzeczywiście reprezentowanych przez dane wejściowe; ekstrapolacje poza ten zakres są zwykle mało dokładne. Przykład zastosowania przedstawionego algorytmu podany jest w dalszej części artykułu.

4. Wyznaczanie współczynników aerodynamicznych

4.1. Modelowanie współczynnika siły oporu

Funkcja wybrana do opisu współczynnika siły oporu (i podobnie każdego z pozostałych współczynników sił i momentów aerodynamicznych) w zależności od liczby Macha powinna umożliwiać dobre przybliżenie jego charakterystycznej postaci przy jak najmniejszej liczbie parametrów modelujących. Dobrze nadaje się do tego naturalna funkcja sklejana trzeciego stopnia, interpolująca wartości współczynnika oporu wyznaczone w procedurze optymalizacyjnej w ustalonych z góry węzłach, rozmieszczonych odpowiednio w analizowanym przedziale liczb Macha. Naturalna funkcja sklejana trzeciego stopnia, interpolująca zadany układ par liczb $\{(t_i, x_i)\}_{i=0}^k$ (w którym $t_0 < t_1 < \dots < t_k$) jest funkcją, która w węzłach t_i ma wartości x_i , na każdym z przedziałów $\langle t_i, t_{i+1} \rangle$, $t = 0, \dots, (k-1)$, jest wielomianem

co najwyżej trzeciego stopnia, jest dwukrotnie różniczkowalna w sposób ciągły na przedziale $\langle t_0, t_k \rangle$ i ma drugą pochodną równą zero w krańcowych węzłach; zadanie interpolacji taką funkcją sklejaną ma jednoznaczne rozwiązanie, gdy $k \geq 3$. Węzły do opisu współczynnika siły oporu wybiera się intuicyjnie, na podstawie analizy typowych postaci zależności współczynnika siły oporu od liczby Macha; powinny być rozmieszczone gęściej w podprzedziale jego szybkiej zmienności (0,9; 1,1) i rzadziej poza nim. Parametrami wyznaczanymi podczas rozwiązywania zagadnienia odwrotnego są tylko wartości funkcji sklejaney w węzłach, podczas gdy do rozwiązywania równań trajektorii pocisków wykorzystuje się także wartości funkcji sklejaney między węzłami. Przykład takiego modelowania przedstawiony jest na rysunku 3. Wartości współczynnika siły oporu C_D w funkcji liczby Macha Ma dla modelu punktu materialnego (odczytane z wykresu J13 normy STANAG 4144) zostały przybliżone funkcją sklejaną opartą na szesnastu węzłach (dokładnie) oraz funkcją sklejaną opartą tylko na ośmiu spośród tych szesnastu węzłów (niedokładnie) oraz dodatkowo wielomianem czwartego stopnia dopasowanym metodą najmniejszych kwadratów (niedokładnie). Ze względu na podobną postać zmienności współczynnika siły oporu C_D we wszystkich trzech modelach ruchu pocisku, przykład ten świadczy, że zalecane w normie STANAG 4355 przybliżenie go wielomianem czwartego stopnia może spowodować, iż model ruchu będzie nieadekwatny i mało dokładny.



Rys. 3. Współczynnik siły oporu C_D w modelu punktu materialnego z wykresu J13 normy STANAG 4144 wymodelowany sklejką opartą na szesnastu węzłach (dokładnie), sklejką opartą na ośmiu węzłach (niedokładnie) i wielomianem czwartego stopnia (niedokładnie)

4.2. Wyznaczanie współczynnika siły oporu w modelu punktu materialnego

W modelu punktu materialnego, przy założeniu braku wiatru ($\mathbf{v} = \mathbf{u}$) i po pominięciu mało istotnej siły Coriolisa, w układzie związanym z wektorem prędkości pocisku, równania ruchu pocisku przybierają następującą postać skalarną [1]:

$$\frac{du}{dt} = -\frac{DF}{m} - g \sin \theta \quad (23)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = -\frac{g \cos \theta}{u} \quad (24)$$

$$\frac{dX_1}{dt} = u \cos \theta \quad (25)$$

$$\frac{dX_2}{dt} = u \sin \theta, \quad (26)$$

gdzie: $DF = C_D \frac{\rho u^2}{2} S$ — siła oporu;

θ — kąt pochylenia toru (kąt zawarty między wektorem prędkości a płaszczyzną poziomą);

$g(X_2) = g_0 \left(1 - \frac{2X_2}{R_Z}\right)$ — przyspieszenie siły ciężkości zależne

od wysokości lotu X_2 ;

$g_0 = 9,80665 \text{ [m/s}^2\text{]}$ — przyspieszenie ziemskie na powierzchni Ziemi;

$R_Z = 6356766 \text{ [m]}$ — promień Ziemi.

W obliczeniach należy uwzględnić również zależność parametrów atmosfery: temperatury, gęstości powietrza i prędkości dźwięku od wysokości lotu X_2 według zależności jak w Normalnej Atmosferze Artyleryjskiej:

$$T = T(X_2) = 288,9 - 0,006328X_2 \quad [\text{K}] \quad (27)$$

$$\rho = \rho(T) = \frac{100033}{287,05287 T} \cdot \left(\frac{T}{288,9}\right)^{5,3987} \quad \left[\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\right] \quad (28)$$

$$a = 20,056\sqrt{T} \quad [\text{Ma}] \quad (29)$$

Funkcjonał podobieństwa dla zagadnienia odwrotnego przyjmuje najprostszą postać, gdy dane wejściowe stanowią same zasięgi pocisków X_{1i} przy ustalonych poziomach upadku pocisków X_{2i} , dla różnych kątów podniesienia lufy działa QE i różnych prędkości początkowych (ładunków miotających):

$$\Phi(\mathbf{a}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{X_{1i}^d - X_{1i}^s}{X_{1i}^d} \right)^2. \quad (30)$$

Przy ustalonym układzie węzłów funkcji sklejaney interpolującej współczynnik siły oporu C_D , znajduje się wartości sklejki w węzłach (wektor parametrów modelu \mathbf{a}), którym odpowiada najmniejsza (w przybliżeniu) wartość powyższego funkcyjonału. Rozwiązanie znajduje się, stosując opisany wyżej algorytm regularyzujący.

4.3. Przykładowe wyniki obliczeń

4.3.1. Identyfikacja współczynnika siły oporu klasycznego pocisku artyleryjskiego

Próby identyfikacji współczynnika siły oporu C_D klasycznego pocisku artyleryjskiego (stabilizowanego obrotowo) poprzez rozwiązanie zagadnienia odwrotnego balistyki zewnętrznej (punkt 3) przeprowadzono dla rzeczywistych danych z próbnych strzelań (w atmosferze wzorcowej bez wiatru) pociskami odłamkowo-burzącymi OF-462 (o masie 21,76 kg i powierzchni przekroju poprzecznego $S = 0,0117 \text{ m}^2$) ze 122 mm haubicy samobieźnej 2S1, które posłużyły do opracowania tabel strzelniczych [7].

Jako dane wejściowe do identyfikacji przyjęto zasięgi na poziomie wylotu z lufy dla wszystkich prędkości początkowych odpowiadających ładunkom: pełnemu, zmniejszonemu, pierwszemu, drugiemu, trzeciemu i czwartemu oraz kątom podniesienia $QE = 10^\circ, 25^\circ, 45^\circ$ i 75° jak w tabeli 1. Współczynnik siły oporu zamodelowano funkcją sklejaną opartą na 21 węzłach o wartościach $Ma = 0,2; 0,5; 0,7; 0,8; 0,85; 0,875; 0,9; 0,925; 0,95; 0,975; 1; 1,025; 1,05; 1,1; 1,2; 1,3; 1,5; 1,7; 2; 2,3; 2,7$ (punkt 4.1). Dodatkowo zamodelowano kąt podrzutu η jako liniowo zależny od prędkości początkowej pocisku u_0 : $\eta_0 + \eta_1 u_0$. Zastosowano model ruchu pocisku opisany w punkcie 4.2.

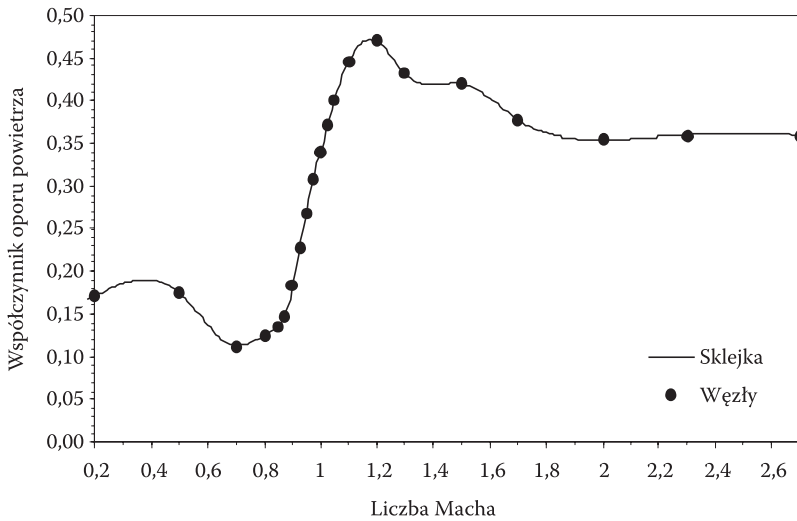
Wyniki identyfikacji współczynnika siły oporu pocisku OF-462 przedstawiono na rysunku 4.

Przebieg tej funkcji (z niewielkimi fałszywymi ekstremami dla małych i dużych wartości liczb Macha) jest typowy dla rozwiązań zagadnień odwrotnych. Gdyby zastosowano większe wartości parametru regularyzacji, większą liczbę węzłów i wzięto większą liczbę danych, te ekstrema zniknęłyby, ale kosztem możliwego przegładzenia rozwiązania i spłaszczenia go w środku przedziału. Aby uniknąć takich niepożądanych efektów, dobierano wartości parametru regularyzacji, zapewniające stabilność algorytmu rozwiązywania zagadnienia, ale bez silnego wygładzania rozwiązania.

TABELA 1

Dane ze strzelań i obliczone za pomocą dopasowanego modelu punktu materialnego dla 122 mm pocisku OF462 i haubicy 2S1

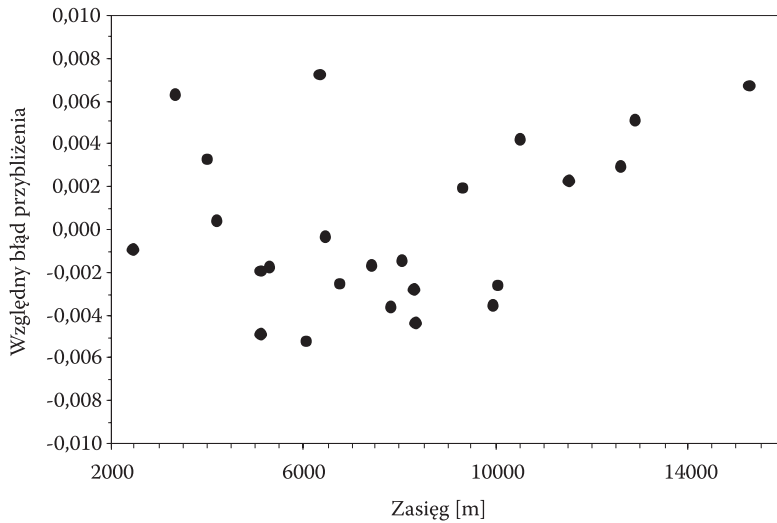
Prędkość początkowa [m/s]	Kąt podniesienia lufy QE [°]	Zasięg rzeczywisty [m]	Zasięg obliczony [m]	Względny błąd obliczenia zasięgu	Kąt podrzutu obliczony [minuty]	Kąt podrzutu wg tabeli [minuty]
275	10	2451	2453,3	-0,0009	-4,4	-5
275	25	5122	5147,2	-0,0049	-4,4	-5
275	45	6325	6279,5	0,0072	-4,4	-5
275	70	3996	3982,9	0,0033	-4,4	-5
334	10	3333	3311,9	0,0063	-2,4	-2
334	25	6747	6763,7	-0,0025	-2,4	-2
334	45	8337	8373,5	-0,0044	-2,4	-2
334	70	5303	5312,5	-0,0018	-2,4	-2
415	10	4190	4188,4	0,0004	0,5	3
415	25	8062	8073,3	-0,0014	0,5	3
415	45	10036	10062,3	-0,0026	0,5	3
415	70	6450	6452,0	-0,0003	0,5	3
491	10	5130	5139,6	-0,0019	3,2	5
491	25	9312	9294,3	0,0019	3,2	5
491	45	11520	11493,3	0,0023	3,2	5
491	70	7411	7423,4	-0,0017	3,2	5
563	10	6055	6086,4	-0,0052	5,8	7
563	25	10505	10461,1	0,0042	5,8	7
563	45	12874	12808,5	0,0051	5,8	7
563	70	8305	8328,1	-0,0028	5,8	7
687	10	7800	7827,8	-0,0036	10,2	5
687	25	12608	12571,1	0,0029	10,2	5
687	45	15260	15157,2	0,0067	10,2	5
687	70	9962	9997,0	-0,0035	10,2	5



Rys. 4. Współczynnik siły oporu C_D w modelu punktu materialnego, dla 122 mm pocisku OF-462, wyznaczony jako naturalna funkcja sklejkana trzeciego stopnia o 21 węzłach

Minimalizacja funkcjonau wygładzającego zakończyła się na wartościach $\sqrt{\Psi(\mathbf{a}')} \approx 0,0046$ i $\sqrt{\Phi(\mathbf{a}')} \approx 0,0038$. Wyniki symulacji torów lotu pocisków za pomocą dopasowanego modelu (obliczone zasięgi i kąty podrzutu) zestawione są w tabeli 1 z danymi ze strzelań poligonowych. Miarą dokładności identyfikacji współczynnika siły oporu mogą być względne błędy przybliżeń zasięgów, które są wyznaczone jako stosunek różnicy między zasięgiem uzyskanym ze strzelań poligonowych (zasięgiem rzeczywistym) i zasięgiem obliczonym z symulacji do zasięgu uzyskanego ze strzelań poligonowych (rys. 5).

Uzyskane niewielkie względne błędy przybliżeń zasięgów (ze średnią arytmetyczną odchyłeń równą 0,0012) świadczą o dużej dokładności opisu ruchu pocisku artyleryjskiego stabilizowanego obrotowo — modelem punktu materialnego (istotne jest przy tym wzięcie pod uwagę adekwatnego modelu atmosfery). Niestety, dokładność odtworzenia zasięgów (średniokwadratowa 0,0038) jest jednak niewystarczająca do konstrukcji dokładnych tabel strzelniczych (powinna być bliska 0,001). Dodatkowo istotną wadą tego modelu jest pominięcie ruchu obrotowego pocisku i spowodowanej nim derywacji (odchylenia bocznego punktu upadku pocisku od płaszczyzny strzału).



Rys. 5. Rozkład względnych błędów przybliżeń zasięgów dla pocisku OF-462

4.3.2. Identyfikacja współczynnika siły oporu pocisku stabilizowanego brzechwowo

Przeprowadzono również próbę identyfikacji współczynnika siły oporu C_D pocisku stabilizowanego brzechwowo poprzez rozwiązanie zagadnienia odwrotnego balistyki zewnętrznej (punkt 3) dla rzeczywistych danych z próbnych strzałów (w atmosferze wzorcowej bez wiatru) pociskami moździerzowymi (o masie $m = 10,264$ kg i powierzchni przekroju poprzecznego $S = 0,007543$ m²) z 98 mm moździerza.

Jako dane wejściowe do identyfikacji przyjęto zasięgi na poziomie wylotu z lufy dla wszystkich prędkości początkowych odpowiadających czterem ładunkom oraz pięciu kątom podniesienia QE około 45°, 55°, 65°, 75° i 80° jak w tabeli 2. Współczynnik siły oporu modelowano sklejką opartą na 13 węzłach o wartościach $Ma = 0,05; 0,1; 0,2; 0,3; 0,4; 0,5; 0,6; 0,7; 0,8; 0,9; 0,925; 0,95; 0,975$ (punkt 4.1). Kąt podrzutu przyjęto równy zero, na podstawie próbnych obliczeń. Zastosowano model ruchu pocisku opisany w punkcie 4.2.

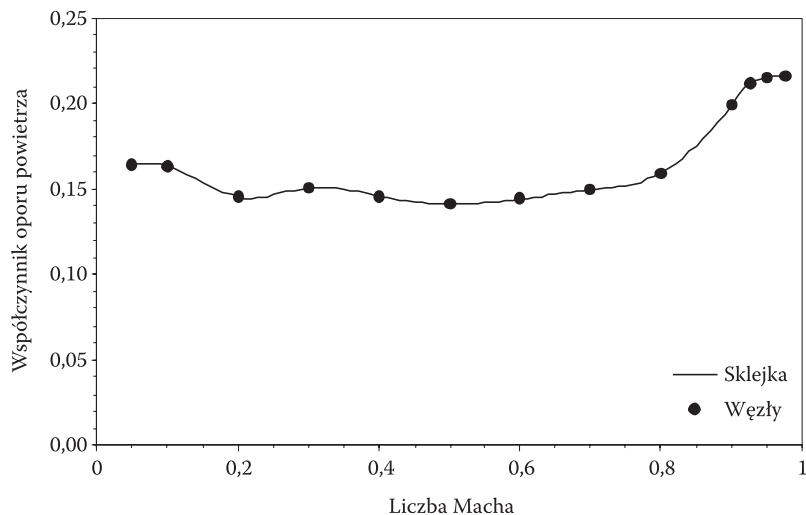
Wyniki identyfikacji współczynnika siły oporu 98 mm pocisku moździerzowego przedstawiono na rysunku 6. Przebieg tej funkcji można skomentować podobnie jak przedstawionej na rysunku 4 (punkt 4.3.1). Minimalizacja funkcjonaułu wygładzającego zakończyła się na wartościach $\sqrt{\Psi(\mathbf{a}^\gamma)} \approx 0,0010$ i $\sqrt{\Phi(\mathbf{a}^\gamma)} \approx 0,0009$. Wyniki symulacji torów lotu pocisków za pomocą dopasowanego modelu (obliczone zasięgi) zestawione są w tabeli 2 z danymi ze strzałów poligonowych. Względne błędy przybliżeń zasięgów przedstawiono dodatkowo na rysunku 7.

TABELA 2

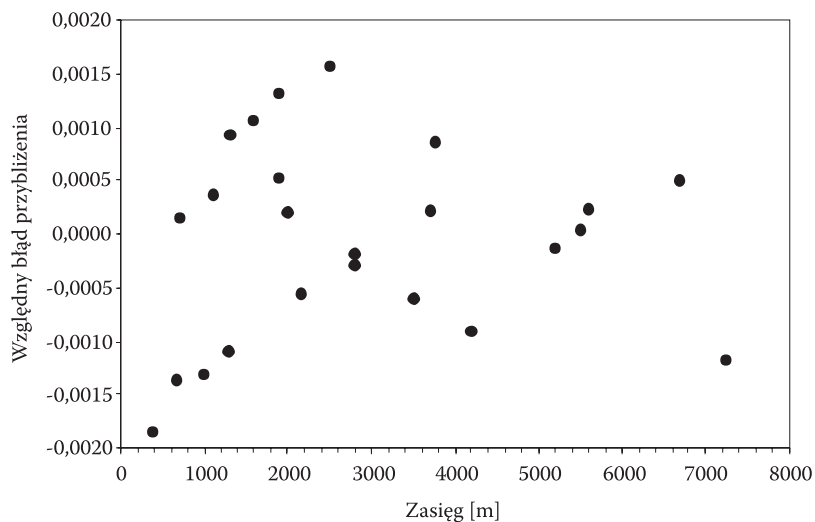
Dane ze strzelań i obliczone za pomocą dopasowanego modelu punktu materialnego dla 98 mm pocisku miedzianego

Prędkość wylotu [m/s]	Kąt podniesienia lufy QE [°]	Zasięg rzeczywisty [m]	Zasięg obliczony [m]	Względny błąd obliczenia zasięgu
154	45	2166	2164,8	-0,0006
154	55,86	2000	2000,4	0,0002
154	66	1600	1601,7	0,0011
154	74,7	1100	1100,4	0,0004
154	80,58	700	700,1	0,0001
154	85	378	377,3	-0,0019
211	45	3764	3767,2	0,0009
211	55,2	3500	3497,9	-0,0006
211	65,76	2800	2799,2	-0,0003
211	74,82	1900	1901	0,0005
211	79,92	1300	1301,2	0,0009
211	85	659	658,1	-0,0014
270	45	5605	5606,3	0,0002
270	55,26	5200	5199,3	-0,0001
270	65,52	4200	4196,2	-0,0009
270	75,06	2800	2799,5	-0,0002
270	80,16	1900	1902,5	0,0013
270	85	987	985,7	-0,0013
325	45	7227	7218,5	-0,0012
325	55,38	6700	6703,4	0,0005
325	65,1	5500	5500,2	0,0000
325	74,76	3700	3700,8	0,0002
325	80,04	2500	2503,9	0,0016
325	85	1285	1283,6	-0,0011

Uzyskane niewielkie względne błędy przybliżeń zasięgów (ze średnią arytmetyczną odchyień równą 0,0006) świadczą o bardzo dużej dokładności opisu ruchu pocisku stabilizowanego brzechwowo — modelem punktu materialnego (istotne jest przy tym wzięcie pod uwagę adekwatnego modelu atmosfery); dokładność od-



Rys. 6. Współczynnik siły oporu C_D w modelu punktu materialnego dla 98 mm pocisku moździerzowego, wyznaczony jako naturalna funkcja sklejana trzeciego stopnia o 13 węzłach



Rys. 7. Rozkład względnych błędów przybliżeń zasięgów dla 98 mm pocisku moździerzowego

tworzenia zasięgów (średniokwadratowa 0,0009) jest wystarczająca do konstrukcji dokładnych tabel strzelniczych. Wynik ten pokazuje, że model punktu materialnego jest adekwatny dla prawidłowego modelowania toru lotu rozpatrywanego pocisku moździerzowego.

5. Podsumowanie i wnioski końcowe

Skonstruowany został stabilny algorytm rozwiązywania głównego zagadnienia balistyki zewnętrznej, czyli zagadnienia odwrotnego polegającego na wyznaczeniu nieliniowych funkcyjnych współczynników sił i momentów aerodynamicznych na podstawie danych balistycznych z prób poligonowych (na przykład zasięgów lub czasów lotów, a także położenia, prędkości lub przyspieszenia w wybranych punktach trajektorii) dla każdego z trzech modeli ruchu pocisku (punktu materialnego, zmodyfikowanego punktu materialnego i bryły sztywnej).

Wyznaczanie tych współczynników zostało zredukowane do modelowania ich funkcjami sklejanymi bądź wielomianami i obliczania ich parametrów (współczynników wielomianów lub wartości funkcji sklepanych w węzłach).

Stwierdzono, że do dokładnego opisu współczynnika siły oporu w zakresie liczb Macha (0, 3) wielomian czwartego stopnia jest niewystarczający, znacznie lepiej nadaje się do tego funkcja sklejana oparta na co najmniej szesnastu dobrze dobranych węzłach (rys. 3). W modelach zmodyfikowanego punktu materialnego oraz bryły sztywnej współczynniki inne niż siły oporu prawdopodobnie da się adekwatnie opisać wielomianami czwartego stopnia; a zatem trzeba będzie wyznaczać około pięćdziesiąt parametrów liczbowych charakteryzujących każdy z tych modeli. W przedstawionym tu przykładzie (dla pocisku artyleryjskiego OF-462) wyznaczano dwadzieścia trzy parametry, co ilustruje możliwość wykonania podobnych obliczeń dla każdego z rozpatrywanych modeli ruchu pocisku.

Zagadnienia odwrotne dla poszczególnych modeli różnią się przede wszystkim złożonością obliczeniową wewnętrznej procedury rozwiązywania układu równań ruchu, która jest większa dla modeli uwzględniających ruch obrotowy pocisku.

Stwierdzono bardzo dobrą zgodność zasięgów zmierzonych i obliczonych w modelu punktu materialnego dla pocisków moździerzowych.

Wyznaczanie parametrów modeli ruchu dla wybranych pocisków i dział na podstawie danych z prób poligonowych jest przedmiotem dalszych badań.

Praca naukowa finansowana ze środków Komitetu Badań Naukowych w latach 2004-2006 jako projekt badawczy OT00B00127.

Artykuł wpłynął do redakcji 11.09.2007 r. Zweryfikowaną wersję po recenzji otrzymano w styczniu 2008 r.

LITERATURA

- [1] L. Baranowski, *Modele trajektorii ruchu pocisku artyleryjskiego w układach odniesienia zgodnych z polską normą PN-83*, Biul. WAT, 51, 10, 2002, 85-104.

- [2] L. Baranowski, *Wyniki badań numerycznych dynamiki lotu pocisków artyleryjskich w warunkach normalnych i zakłóconych*, Biul. WAT, 51, 10, 2002, 105-127.
- [3] J. Gacek, *Balistyka zewnętrzna. Cz. I. Modelowanie zjawisk balistyki zewnętrznej i dynamiki lotu*, Wydawnictwo WAT, Warszawa, 1999.
- [4] Art. 185/59, *Podręcznik Balistyka zewnętrzna*, MON, Warszawa, 1959.
- [5] *Procedures to Determine the Fire Control Inputs for use in Indirect Fire Control Systems*, STANAG 4144 (Edition 2).
- [6] *The Modified Point Mass Trajectory Model*, STANAG 4355 (Edition 3).
- [7] *Tabele strzelnicze do 122 mm haubicy samobieżnej 2S1*.
- [8] M. A. Kojdecki, *New criterion of regularisation parameter choice in Tikhonov's method*, Biul. WAT, 49, 1, 2000, 47-126.
- [9] M. A. Kojdecki, J. Kędziński, Z. Raszewski, *On discrete coefficient inverse problem*, Biul. WAT, 48, 4, 1999, 107-112.
- [10] R. L. McCoy, *Modern Exterior Ballistics. The Launch and Flight Dynamics of Symmetric Projectiles*, Schiffer Publishing, 1999.

L. BARANOWSKI, M. A. KOJDECKI

**Inverse problem of external ballistics and algorithm for determining parameters
of artillery projectile motion models**

Abstract. The paper describes a regularising algorithm for numerical solving main external ballistics problem, i.e., for determining a drag coefficient and coefficients of other aerodynamic forces and moments, applicable for any of the three axial-symmetry projectile motion models used in ballistics - point mass, modified point mass, and rigid body models. The representation of a drag coefficient as a function of Mach number in form of cubic spline with knots being elements of an inverse problem solution is suggested and discussed. The usefulness and effectiveness of the algorithm have been tested using the data from howitzer and mortar firings and illustrated with the results of computing projectile ranges by a point-mass model.

Keywords: mechanics, exterior ballistics, methods of identification

Universal Decimal Classification: 623.54