BIULETYN INSTYTUTU AUTOMATYKI I ROBOTYKI
NR 23, 2006

Wyznaczanie najtańszej acyklicznej części 3-optymalnej struktury opiniowania diagnostycznego

Artur ARCIUCH

Zakład Systemów Komputerowych, Instytut Teleinformatyki i Automatyki WAT,
ul. Kaliskiego 2, 00-908 Warszawa

STRESZCZENIE: W publikacji rozpatrzono problem wyznaczenia najtańszej acyklicznej części 3-optymalnej struktury opiniowania diagnostycznego. Acykliczna część struktury jest wyznaczana dla 3-optymalnej składowej silnej spójności, 3-diagnozowalnej ekonomicznej struktury pierwotnej. Jest ona takim acyklicznym podgrafem częściowym struktury pierwotnej o najtańszych łukach, że każdy jej węzeł ma trzy poprzedniki oraz jej źródła są jednocześnie węzłami 3-optymalnej składowej silnej spójności dla której jest wyznaczana.

SŁOWA KLUCZOWE: acykliczna część 3-optymalnej struktury opiniowania diagnostycznego, *m*-optymalna oraz *m*-diagnozowalna struktura opiniowania diagnostycznego, model PMC, model BGM

1. Wprowadzenie

Artykuł jest poświęcony problemowi wyznaczania najtańszej acyklicznej części 3-optymalnej struktury opiniowania diagnostycznego dla wybranej 3-optymalmej składowej silnej spójności 3-diagnozowalnej ([2] [6]), ekonomicznej struktury opiniowania diagnostycznego, typu PMC ([7]) albo BGM ([1]), zwanej strukturą pierwotną. Mówiąc ekonomiczna struktura opiniowania diagnostycznego, mamy na myśli strukturę opiniowania diagnostycznego, której łukom przypisano uogólnione koszty testowania. Uogólniony koszt struktury jest sumą uogólnionych kosztów poszczególnych testowań przypisanych łukom struktury.

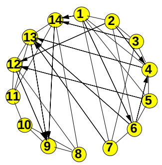
Strukturę opiniowania diagnostycznego (OD), dla której istnieje algorytm umożliwiający zlokalizowanie wszystkich niezdatnych elementów, pod warunkiem, że nie jest ich więcej niż *m*, nazywamy *m-diagnozowalną strukturą*

OD, a *m*-diagnozowalną strukturę OD o minimalnej liczbie łuków – *m-optymalną strukturą* OD .

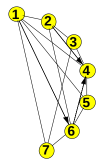
<u>*Określenie 1.*</u> Podgraf G' 3-optymalnej struktury G, uzyskany w wyniku usunięcia ze struktury G węzłów incydentnych tylko z łukami 3-optymalnej składowej silnej spójności struktury G, nazywamy *acykliczną częścią struktury*.

<u>*Określenie 2.*</u> Podgraf 3-diagnozowalnej, redukowalnej struktury pierwotnej, powstały przez usunięcie z niej węzłów incydentnych z łukami wybranej jej (z określonych względów) 3-diagnozowalnej składowej silnej spójności, nazywamy *dopełnieniem tej składowej silnej spójności do struktury pierwotnej*.

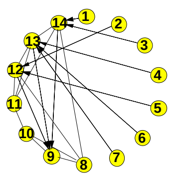
Dla przykładu, na rys. 1 pokazano strukturę pierwotną oraz podgrafy będące 3-diagnozowalną składową silnej spójności, dopełnieniem tej składowej spójności do struktury pierwotnej oraz macierz kosztów dopełnienia.



P



S



D

	8	9	10	11	12	13	14
1	0	0	0	0	0	0	**3**
2	0	0	0	0	**4**	0	0
3	0	0	0	0	0	0	**2**
4	0	0	0	0	0	**3**	0
5	0	0	0	0	**4**	0	0
6	0	0	0	0	0	**3**	0
7	0	0	0	0	0	**4**	0
8	0	**1**	**1**	0	**5**	0	**1**
9	**1**	0	**1**	0	0	0	0
10	**1**	**1**	0	**1**	0	0	0
11	0	0	**1**	0	**1**	**1**	**3**
12	**4**	**3**	0	**1**	0	**1**	0
13	**0**	**3**	0	**1**	**1**	0	**1**
14	**1**	**4**	0	**3**	0	**1**	0

$K(D)$

Rys. 1. P **- Struktura 3-diagnozowalna,** S **- 3-diagnozowalna składowa silnej spójności struktury** P**,** D **- dopełnienie struktury** S **do struktury** P**,** $K(D)$ **- macierz kosztów struktury** D

Głównym celem artykułu jest zaproponowanie metod wyznaczania najtańszej acyklicznej części wybranej 3-optymalnej struktury względem dopełnienia 3-optymalnej składowej silnej spójności tej struktury do struktury pierwotnej. Zadanie wynikające z celu publikacji polega na takim zrezygnowaniu z niektórych testowań (łuków) dopełnienia, aby wyznaczona struktura była najtańszą acykliczną częścią 3-optymalnej struktury OD.

2. Własności acyklicznej części struktury

Acykliczna część 3-optymalnej struktury OD typu PMC istnieje w strukturze, rzędu co najmniej ósmego, a dla typu BGM istnieje w strukturze rzędu co najmniej szóstego, która ma co najmniej jeden węzeł o stopniu wyjściowym równym zero. Acykliczna część struktury jest takim acyklicznym (w sensie dróg) grafem częściowym, powstałym przez usunięcie ze struktury pierwotnej wskazanej (z określonych względów) 3-diagnozowalnej składowej silnej spójności, którego wszystkie węzły mają stopień wejściowy równy 3.

<u>*Własność 1.*</u> Acykliczna część struktury 3-optymalnej zawiera co najmniej jeden węzeł, który posiada trzy poprzedniki w składowej silnej spójności struktury oraz co najmniej jeden węzeł nie posiadający następników.

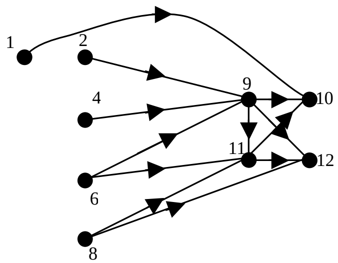
Dla przykładu na rys. 2 przedstawiono acykliczną część struktury.

Oznaczmy $\varphi(E'(G)) = (\varphi_0, ..., \varphi_d) : \| \{e \in E'(G)\} : \mu^+(e) = p \| = \varphi_p, 0 \le p \le d$.

$\varphi(E'(G))$ nazywamy wektorem charakterystycznym acyklicznej części struktury. Wektor charakterystyczny acyklicznej części struktury jest kanonicznym reprezentantem klasy podobieństwa acyklicznych części struktury określonego rzędu. Oczywiście $\sum_{p=0}^{d} \varphi_p = \| E'(G) \|$. Dla przykładu dla acyklicznej części struktury z rys. 2 $\varphi(E'(G)) = (2,3,3,1,0)$. Można zauważyć, że po usunięciu z tej struktury łuku $\langle e_9, e_{12} \rangle$ i dodaniu do niej łuku $\langle e_{10}, e_{12} \rangle$ wektor dla powstałej w ten sposób acyklicznej części będzie następujący $\varphi(E'(G^*)) = (1,4,4,0,0)$ oraz maksymalny stopień wyjściowy acyklicznej części struktury będzie wynosił dwa.

<u>*Własność 2.*</u> Podgraf $\langle E(G) \setminus \{e\} \rangle_G : \mu^+(e) = 0, e \in E$ powstały w wyniku usunięcia z 3-optymalnej struktury rzędu k węzła bez następników jest 3-optymalną strukturą rzędu $k-1$.

Spójny podgraf częściowy acyklicznej części struktury jest takim acyklicznym grafem, w sensie dróg, w którym węzły początkowe acyklicznej części (źródła) są zagnieżdżone w składowej silnej spójności struktury. Spójną acykliczną część struktury optymalnej można przedstawić w układzie warstwowym, co może być zastosowane (przy wykorzystaniu wektora charakterystycznego acyklicznej części struktury) w procesie wyznaczania acyklicznej części struktury o wymaganych własnościach.

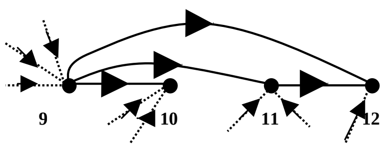


Rys. 2. Acykliczna część struktury

Acykliczna część struktury jest również przepływem (przepływami) o co najmniej trzech węzłach nie mających poprzedników zwanych źródłami i co najmniej jednym węźle nie mających następników zwanych ściekiem. Dla przykładu acykliczna część struktury z 0 ma pięć źródeł i dwa ścieki.

Określenie 3. Podgraf acyklicznej części struktury 3-optymalnej, zawierający węzły o tej samej minimalnej odległości (w sensie dróg) od węzłów będących źródłami nazywamy *warstwą acyklicznej części struktury*.

Dla przykładu, na rys. 3 pokazano warstwę (określenie 3) acyklicznej części struktury z rys. 2 złożoną z węzłów o odległości jeden. Przerywanymi liniami zaznaczono łuki od węzłów będących poprzednikami węzłów tej warstwy.



Rys. 3. Warstwa acyklicznej części struktury z 0

3. Projektowanie najtańszej acyklicznej części struktury

3.1. Wprowadzenie

Acykliczną częścią struktury (określenie 1) nazywamy podgraf 3-optymalnej struktury G, uzyskany w wyniku usunięcia ze struktury G węzłów incydentnych tylko z łukami 3-optymalnej składowej silnej spójności struktury G. Acykliczna część 3-optymalnej struktury istnieje, o ile spełniona jest własność 1. Można zauważyć, że nie jest wymagane, aby acykliczna część była podgrafem spójnym. W pewnych przypadkach, gdy projektowana struktura składa się z części zarządzającej (modelowanej jako składowa silnej spójności) oraz z autonomicznych części wykonawczych (fragmenty acyklicznej części zagnieżdżone w węzłach składowej silnej spójności), niespójna acykliczna część może okazać się korzystniejsza, niż struktura zawierająca spójną acykliczną część. Innym kryterium doboru najkorzystniejszej acyklicznej części może być liczba warstw (określenie 3). Struktura zawierająca mniej warstw zapewnia szybszą komunikację węzłów acyklicznej części z węzłami składowej silnej spójności. Istotnym kryterium może okazać się dopuszczalna liczba następników węzła acyklicznej części oraz liczba węzłów posiadająca określoną liczbę następników. W tym przypadku należy rozpatrzyć wartość wektora charakterystycznego acyklicznej części. Czasami istotnym kryterium wyboru acyklicznej części może być liczba węzłów składowej silnej spójności, w których jest zagnieżdżona acykliczna część oraz liczba węzłów acyklicznej części nie posiadających następników. W acyklicznej części struktury należy pozostawić najtańsze pod względem kosztu łuki, ale takie, które zapewnią spełnienie dodatkowych, wymienionych wyżej kryteriów. Z własności 2 wynika, że acykliczną część można projektować w sposób sekwencyjny.

Rozpatrzmy ekonomiczną 3-diagnozowalną redukowalną strukturę opiniowania diagnostycznego $G=\langle E,U\rangle$ o jednej 3-diagnozowalnej składowej silnej spójności G' rzędu $k'\geq 7$. W wyniku realizacji jednej z metod wyznaczania najtańszej składowej silnej spójności dla struktury G otrzymamy quasi-najtańszą, 3-optymalną strukturę $\langle G''\rangle_G$ będącą grafem częściowym struktury G'. W wyniku usunięcia ze struktury G gałęzi grafu G'' oraz gałęzi nie należących do grafu G'', których węzły następniki i węzły poprzedniki należą do grafu G'', otrzymamy graf będący dopełnieniem $D(G'')$ struktury G'' do struktury G (określenie 2) (krótko: dopełnienie $D(G'')$).

W celu wyznaczenia najtańszej acyklicznej części struktury A, dla danej 3-optymalnej składowej silnej spójności G'' struktury pierwotnej G, w dopełnieniu $D(G'')$ należy pozostawić takie najtańsze łuki, dla których, uzyskana w ten sposób struktura A nie mająca cykli, będzie spełniała własność 1 oraz stopień wejściowy każdego jej węzła będzie równy trzy.

Poniżej podano określenia oraz własności, które będą wykorzystywane w metodzie wyznaczania najtańszej acyklicznej części struktury dla danej 3-optymalnej składowej silnej spójności o znanej strukturze pierwotnej.

<u>*Określenie 4.*</u> Łukiem cyklicznym dopełnienia D nazywamy łuk, który należy przynajmniej do jednej drogi cyklicznej prostej (cyklu skierowanego) dopełnienia D.

<u>*Własność 3.*</u> Jeżeli łuk $\langle e', e'' \rangle$ grafu $G = \langle E, U \rangle$ jest łukiem cyklicznym, to w grafie G istnieje składowa silnej spójności, która zawiera drogę cykliczną prostą przebiegającą przez węzły e', e''.

<u>*Określenie 5.*</u> Łukiem redukowalnym dopełnienia D nazywamy, taki łuk $\langle e', e'' \rangle \in U(D), e', e'' \in E(D) : \mu^-(e'') > 3$.

<u>*Określenie 6.*</u> Odległością $d(e)$ węzła e dopełnienia $D(S)$ od węzła $e^S \in S \cap D(S)$ składowej silnej spójności struktury S, który jest takim węzłem dopełnienia $e^S \in D(S) : \mu^-(e^S) = 0$, nazywamy długość minimalnej drogi prostej łączącej węzeł e^S z węzłem e.

<u>*Określenie 7.*</u> Zbiór $W = \{W_0, ..., W_i, ..., W_N\}$ podzbiorów złożonych z węzłów dopełnienia $E(D(S))$, takich, że spełniona jest zależność: $e \in W_i \Rightarrow d(e) = i$, nazywamy podziałem węzłów dopełnienia $e \in E(D(S))$ ze względu odległość $d(e)$ (określenie 6).

Korzyści z wykorzystania odległości $d(e)$ i podziału W węzłów dopełnienia ze względu na odległość są takie, że łuki skierowane od węzłów zbioru W_i do węzłów zbiorów $W_j : i > j$ mogą być łukami cyklicznymi łukami redukowalnymi oraz rozpatrywanie kolejnych podziałów wraz ze wzrostem odległości pomaga w uporządkowany sposób wyznaczać acykliczną część struktury oraz każdy podzbiór W_i jest warstwą.

<u>*Własność 4.*</u> Jeżeli dopełnienia $D(S)$ 3-optymalnej składowej silnej spójności S zawiera acykliczną część struktury, to w podzbiorze W_1 podziału W

($W_1 \subset W$) istnieje węzeł, który ma co najmniej trzy poprzedniki w składowej silnej spójności: $\exists e \in W_1 : \| \Gamma^{-1}(e) \subset W_0 \| \geq 3$.

3.2. Metoda gradientowa

Metoda polega na usunięciu najdroższych łuków, z których w pierwszej kolejności będą usuwane najdroższe łuki cykliczne.

Niech $K(P)$, $D(S)$, A oraz β oznaczają, macierz kosztów struktury P, dopełnienie struktury S do struktury P (3-optymalnej silnie spójnej strukturę, będącą podgrafem częściowym struktury P), acykliczną część struktury wyznaczana dla $D(S)$ oraz wartość stopnia wyjściowego projektowanej acyklicznej części struktury.

Jeżeli w dopełnieniu $D(S)$ istnieje węzeł mający co najmniej trzy poprzedniki w składowej silnej spójności, to może istnieć acykliczna części struktury dla danej składowej silnej spójności S oraz dopełnienia $D(S)$.

Wyznaczmy zbiór łuków cyklicznych dopełnienia $C(D(S))$. Zauważmy, że jeżeli łuk jest łukiem cyklicznym struktury, to w strukturze istnieje składowa silnej spójności, której graf częściowy zawiera ten łuk.

Ze zbioru łuków cyklicznych struktury $C(D(S))$ należy usuwać takie najdroższe łuki $\langle e', e'' \rangle$, dla których $\mu^{-1}(e'') > 3$. Po każdym usunięciu łuku należy zmodyfikować zbiór $C(D(S))$.

Jeżeli usunięto wszystkie łuki cykliczne, to należy z dopełnienia usunąć wszystkie łuki najdroższe, ale tak, aby każdy węzeł miał dokładnie trzy poprzedniki. Jeżeli nie można zredukować łuków, tak, aby wszystkie węzły dopełnienia miały trzy poprzedniki, to nie w dopełnieniu $D(S)$ nie istnieje graf częściowy, będący acykliczną częścią struktury.

Jeżeli w uzyskanej strukturze A nie ma łuków cyklicznych $C(D(S)) = \varnothing$, każdy jej węzeł ma trzy poprzedniki $p(A) \leq \beta$ i $p(E(A) \bigcup E(S)) \leq \beta$ oraz istnieje co najmniej jeden węzeł nie mający następników, to uzyskany graf jest najtańszą acykliczną częścią A struktury, uzyskaną dla składowej silnej spójności S względem ekonomicznej struktury pierwotnej P.

3.3. Metoda bazująca na warstwach

Zaproponowana metoda polega na wykorzystaniu własności grafów acyklicznych, z której wynika, że każdy acykliczny graf można przedstawić w układzie warstwowym. Układ warstwowy grafu acyklicznego charakteryzuje się tym, że łuki skierowane są od węzłów warstwy o danej odległości do węzłów tej samej warstwy lub do warstwy o odległości o jeden większej.

Taka własność powoduje, że jeżeli w strukturze występuję łuk $\langle e', e'' \rangle$, taki że $d(e') > d(e'')$, to jest on łukiem cyklicznym.

Niech $K(P)$, $D(S)$, A, β oznaczają odpowiednio: macierz kosztów struktury P, dopełnienie 3-optymalnej składowej silnej spójności S, do struktury P, zbiór acyklicznych części struktury P zagnieżdżonych w węzłach S, wartość stopnia wyjściowego projektowanej acyklicznej części struktury.

W strukturze $D(S)$) należy wyznaczyć podział $W = \{W_0, ..., W_i, ..., W_N\}$ węzłów $e \in E(D(S))$ dopełnienia na zbiory węzłów o jednakowej odległości $d(e)$.

Jeżeli w warstwie W_1 dopełnienia $D(S)$ istnieje co najmniej jeden węzeł mający trzy poprzedniki w warstwie W_0, to w dopełnieniu tym może istnieć acykliczna część struktury dla struktury S.

W takim przypadku dla każdego węzła mającego co najmniej trzy poprzedniki w warstwie W_0, należy usunąć wszystkie łuki skierowane warstwy $W_i \, (i > 1)$ do węzłów warstwy W_1 oraz pozostawić maksymalnie po trzy najtańsze łuki skierowane z podziału W_0 do odpowiednich węzłów podziału W_1.

Jeżeli w warstwie W_1 istnieją węzły $e \in W_1$, takie że $((\|\Gamma^{-1}(e) \subset W_0\| < 3) \wedge (\|\Gamma^{-1}(e) \subset W_0\| + \|\Gamma^{-1}(e) \subset W_1\| \geq 3))$, to należy dla każdego węzła e pozostawić takie trzy najtańsze łuki skierowane do węzła e, że co najmniej jeden łuk ma poprzednik w warstwie W_0.

Następnie należy uaktualnić zbiór W.

Do węzłów podziałów $W_i, i > 1$ stosować następujące reguły.

Wyznaczyć podzbiór

$V_i \subseteq W_i : V_i = \{e : \|\Gamma^{-1}(e) \subset W_{i-1}\| > 1 \wedge \|\Gamma^{-1}(e) \subset W_{i-1}\| + \|\Gamma^{-1}(e) \subset W_i\| \geq 3$.

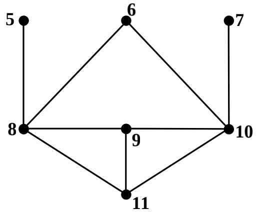
Jeżeli $\|V_i\| < \|W_i\|$, to oznacza, że istnieje węzeł mający co najwyżej dwa poprzedniki i w dopełnieniu $D(S)$ nie istnieje graf częściowy, będący acykliczną częścią struktury.

W przypadku gdy $\|V_i\| = \|W_i\|$ dla każdego węzła $e \, (e \in V_i)$ należy pozostawić takie trzy najtańsze łuki skierowane do węzła e, że co najmniej jeden łuk ma poprzednik w podziale W_{i-1}. Jeżeli w podzbiorze V_i istnieją cykle elementarne, to należy usunąć (dla każdego takiego cyklu) po jednym (najdroższym łuku – albo dowolnym jeżeli koszty łuków cyklu elementarnego są jednakowe).

W podzbiorach V_i należy usuwać łuki najdroższe, ale tak, aby każdy węzeł miał dokładnie trzy poprzedniki. Jeżeli nie można zredukować łuków, tak, aby wszystkie węzły dopełnienia miały trzy poprzedniki, to w dopełnieniu $D(S)$ nie istnieje graf częściowy, będący acykliczną częścią struktury.

Jeżeli w uzyskanej strukturze A nie ma łuków cyklicznych $C(D(S)) = \varnothing$, a każdy jej węzeł ma trzy poprzedniki $p(A) \leq \beta$ i $p(E(A) \cup E(S)) \leq \beta$, oraz istnieje co najmniej jeden węzeł nie mający następników, to uzyskany graf jest najtańszą acykliczną częścią A struktury, uzyskaną dla składowej silnej spójności S względem ekonomicznej struktury pierwotnej P.

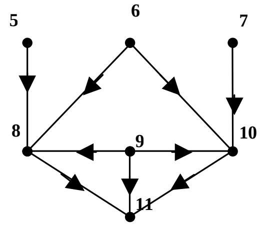
Na rys. 4 pokazano wynik zastosowania zaproponowanych metod dla dopełnienia $D(S)$ o macierzy kosztów $K(D(S))$.



$D(S)$

	5	6	7	8	9	10	11
5	0	0	0	3	0	0	0
6	0	0	0	1	0	3	0
7	0	0	0	0	0	4	0
8	1	1	0	0	1	0	3
9	0	0	0	3	0	1	2
10	0	4	5	0	3	0	1
11	0	0	0	4	5	4	0

$K(D(S))$



A

Rys. 4. Struktura A jest wynikiem zastosowania metod dla dopełnienia $D(S)$ o macierzy kosztów $K(D(S))$

4. Podsumowanie

Wyznaczanie struktur według zaproponowanych metod sprowadza się do rozwiązania częściowo określonych kwadratów łacińskich. Jeżeli przy wyznaczaniu struktur wykorzysta się ich macierzową postać, to bardzo łatwo określić kwadraty łacińskie, które są macierzami przejść z nałożonymi ograniczeniami wynikającymi z własności struktur, w których zawartościom komórek różnym od symbolu „0” wpisano koszt łuku. Ponadto fakt, że w metodach uzyskane rozwiązanie jest rozwiązaniem przybliżonym (quasi-najtańszym), powoduje, że metody te stosunkowo łatwo można poddać algorytmizacji i implementacji w postaci narzędzi komputerowych służących do projektowania i badania własności struktur.

Wśród zaproponowanych metod na szczególną uwagę zasługuje metoda bazująca na warstwach (określenie 3), w której w oryginalny sposób rozwiązano problem wyznaczania i usuwania łuków cyklicznych.

Literatura

[1] Barsi F., Grandoni F., Maestrini P.: *A Theory of Diagnosability of Digital Systems*, IEEE Transactions on Computers 6, 1976.

[2] Hakimi S. L., Amin A.T.: *Characterization of Connection Assignment of Dianosable Systems*, IEEE Trans. On Comput. 1, 1974.

[3] Krawczyk H.: *Analiza i synteza samodiagnozowalnych systemów komputerowych*, Zeszyty Naukowe Politechniki Gdańskiej, Elektronika nr 64, Gdańsk, 1987.

[4] Kulesza R.: *Niektóre własności acyklicznej części 3-optymalnej struktury opiniowania diagnostycznego*, Biuletyn IAiR, Nr 23, WAT, Warszawa, 2006.

[5] Kulesza R.: *Struktury samodiagnozowalne w systemach cyfrowych*, Materiały Krajowej Konferencji DIAG’2003.

[6] Kulesza R.: *Podstawy diagnostyki sieci logicznych i komputerowych*, Instytut Automatyki i Robotyki WAT, Warszawa, 2000.

[7] Preparata F.P., Metze G., Chien R. T.: *On the Connection Assignment Problem of Diagnosable Systems*, IEEE Trans. Comput. 6, 1967.

Design of the cheapest acyclic part of 3-optimal system

ABSTARCT: In this paper I focus on the problem of design of the cheapest acyclic part of 3-optimal system (3-dignosable system with minimal number of arcs). 3-optimal system is consists of a strongly connected 3-optimal system and an acyclic part of 3-optimal system. An acyclic part of 3-optimal system is a acyclic directed digraf which is nested in nodes of strongly connected 3-optimal vertex-induced subgraph of 3-optimal system.

KEYWORDS: acyclic part of 3-dignosable system, t-diagnosable system, PMC model, BGM model

Recenzent: prof. dr hab. inż. Roman Kulesza

Praca wpłynęła do redakcji: 25.10.2006