



Teoretyczna analiza wpływu ściśliwości ośrodka sprężystego na parametry ekspandującej kulistej fali naprężenia. I. Analityczne rozwiązanie problemu

EDWARD WŁODARCZYK, MARIUSZ ZIELENKIEWICZ*

Wojskowa Akademia Techniczna, Wydział Mechatroniki,
00-908 Warszawa, ul. S. Kaliskiego 2

*Wojskowy Instytut Techniczny Uzbrojenia, Zakład Uzbrojenia Artyleryjskiego,
05-220 Zielonka, ul. Prymasa Stefana Wyszyńskiego 7

Streszczenie. W pierwszej części pracy rozwiązano analitycznie problem propagacji ekspandującej kulistej fali naprężenia w ściślimym, sprężystym izotropowym ośrodku nieograniczonym. Falę wygenerowano dynamicznym obciążeniem wytworzonym w kulistej kawernie. Dla stałego ciśnienia nagle wytworzonego uzyskano analityczne zamknięte wzory, które określają dynamiczny stan mechanicznych parametrów ośrodka. Obszerną analizę tych parametrów w czasie (t) i przestrzeni (r) dla różnych wartości liczby Poissona (ν), reprezentującej ściśliwość ośrodka, przedstawiono w drugiej części pracy. Wykryto anormalny wpływ liczby Poissona w otoczeniu wartości $\nu = 0,5$ (sprężysta nieściśliwość ośrodka) na parametry ekspandującej fali naprężenia.

Słowa kluczowe: Ekspandująca kulista fala naprężenia, izotropowy ośrodek liniowo-sprężysty, obciążenie dynamiczne

Symbole UKD: 534.222.2

1. Wprowadzenie

Często w teoretycznych analizach dynamiki otoczek (linerów) obciążanych wybuchowo pomija się ściśliwość ich materiału [1-10]. Uproszczenie to w sposób istotny ułatwia konstrukcję analitycznych rozwiązań wielu zagadnień granicznych. Jednak z drugiej strony ta idealizacja rzeczywistego układu fizycznego powoduje pominięcie procesów falowych przebiegających w linerze. Natomiast wyniki analiz teoretycznych [11-14] i badań eksperymentalnych [15, 16] poka-

zują, że zjawiska falowe mają istotny, jakościowy i ilościowy wpływ na proces napędzania linerów.

Biorąc pod uwagę wyniki tych publikacji oraz potrzeby mechaniki wybuchu w zakresie dynamicznych zagadnień granicznych, w niniejszej pracy zbadano teoretycznie wpływ ściśliwości sprężystego ośrodka izotropowego na parametry ekspandującej kulistej fali naprężenia. Falę wygenerowano nagłym wzrostem ciśnienia wewnątrz kulistej kawerny o początkowym promieniu r_0 , znajdującej się w izotropowym ośrodku sprężystym. W pierwszej części pracy uzyskano zamknięte analityczne rozwiązanie problemu. Dla nagłego obciążenia powierzchni kawerny stałym ciśnieniem p_0 wyprowadzono analityczne wzory określające w zamkniętej postaci parametry ekspandującej kulistej fali naprężenia. Obszerną, ilościową i jakościową analizę tych parametrów w czasie i przestrzeni dla różnych wartości liczby Poissona ν reprezentującej ściśliwość ośrodka, przedstawiono w drugiej części pracy. Wykryto anormalny wpływ liczby Poissona w otoczeniu wartości $\nu = 0,5$ (sprężysta nieściśliwość materiału) na parametry fali naprężenia.

Przedstawione w pracy wyniki badań teoretycznych można wykorzystać na przykład do oceny dynamiki kulistych osłon balistycznych [10]. Stanowią one również skromny przyczynek uzupełniający wiedzę o propagacji niestacjonarnych fal naprężenia w izotropowym ośrodku sprężystym.

2. Sformułowanie problemu

Rozpatrzmy propagację sprężystej fali naprężenia w nieograniczonym ośrodku izotropowym w ramach liniowej teorii sprężystości [17]. Fala generowana jest przez ciśnienie $p(t)$ wytworzone w kulistej kawernie o początkowym promieniu r_0 . Ze względu na kulistą symetrię rozwiązanie problemu będzie zależało tylko od dwóch zmiennych niezależnych, współrzędnej Lagrange'a r i czasu t .

Stany naprężenia i odkształcenia w ośrodku otaczającym kawernę reprezentowane są przez następujące składowe główne:

- σ_r — naprężenie promieniowe (radialne),
- $\sigma_\varphi = \sigma_\theta$ — naprężenia obwodowe (styczne),
- ε_r — odkształcenie promieniowe (radialne),
- $\varepsilon_\varphi = \varepsilon_\theta$ — odkształcenia obwodowe (styczne).

Pozostałe składowe tensorów naprężenia i odkształcenia w tym układzie współrzędnych są równe zeru.

Zgodnie z liniową teorią sprężystości [17] mamy następujące relacje:

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r}, \quad \varepsilon_\varphi = \varepsilon_\theta = \frac{u}{r} \quad (2.1)$$

$$\begin{aligned}\sigma_r &= 2\mu\varepsilon_r + \lambda(\varepsilon_r + 2\varepsilon_\varphi) = (2\mu + \lambda)\varepsilon_r + 2\lambda\varepsilon_\varphi = \\ &= (2\mu + \lambda)\frac{\partial u}{\partial r} + 2\lambda\frac{u}{r},\end{aligned}\quad (2.2)$$

$$\begin{aligned}\sigma_\varphi &= 2\mu\varepsilon_\varphi + \lambda(\varepsilon_r + 2\varepsilon_\varphi) = 2(\mu + \lambda)\varepsilon_\varphi + \lambda\varepsilon_r = \\ &= 2(\mu + \lambda)\frac{u}{r} + \lambda\frac{\partial u}{\partial r},\end{aligned}\quad (2.3)$$

$$v = \frac{\partial u}{\partial t},\quad (2.4)$$

gdzie u jest radialnym przemieszczeniem ośrodka, v — prędkością masową, natomiast λ i μ oznaczają stałe Lamego:

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1 + \nu)}.\quad (2.5)$$

Z kolei symbole E i ν oznaczają odpowiednio moduł Younga i liczbę Poissona.

Równanie ilości ruchu dla małych odkształceń ma postać:

$$\rho_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{2(\sigma_r - \sigma_\varphi)}{r},\quad (2.6)$$

gdzie ρ_0 jest początkową gęstością ośrodka.

Po podstawieniu w równaniu (2.6) wyrażeń dla σ_r i σ_φ — wzory (2.2) i (2.3) oraz po dokonaniu przekształceń, otrzymuje się:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + 2a^2 \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r^2} \right),\quad (2.7)$$

gdzie

$$a^2 = \frac{1 - \nu}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} a_0^2, \quad a_0^2 = \frac{E}{\rho_0},\quad (2.8)$$

a jest prędkością propagacji kulistej fali sprężystej. Z wzoru (2.8)₁ bezpośrednio wynika, że jeśli $\nu \rightarrow 1/2$ (ośrodek nieściśliwy), to $a \rightarrow \infty$ (zanika ruch falowy).

Warunki graniczne dla rozwiązania $u(r, t)$ równania (2.7) są następujące:

$$u(r, t) = 0 \quad \text{dla} \quad r = r_0 + at, \quad (2.9)$$

$$\sigma_r(r, t) = (2\mu + \lambda) \frac{\partial u(r, t)}{\partial r} + 2\lambda \frac{u(r, t)}{r} = -p(t), \quad p(t) > 0 \quad \text{dla} \quad r = r_0, \quad (2.10)$$

$$\sigma_r(r, t) \equiv 0 \quad \text{dla} \quad r = \infty.$$

Równanie ciągłości ruchu ośrodka, zgodnie z zasadą zachowania masy, ma postać:

$$\left(1 + \frac{u}{r}\right)^2 \left(1 + \frac{\partial u}{\partial r}\right) = \frac{\rho_0}{\rho(r, t)}, \quad (2.11)$$

gdzie $\rho(r, t)$ jest bieżącą gęstością ośrodka.

Dla nieskończenie małych odkształceń równanie (2.11), po pominięciu małych wyższego rzędu można zredukować do postaci:

$$1 + \frac{\partial u}{\partial r} + 2\frac{u}{r} = \frac{\rho_0}{\rho}. \quad (2.12)$$

Jak widać, z równania (2.12), po wyznaczeniu przemieszczenia $u(r, t)$ można bezpośrednio określić bieżącą gęstość ośrodka.

Rozwiązanie tak sformułowanego problemu granicznego przedstawiamy w następnym punkcie.

3. Ogólne rozwiązanie problemu

Rozwiązanie ogólne równania (2.7) wraz ze spełnieniem warunków granicznych (2.9) i (2.10)₂ ma postać [3]:

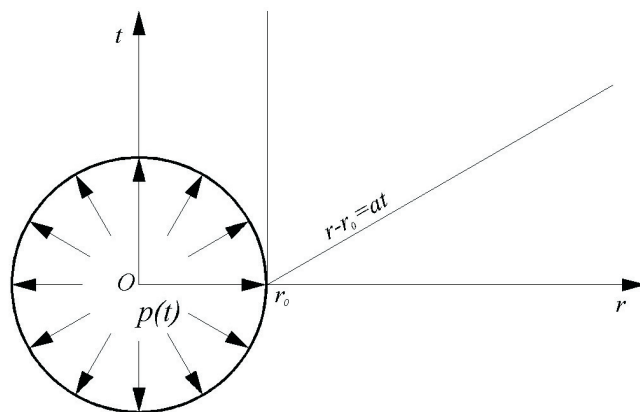
$$u(r, t) = \frac{\varphi'(r - r_0 - at)}{r} - \frac{\varphi(r - r_0 - at)}{r^2}, \quad (3.1)$$

$$\varphi'(0) = \varphi(0) = 0, \quad (3.2)$$

gdzie

$$r - r_0 = a t \quad (3.3a)$$

jest trajektorią ruchu czoła fali naprężenia propagującej się od powierzchni pustki w głąb ośrodka (rys. 1).



Rys. 1. Schemat układu

Symbol φ' oznacza pochodną funkcji φ względem jej argumentu.

Zmienne r i t występujące w rozwiązaniu (3.1) zawarte są w przedziałach:

$$r_0 \leq r \leq \infty, \quad t \geq (r - r_0)/a. \quad (3.3b)$$

Po podstawieniu wyrażenia (3.1) do warunku brzegowego (2.10)₁ otrzymuje się następujące równanie różniczkowe, które musi spełniać funkcja $\varphi(x)$, a mianowicie:

$$\varphi''(x_0) - 2h\varphi'(x_0) + (2h/r_0)\varphi(x_0) = -\frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{(1-\nu)} r_0 p\left(-\frac{x_0}{a}\right) / E, \quad (3.4)$$

gdzie

$$h = \frac{1-2\nu}{1-\nu} \frac{1}{r_0} \geq 0, \quad (3.5)$$

$$x_0 = -at.$$

Rozwiązanie tego równania z jednorodnymi warunkami początkowymi (3.2) reprezentowane jest przez następujące wyrażenie:

$$\varphi(x_0) = -\frac{(1+\nu)\sqrt{1-2\nu}}{E} r_0^2 \int_0^{x_0} p \left(\frac{y-x_0}{a} \right) e^{hy} \sin \omega y \, dy, \quad (3.6)$$

gdzie

$$\omega = \frac{\sqrt{1-2\nu}}{(1-\nu)r_0}.$$

Funkcja $\varphi(x_0)$ i jej pochodne jednoznacznie determinują parametry ekspandującej kulistej fali naprężenia.

Jeśli wewnątrz kulistej kawerny wytworzone jest ciśnienie w sposób statyczny o wartości p_0 , to przemieszczenie elementów ośrodka jest funkcją tylko zmiennej przestrzennej r i równanie (2.7) można zredukować do postaci:

$$\frac{d^2 u_s}{dr^2} + 2 \left(\frac{1}{r} \frac{du_s}{dr} - \frac{u_s}{r^2} \right) = 0, \quad (3.7)$$

z warunkami brzegowymi:

$$\begin{aligned} \sigma_r(r_0) &= (2\mu + \lambda) \left. \frac{du_s}{dr} \right|_{r=r_0} + 2\lambda \frac{u_s}{r_0} = -p_0, \quad p_0 > 0, \\ \sigma_r(\infty) &= 0. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Całka ogólna równania (3.7) ma postać:

$$u_s(r) = C r + \frac{D}{r^2}. \quad (3.9)$$

Z relacji (2.5), warunków (3.8) i rozwiązania (3.9) wynika, że:

$$\begin{aligned} C &= 0 \\ D &= \frac{1+\nu}{2} r_0^3 \frac{p_0}{E}. \end{aligned}$$

Ostatecznie statyczne parametry problemu można określić wzorami:

$$u_s(r) = \frac{1+\nu}{2} \frac{p_0}{E} r_0 \left(\frac{r_0}{r} \right)^2, \quad (3.10)$$

$$\varepsilon_{r_s}(r) = -(1+\nu) \frac{p_0}{E} \left(\frac{r_0}{r} \right)^3, \quad (3.11)$$

$$\varepsilon_{\varphi_s}(r) = \frac{1+\nu}{2} \frac{p_0}{E} \left(\frac{r_0}{r} \right)^3, \quad (3.12)$$

$$\sigma_{r_s}(r) = -p_0 \left(\frac{r_0}{r} \right)^3, \quad (3.13)$$

$$\sigma_{\varphi_s}(r) = \frac{p_0}{2} \left(\frac{r_0}{r} \right)^3. \quad (3.14)$$

4. Analityczne rozwiązanie problemu dla nagle wytworzonego w kawernie ciśnienia $p(t) = p_0 = \text{const}$

Po podstawieniu $p(t) = p_0$ do wzoru (3.6) i scałkowaniu oraz odpowiednich różniczkowaniach funkcji $\varphi(x)$ otrzymuje się:

$$\left. \begin{aligned} \varphi(x) &= -\frac{1+\nu}{2} r_0^3 \frac{p_0}{E} \left[1 + e^{hx} \left(\sqrt{1-2\nu} \sin \omega x - \cos \omega x \right) \right], \\ \varphi'(x) &= -(1+\nu) \sqrt{1-2\nu} r_0^2 \frac{p_0}{E} e^{hx} \sin \omega x, \\ \varphi''(x) &= -\frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{1-\nu} r_0 \frac{p_0}{E} e^{hx} \left(\sqrt{1-2\nu} \sin \omega x + \cos \omega x \right), \end{aligned} \right\} \quad (4.1)$$

gdzie

$$\omega x = \frac{\sqrt{1-2\nu}}{1-\nu} \left(\frac{r}{r_0} - 1 - \sqrt{\frac{1-\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}} \frac{a_0 t}{r_0} \right), \quad (4.2)$$

$$hx = \frac{1-2\nu}{1-\nu} \left(\frac{r}{r_0} - 1 - \sqrt{\frac{1-\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}} \frac{a_0 t}{r_0} \right).$$

W ten sposób określona funkcja $\varphi(x)$ i jej pochodne $\varphi'(x)$ oraz $\varphi''(x)$ spełniają równanie problemu (2.7) i wszystkie warunki graniczne (2.9) oraz (2.10).

W celu uproszczenia analizy ilościowej poszczególnych parametrów ekspandującej fali naprężenia wprowadzimy następujące wielkości bezwymiarowe:

$$\xi = \frac{r}{r_0}, \quad \eta = \frac{a_0 t}{r_0}, \quad U = \frac{u}{r_0}, \quad U_s = \frac{u_s}{r_0}, \quad V = \frac{v}{a_0}, \quad (4.3a)$$

$$R = \frac{\rho}{\rho_0}, \quad S_r = \frac{\sigma_r}{p_0}, \quad S_{r_s} = \frac{\sigma_{r_s}}{p_0}, \quad S_\varphi = \frac{\sigma_\varphi}{p_0}, \quad S_{\varphi_s} = \frac{\sigma_{\varphi_s}}{p_0}, \quad P = \frac{p_0}{E}$$

Bezwymiarowe zmienne ξ i η zgodnie z (3.3b), (2.8) i (4.3a) zawarte są w przedziałach:

$$1 \leq \xi \leq \infty, \quad \eta \geq \sqrt{\frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{1-\nu}} (\xi - 1). \quad (4.3b)$$

Po wykorzystaniu wzorów (3.1) i (4.1) oraz (2.1)-(2.4) i (2.11) w wielkościach bezwymiarowych (4.3a) otrzymuje się:

$$U(\xi, \eta) = \frac{1+\nu}{2} \frac{P}{\xi^2} \left\{ 1 - \left[\sqrt{1-2\nu} (2\xi - 1) \sin \omega x + \cos \omega x \right] e^{hx} \right\}, \quad (4.4)$$

$$V(\xi, \eta) = \frac{P}{\xi} \left\{ \left[(1-2\nu) \sqrt{\frac{1+\nu}{1-\nu}} - \sqrt{1-\nu^2} \frac{1}{\xi} \right] \sin \omega x + \sqrt{\frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{1-\nu}} \cos \omega x \right\} e^{hx} \quad (4.5)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_r(\xi, \eta) = & -(1+\nu)P \left\{ \frac{1}{\xi^3} + \left[\sqrt{1-2\nu} \left(\frac{1-2\nu}{1-\nu} \frac{1}{\xi} - 2 \frac{1}{\xi^2} + \frac{1}{\xi^3} \right) \sin \omega x - \right. \right. \\ & \left. \left. - \left(\frac{1}{\xi^3} - \frac{1-2\nu}{1-\nu} \frac{1}{\xi} \right) \cos \omega x \right] e^{hx} \right\}, \quad (4.6) \end{aligned}$$

$$\varepsilon_\varphi(\xi, \eta) = \frac{1+\nu}{2} \frac{P}{\xi^3} \left\{ 1 - \left[\sqrt{1-2\nu} (2\xi - 1) \sin \omega x + \cos \omega x \right] e^{hx} \right\} \quad (4.7)$$

$$R(\xi, \eta) = 1 / \left[1 + \varepsilon_r(\xi, \eta) + 2\varepsilon_\varphi(\xi, \eta) \right], \quad (4.8)$$

$$S_r(\xi, \eta) = -\frac{1}{\xi^3} \left\{ 1 + (\xi - 1) \left[\sqrt{1-2\nu} (\xi - 1) \sin \omega x + (\xi + 1) \cos \omega x \right] e^{hx} \right\} \quad (4.9)$$

$$S_{\varphi}(\xi, \eta) = \frac{1}{2\xi^3} \left\{ 1 + \left[\sqrt{1-2\nu} \left(-\frac{2\nu}{1-\nu} \xi^2 - 2\xi + 1 \right) \sin \omega x - \left(\frac{2\nu}{1-\nu} \xi^2 + 1 \right) \cos \omega x \right] e^{hx} \right\}, \quad (4.10)$$

gdzie

$$\omega x = \frac{\sqrt{1-2\nu}}{1-\nu} (\xi - 1) - \frac{1}{\sqrt{1-\nu^2}} \eta, \quad (4.11)$$

$$h x = \frac{1-2\nu}{1-\nu} (\xi - 1) - \sqrt{\frac{1-2\nu}{1-\nu^2}} \eta. \quad (4.12)$$

Na powierzchni kawerny, tj. dla $\xi = 1$ wzory (4.4)-(4.12) można przekształcić do następującej postaci:

$$U(1, \eta) = \frac{1+\nu}{2} P \left[1 - \sqrt{2(1-\nu)} \exp \left(-\sqrt{\frac{1-2\nu}{1-\nu^2}} \eta \right) \sin \left(-\frac{1}{\sqrt{1-\nu^2}} \eta + \alpha \right) \right], \quad (4.13)$$

$$V(1, \eta) = \sqrt{1-\nu^2} P \exp \left(-\sqrt{\frac{1-2\nu}{1-\nu^2}} \eta \right) \sin \left(\frac{1}{\sqrt{1-\nu^2}} \eta + \alpha_{\nu} \right), \quad (4.14)$$

$$\varepsilon_r(1, \eta) = -(1+\nu) P \left[1 - \sqrt{\frac{2\nu^2}{1-\nu}} \exp \left(-\sqrt{\frac{1-2\nu}{1-\nu^2}} \eta \right) \sin \left(-\frac{1}{\sqrt{1-\nu^2}} \eta + \alpha \right) \right], \quad (4.15)$$

$$\varepsilon_{\varphi}(1, \eta) = U(1, \eta), \quad (4.16)$$

$$R(1, \eta) = 1 / \left[1 - (1+\nu)(1-2\nu) \sqrt{\frac{2}{1-\nu}} P \exp \left(-\sqrt{\frac{1-2\nu}{1-\nu^2}} \eta \right) \sin \left(-\frac{1}{\sqrt{1-\nu^2}} \eta + \alpha \right) \right], \quad (4.17)$$

$$S_r(1, \eta) = 1 \text{ — warunek brzegowy}, \quad (4.18)$$

$$S_{\varphi}(1, \eta) = \frac{1}{2} - \frac{\nu+1}{\sqrt{2(1-\nu)}} \exp \left(-\sqrt{\frac{1-2\nu}{1-\nu^2}} \eta \right) \sin \left(-\frac{1}{\sqrt{1-\nu^2}} \eta + \alpha \right), \quad (4.19)$$

gdzie:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{\sqrt{1-2\nu}}, \quad \operatorname{tg}\alpha_\nu = \frac{\sqrt{1-2\nu}}{\nu}. \quad (4.20)$$

W przypadku granicznym, gdy $\nu = 1/2$, tj. dla ośrodka sprężyste nieściśliwego, z wyrażeń (4.11), (4.12) i (4.20) otrzymuje się:

$$\omega x = -\frac{2}{\sqrt{3}}\eta, \quad h x = 0, \quad \alpha = \frac{\pi}{2}, \quad \alpha_\nu = 0, \quad (4.21)$$

Po uwzględnieniu tych wyników, wzory (4.4)-(4.10) można zredukować do postaci:

$$U(\xi, \eta) = \frac{3}{4}P \frac{1}{\xi^2} \left(1 - \cos \frac{2}{\sqrt{3}}\eta \right), \quad (4.22)$$

$$V(\xi, \eta) = \frac{\sqrt{3}}{2}P \frac{1}{\xi^2} \sin \frac{2}{\sqrt{3}}\eta, \quad (4.23)$$

$$\varepsilon_r(\xi, \eta) = -\frac{3}{2}P \frac{1}{\xi^3} \left(1 - \cos \frac{2}{\sqrt{3}}\eta \right), \quad (4.24)$$

$$\varepsilon_\varphi(\xi, \eta) = \frac{3}{4}P \frac{1}{\xi^3} \left(1 - \cos \frac{2}{\sqrt{3}}\eta \right), \quad (4.25)$$

$$R(\xi, \eta) = 1. \quad (4.26)$$

$$S_r(\xi, \eta) = -\frac{1}{\xi^3} \left[1 + (\xi^2 - 1) \cos \frac{2}{\sqrt{3}}\eta \right], \quad (4.27)$$

$$S_\varphi(\xi, \eta) = \frac{1}{2\xi^3} \left[1 - (2\xi^2 + 1) \cos \frac{2}{\sqrt{3}}\eta \right]. \quad (4.28)$$

Analogiczne wzory uzyskano w pracy [10] dla nieściśliwej osłony kulistej, a mianowicie:

$$U(\xi, \eta) = \frac{3}{4}P \frac{\beta^3}{\beta^3 - 1} \frac{1}{\xi^2} \left(1 - \cos \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{1 + \frac{\beta + 1}{\beta^2}} \eta \right), \quad (4.29)$$

$$V(\xi, \eta) = \frac{\sqrt{3}}{2} P \frac{\beta^3}{\beta^3 - 1} \sqrt{1 + \frac{\beta + 1}{\beta^2}} \frac{1}{\xi^2} \sin \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{1 + \frac{\beta + 1}{\beta^2}} \eta, \quad (4.30)$$

$$\varepsilon_r(\xi, \eta) = -\frac{3}{2} P \frac{\beta^3}{\beta^3 - 1} \frac{1}{\xi^3} \left(1 - \cos \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{1 + \frac{\beta + 1}{\beta^2}} \eta \right), \quad (4.31)$$

$$\varepsilon_\varphi(\xi, \eta) = \frac{3}{4} P \frac{\beta^3}{\beta^3 - 1} \frac{1}{\xi^3} \left(1 - \cos \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{1 + \frac{\beta + 1}{\beta^2}} \eta \right), \quad (4.32)$$

$$R(\xi, \eta) = 1. \quad (4.33)$$

$$S_r(\xi, \eta) = -\frac{1}{\xi^3 - 1} \left\{ \left(\frac{\beta}{\xi} \right)^3 - 1 - \left[\left(\frac{\beta}{\xi} \right)^3 - (\beta^2 + \beta + 1) \left(\frac{\beta}{\xi} - 1 \right) - 1 \right] \cos \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{1 + \frac{\beta + 1}{\beta^2}} \eta \right\}, \quad (4.34)$$

$$S_\varphi(\xi, \eta) = \frac{1}{2(\beta^3 - 1)} \left\{ 2 + \left(\frac{\beta}{\xi} \right)^3 - \left[\left(\frac{\beta}{\xi} \right)^3 + 2(\beta^2 + \beta + 1) \left(\frac{\beta}{\xi} - 1 \right) + 2 \right] \cos \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{1 + \frac{\beta + 1}{\beta^2}} \eta \right\}, \quad (4.35)$$

gdzie $\beta = a/b$; a i b w pracy [10] oznaczają odpowiednio wewnętrzny i zewnętrzny promień osłony.

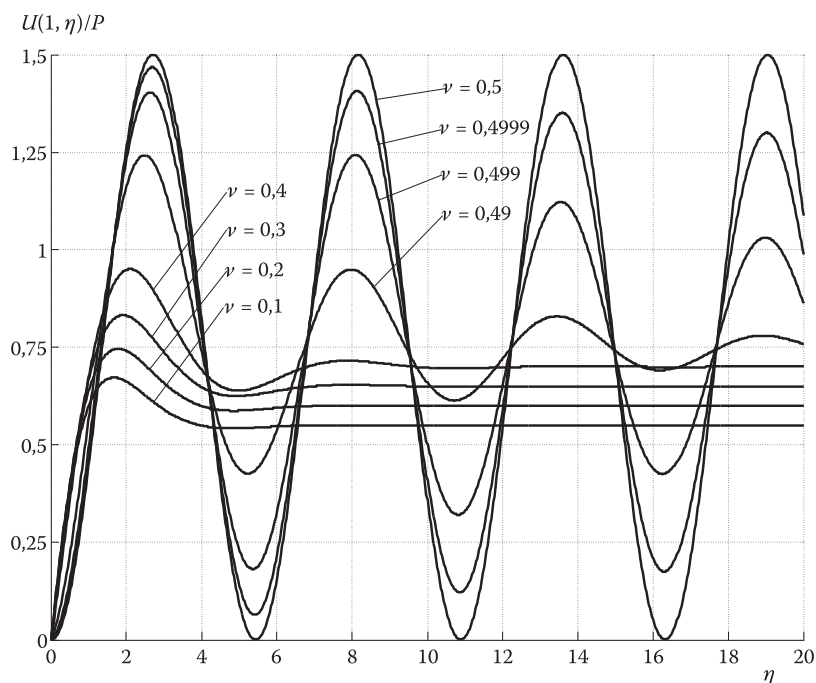
Z analizy wzorów (4.22)-(4.28) i (4.29)-(4.35) wynika, że dla $(\beta \geq 5)$ otrzymuje się z nich porównywalne wyniki. Różnice między nimi są mniejsze od 1%.

5. Wstępna analiza problemu

Na podstawie wstępnej analizy wyprowadzonych wzorów można stwierdzić, że dynamiczny stan mechanicznych parametrów w osrodku liniowo-sprężystym,

spowodowany ciśnieniem nagle wytworzonym wewnątrz kulistej kawerny, maleje intensywnie w przestrzeni wraz z oddalaniem się od centrum układu. Natomiast w poszczególnych sferycznych przekrojach ośrodka parametry zmieniają się w funkcji czasu w sposób pulsacyjny wokół ich statycznych wartości. Pulsacje te dla ośrodka ściśliwego zanikają z upływem czasu. Zjawisko to spowodowane jest transportem mechanicznej energii przez propagującą się falę naprężenia do wzrastających w czasie obszarów ośrodka.

Przykładową zmianę względnego przemieszczenia (U/P) powierzchni kawerny ($\xi = 1$) w funkcji $\eta = a_0 t/r_0$ dla kilku wartości liczby Poissona (ν) przedstawiono na rysunku 2. Jak się okazuje, parametr ν , odpowiedzialny za ściśliwość ośrodka, ma istotny wpływ na przebieg zmian funkcji $U(1, \eta)/P$.

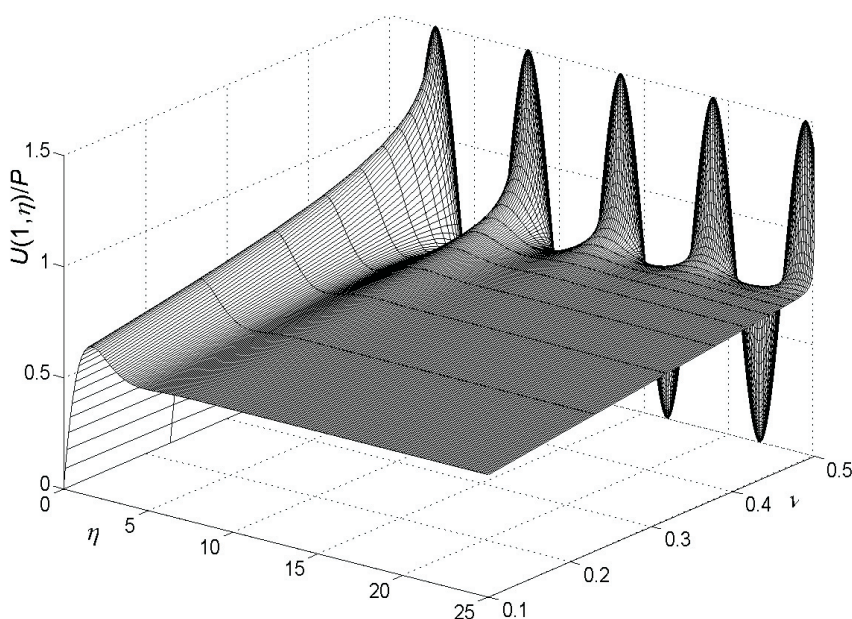


Rys. 2. Zmiana względnego przemieszczenia (U/P) powierzchni kawerny ($\xi = 1$) w funkcji η dla kilku wartości ν

Można wyróżnić dwa przedziały wartości liczbowych parametru ν , w których drganie powierzchni kawerny jest tłumione w odmienny sposób. I tak, zmniejszanie wartości parametru ν w przedziale $\nu \leq 0,4$ (wzrost ściśliwości ośrodków) powoduje intensywne zanikanie oscylacji powierzchni kawerny. Dla tych wartości ν przemieszczenie powierzchni kawerny zmierza do jej statycznego położenia (U_s/P) = $(1+\nu)/2$ już podczas pierwszego cyklu drgania (rys. 2). Natomiast w prze-

dziale $0,4 < \nu < 0,5$, czyli w ośrodkach quasi-ściśliwych tłumienie drgań jest słabe. W granicznym przypadku dla $\nu = 0,5$, tj. w ośrodku nieściśliwym, tłumienie drgań całkowicie zanika i powierzchnia kawerny pulsuje harmonicznie wokół położenia statycznego ze stałą amplitudą $(U/P) = 0,75$ (rys. 2).

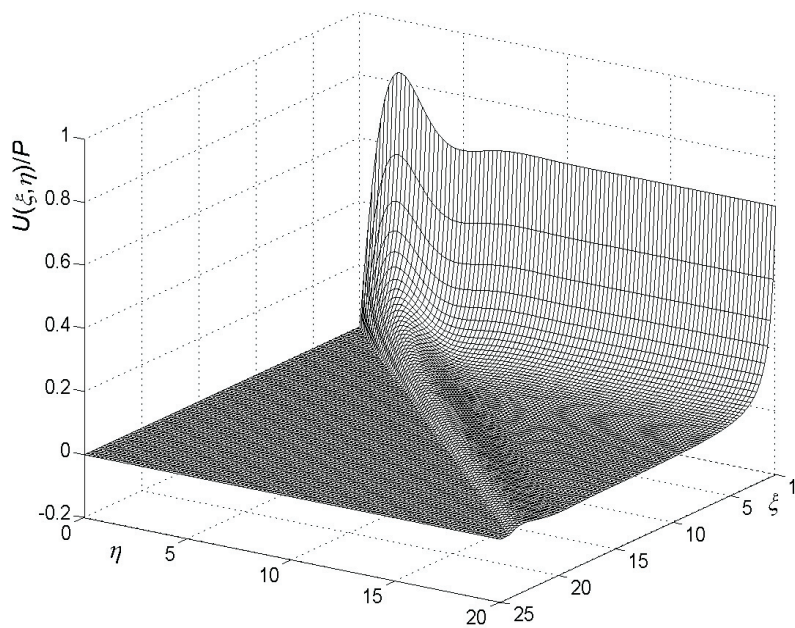
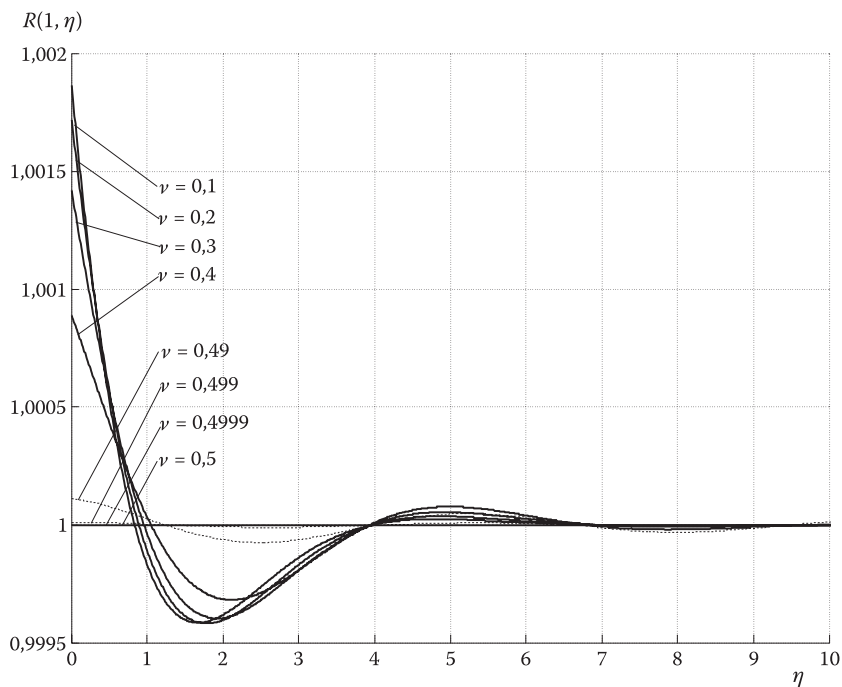
Zwróćmy jeszcze uwagę na anormalne zachowanie się ośrodka w przedziale $0,4 < \nu < 0,5$. W tym przypadku nieznaczące przyrosty $\Delta \nu$ powodują istotne zmiany amplitudy drgań powierzchni kawerny (rys. 3). Na przykład dla $\Delta \nu = 0,5 - 0,4 = 0,1$ maksymalny przyrost względnego przemieszczenia $(\Delta U/P) = 1,5 - 0,7 = 0,8$.



Rys. 3. Wpływ parametru ν na kształt funkcji $U(\xi, \eta)/P$

Przedstawiona wyżej analiza dotyczyła ruchu powierzchni kulistej kawerny ($\xi = 1$). W analogiczny sposób, z odpowiednio zmniejszonymi wartościami wynikającymi z przestrzennej dyspersji fali naprężenia, przemieszczają się ruchem pulsacyjnym poszczególne przekroje sferyczne ośrodka dla $\xi > 1$ (rys. 4).

Na zakończenie wstępnej analizy problemu należy stwierdzić, że gęstość ośrodka w procesie propagacji ekspandującej fali naprężenia w obu przedziałach wartości parametru ν zmienia się nieznacznie (rys. 5). Maksymalne przyrosty ΔR nie przekraczają 0,2%.

Rys. 4. Przestrzenny kształt funkcji $U(\xi, \eta)/P$ dla $\nu = 0,3$ Rys. 5. Zmiana względnej gęstości ośrodka w funkcji η dla $(\xi, 1)$

Obszerną analizę wszystkich parametrów ekspandującej fali naprężenia zamieszczono w drugiej części pracy. Tam też dokonano ogólnego podsumowania problemu.

Artykuł wpłynął do redakcji 26.07.2007 r. Zweryfikowaną wersję po recenzji otrzymano w lipcu 2007 r.

LITERATURA

- [1] W. P. WALTERS, J. A. ZUKAS, *Fundamentals of shaped charges*, Wiley and Sons, New York, 1989.
- [2] R. H. COLE, *Underwater explosions*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1948.
- [3] S. KALISKI, CZ. RYMARZ, K. SOBCZYK, E. WŁODARCZYK, *Wawes*, Elsevier, Amsterdam, 1992.
- [4] R. W. GURNEY, *The initial velocities of fragments from bombs, shells and grenades*, BRL Report 405, September, 1943.
- [5] R. W. GURNEY, *Fragmentation of bombs, shells and grenades*, BRL Report 635, March, 1947.
- [6] G. I. TAYLOR, *Analysis of the explosion of a long cylindrical bomb detonated at one end*, In the Scientific Papers of Sir Geoffrey Ingram Taylor, vol. III, G. K. Batchelor (ed), University Press., Cambridge, 1961.
- [7] R. TRĘBIŃSKI, W. A. TRZCIŃSKI, E. WŁODARCZYK, *Theoretical analysis of the process of driving a cylindrical liner by the products of grazing detonation*, J. Tech. Phys., vol. 29, no. 3-4, 1988.
- [8] R. TRĘBIŃSKI, W. A. TRZCIŃSKI, E. WŁODARCZYK, *Theoretical analysis of the influence of an external envelope on the process of driving a cylindrical liner by the products of grazing detonation*, J. Tech. Phys., vol. 29, no. 3-4, 1988.
- [9] R. TRĘBIŃSKI, W. A. TRZCIŃSKI, E. WŁODARCZYK, *Theoretical analysis of the influence of the external medium on the launching process of a cylindrical liner by the products of grazing detonation*, J. Tech. Phys., vol. 30, no. 2, 1989.
- [10] E. WŁODARCZYK, M. ZIELENKIEWICZ, *The dynamics of a thick-walled spherical casing loaded with a time depending internal pressure*, J.T.A.M., (in the press).
- [11] B. O. LAMBOUR, J. E. HARLEY, Proc the 4-th Symposium on Detonation, Washington, 1965.
- [12] A. VIDART, P. BEATRIX, et al., *ibidem*.
- [13] H. KNOEPFEL, *Pulsed high magnetic fields*, North-Holland Publishing Company, Amsterdam-London, 1970.
- [14] R. TRĘBIŃSKI, W. A. TRZCIŃSKI, E. WŁODARCZYK, *Theoretical analysis of the influence of material compressibility of a cylindrical liner on the process of launching it by products of grazing detonation*, J. Tech. Phys., vol. 30, no. 3-4, 1989.
- [15] P. GIMENEZ, et al., *EOS of detonation products obtained from symmetrical deflection of liners investigated by laser interferometers techniques*, The 8-th International Symposium on Detonation, Albuquerque, 1985.
- [16] H. DERENTOWICZ, W. DYBEK, et al., *Generation strong shock waves into deuterium by the Voitenki's explosive generator*, [in Polish], Biul. WAT, vol. 33, no. 5, 1984.
- [17] W. NOWACKI, *Theory of elasticity*, [in Polish], PWN, Warszawa, 1970.

E. WŁODARCZYK, M. ZIELENKIEWICZ

Theoretical analysis of influence of elastic material compressibility on parameters of expanding spherical stress wave. I. Analytical solution of the problem

Abstract. We investigated an influence of elastic material compressibility on parameters of the expanding spherical stress wave. Material compressibility is represented by the Poisson's ratio ν . The stress wave is generated by a pressure created in a spherical cavity. The isotropic elastic material surrounds this cavity. The analytical closed-form formulae determining dynamical state of mechanical parameters (displacement, particle velocity, strains, stresses, and material density) of the material have been derived.

We obtained these formulae for the surge pressure $p(t) = p_0 = \text{const}$ into the cavity. It follows from analysis of these formulae that the Poisson's ratio ν substantially influences variation of the material parameters in space and time. All parameters intensively decrease in a space together with increase in the Lagrangian coordinate r . On the contrary, these parameters oscillate versus time around their static values. These oscillations decay with a lapse of time. We can mark out two ranges of the values ν in which vibrations of the parameters are damped in a different degree. Thus, decrease of a Poisson's ratio in the range $\nu \leq 0.4$ causes intense decaying oscillations of the parameters. On the other hand, in the range $0.4 < \nu < 0.5$, i.e., in quasi-compressibility materials, the vibrations damping of the parameters is very small. In the limiting case, when $\nu = 0.5$, i.e. incompressible material damping vanishes, and the parameters harmonically oscillate around their static values. Abnormal behaviour of material occurs in the range $0.4 < \nu \leq 0.5$. In this case, an insignificant increment of the Poisson's ratio causes considerable increase in the vibration amplitude of the parameters (see Fig. 2). The results of the vast theoretical analysis of all parameters of the expanding stress wave are presented in the second part of the paper.

Keywords: expansion spherical stress wave, isotropic elastic material, dynamic load

Universal Decimal Classification: 534.222.2