

# Niektóre własności acyklicznej części 3-optymalnej struktury opiniowania diagnostycznego

**Roman KULESZA**

Zakład Automatyki, Instytut Teleinformatyki i Automatyki WAT,  
ul. Kaliskiego 2, 00-908 Warszawa

**STRESZCZENIE:** W artykule przedstawiono niektóre własności acyklicznej części 3-optymalnej struktury opiniowania diagnostycznego typu PMC (Preparata F.P.; Metzke G.; Chien R.T.-[7]) lub BGM (Barsi F.; Grandoni F.; Maestrini P.-[1]). Własności te umożliwiły opracowanie metody wyznaczenia szeregu przeliczającego takie struktury do rzędu ósmego.

**SŁOWA KLUCZOWE:** struktura opiniowania diagnostycznego; przeliczanie; izomorfizm

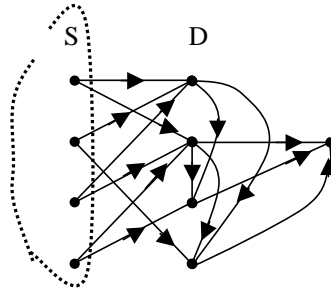
## 1. Wprowadzenie

W pracach [4]-[6] pokazano, że każda składowa spójności acyklicznej części 3-optymalnej struktury opiniowania diagnostycznego (OD) jest takim acyklicznym (w sensie dróg) digrafem (unigrafem zorientowanym) bez pętli  $D(\|E\| \geq 4, E$ -zbiór węzłów digrafu  $D$ ), że

$$[\forall e \in E : \Gamma^{-1}(e) \neq \emptyset] : \mu^{-}(e) = 3,$$

gdzie  $\mu^{-}(e)$  oznacza stopień wejściowy węzła  $e$  (np.- liczbę komputerów sieci komputerowej, które testują komputer  $e$ ).

Węzły zbioru  $E^{-}$  (gdzie:  $E^{-} = \{e \in E : \Gamma^{-1}(e) = \emptyset\}$ ) nazywamy *źródłami*, a węzły zbioru  $E^{+}$  (gdzie:  $E^{+} = \{e \in E : \Gamma(e) = \emptyset\}$ ) -*ściekami* (struktury  $D$ ), przy czym, jeżeli 3-optymalna struktura OD, ma część acykliczną, to jej źródła zagnieźdzone są w składowej silnej spójności  $S$  tej struktury oraz  $E^{+} \neq \emptyset$  (rys.1).



Rys. 1. Przykład acyklicznej części 3- optymalnej struktury OD (digraf  $D$ ) rzędu dziewiątego o czterech źródłach i jednym ściegu

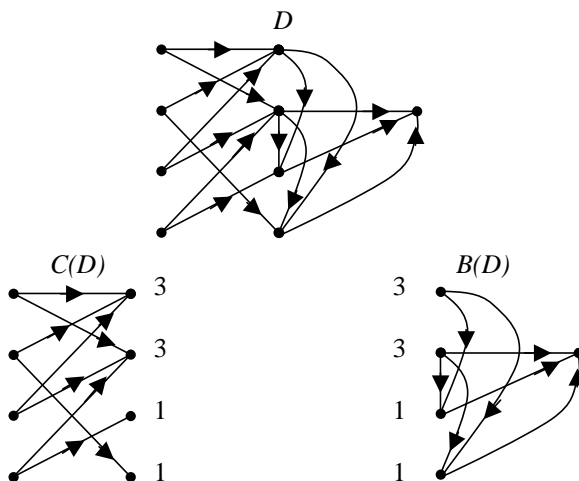
Zauważmy, że jeżeli  $E^+ \neq \emptyset$ , to  $\exists e \in E \setminus E^- : \|\Gamma^{-1}(e)\} \cap E^-\| = 3$ , bowiem w przeciwnym razie, digraf  $D$  nie byłby digrafem acyklicznym.

Dalej będziemy rozpatrywać takie digrafy  $D$ , których podgraf  $\langle \Gamma(E^-) \rangle_D$  jest grafem spójnym. Wykażemy, że szereg przeliczający struktury  $D$  ma postać

$$D(x) = x^4 + x^5 + 9x^6 + 80x^7 + 1422x^8 + \dots \quad (1)$$

Zaproponowana w artykule metoda wyznaczenia zależności (1) polega na indukowaniu (generowaniu) zbiorów niepodobnych struktur  $D$  (określonego rzędu), przez sklejanie węzłów o jednakowych wagach  $v(e)$  (gdzie:  $v(e) = \mu^-(e)$ ,  $e \in \Gamma(E^-)$ ), digrafów opisanych  $C(D)$  i  $B(D)$ , które są (odpowiednio) podgrafami  $\langle E^- \cup \Gamma(E^-) \rangle_D$  i  $\langle E \setminus E^- \rangle_D$  o ważonych węzłach, przy czym multizbiór  $\{v(e) : e \in \Gamma(E^-)\}$  będzie pełnić rolę kanonicznego reprezentanta klasy podobieństwa struktur  $D$  (rys.2).

Kanoniczny reprezentant klasy podobieństwa struktur  $D$  będziemy (również) przedstawiać w postaci wektora  $v$  (gdzie:  $v = (v_1, \dots, v_r)$ ,  $v_1 \geq \dots \geq v_r$ ,  $r = \|\Gamma(E^-(D))\|$ ).



Rys. 2. Rozłożenie struktury  $D$  na digrafy  $C(D)$  i  $B(D)$  o ważonych węzłach

Niech  $C(\alpha, v)$  oznacza zbiór grafów prostych (dwupodzielnych digrafów bez pętli) o  $\alpha$  (gdzie:  $3 \leq \alpha \leq v_1 + \dots + v_r$ ) źródłach i takich  $r$  ścieżkach, oznaczonych wagami ze zbioru  $\{v_1, \dots, v_r\}$ , że  $v = (v_1, \dots, v_r)$ , a  $B(k, v)$  ( $k \geq r$ ) - zbiór takich, spójnych digrafów acyklicznych rzędu  $k$ , również o  $r$  węzłach oznaczonych wagami ze zbioru  $\{v_1, \dots, v_r\}$ , że podgraf zawierający węzły ważne jest grafem spójnym oraz stopień wejściowy węzła o wadze  $v'$  (gdzie:  $v' \in \{v_1, \dots, v_r\}$ ) równa się  $3 - v'$ , a węzłów bez wag - trzy.

Różne sposoby scalenia grafu  $G'$  (gdzie:  $G' \in C(\alpha, v)$ ) z grafem  $G''$  (gdzie:  $G'' \in B(k, v)$ ), przez sklejenie ich węzłów ważonych (o jednakowych wagach), indukuje (generuje) zbiór struktur  $D$ , rzędu  $\alpha + k$ , który może zawierać struktury izomorficzne.

Metoda wyznaczenia szeregu przeliczającego nieetykietowanej struktury  $D$ , zaproponowana w artykule, polega na oddzielnym przeliczaniu (dla ustalonej wartości  $v$ ) struktur  $G'$  (gdzie:  $G' \in C(\alpha, v)$ ) i  $G''$  (gdzie:  $G'' \in B(k, v)$ ) oraz wyznaczaniu ich grup węzłowych (zbiorów przekształceń automorficznych), a następnie na indukowaniu struktur  $D$  przez sklejenie węzłów ważonych tych struktur oraz redukowaniu (w zbiorze tak

wyindukowanych struktur) struktur izomorficznych, w oparciu o poznane automorfizmy struktur  $G'$  i  $G''$ .

Jeżeli  $k > \|v\|$ , to struktury zbioru  $B(k, v)$ , uzyskuje się jako nadgrafy struktur zbioru  $B(\|v\|, v)$ , utworzone przez dodanie  $k - \|v\|$  węzłów. Ponieważ  $B(k, (3)) = \emptyset$  ( $k > 1$ ) oraz  $B(k, (3, 2)) = \emptyset$  ( $k > 2$ ), to operacja taka nie jest zbyt złożona, gdyż (przy wyznaczaniu szeregu przeliczającego struktury  $D$ , do rzędu ósmego) wymaga dodania, co najwyżej, dwóch węzłów.

W części drugiej artykułu przedstawię metodę wyznaczenia szeregu przeliczającego (zależność 1), polegającą na sklejaniu węzłów o jednakowych wagach struktur klasy  $C(\alpha, v)$  i klasy  $B(k, v)$ , a w częściach trzeciej oraz czwartej, odpowiednio-metody wyznaczania niezbędnych własności tych struktur.

## 2. Metoda wyznaczenia szeregu przeliczającego

Zauważmy, że aby wyznaczyć szereg przeliczający struktury  $D$  do rzędu ósmego, wystarczy posłużyć się ich kanonicznymi reprezentantami klas podobieństwa (wektorami  $v$ ), do wymiaru piątego.

Oznaczmy:

$$\Phi^r = \{v = (3, \dots, v_r) : B(r, v) \neq \emptyset\};$$

$$\sigma_s(v) = \|\{i \in \{1, \dots, r\} : v_i = s\}\| \quad (s \in \{1, 2, 3\}).$$

Z własności digrafów zbioru  $B(\|v\|, v)$  wynika, że  $\Phi^1 = \{(3)\}$  i  $\Phi^2 = \{(3, 2)\}$ , oraz że zbiór  $B(r, v)$  ( $r \geq 3$ ) nie jest zbiorem pustym wtedy i tylko wtedy, gdy

$$[v_2 \geq 2] \wedge [(\sigma_3(v) \geq 2) \Rightarrow (\sigma_1(v) \geq \sigma_3(v) - 1)].$$

Tak więc:

$$\Phi^1 = \{(3)\}; \quad \Phi^2 = \{(3, 2)\}; \quad \Phi^3 = \{(3, 3, 1), (3, 2, 2), (3, 2, 1)\};$$

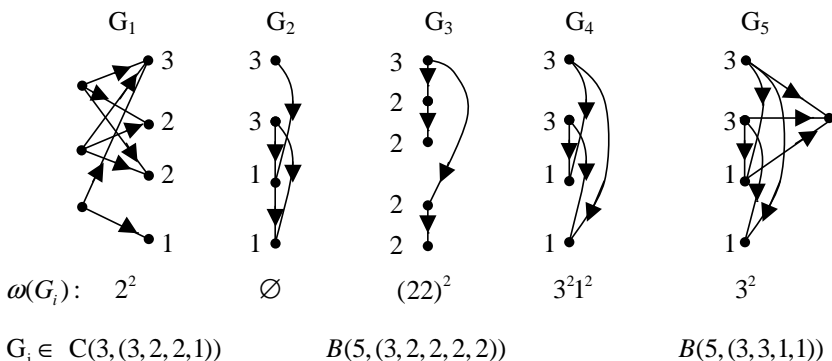
$$\Phi^4 = \{(3, 3, 2, 1), (3, 3, 1, 1), (3, 2, 2, 2), (3, 2, 2, 1), (3, 2, 1, 1)\};$$

$$\Phi^5 = \{(3, 3, 3, 1, 1), (3, 3, 2, 2, 1), (3, 3, 2, 1, 1), (3, 3, 1, 1, 1),$$

$$(3, 2, 2, 2, 2), (3, 2, 2, 2, 1), (3, 2, 2, 1, 1), (3, 2, 1, 1, 1)\}.$$

Zauważmy, że jeżeli  $\|v\| \leq 5$ , to grupy węzłowe grafów zbioru  $C(\alpha, v)$  oraz zbioru  $B(k, v)$  można przedstawić w postaci, co najwyżej, dwóch niezależnych albo dwóch sprzężonych grup węzłów podobnych, o odpowiednich krotnościach.

Niech zapis  $\omega(G) = v_{i_1}^{\delta_{i_1}} v_{i_p}^{\delta_{i_p}}$  (gdzie:  $\{v_{i_1}, v_{i_p}\} \subset \{3, 2, 1\}, p \in \{1, 2\}$ ) oznacza, że digraf  $G$  zbioru  $C(\alpha, v)$  albo zbioru  $B(k, v)$ , ma  $p$  niezależnych grup węzłów podobnych (odpowiednio) o wadze  $v_{i_1}$  i krotności  $\delta_{i_1}$  oraz o wadze  $v_{i_p}$  i krotności  $\delta_{i_p}$ , zapis  $\omega(G) = (v_{i_1} v_{i_2})^2$ , że ma dwie sprzężone grupy węzłów podobnych, zawierające po dwa węzły o wadze  $v_{i_1}$  oraz o wadze  $v_{i_2}$ , a zapis  $\omega(G) = \emptyset$ , że digraf  $G$  nie ma automorfizmu (rys.3).



Rys. 3. Ilustracja sposobu opisu automorfizmu digrafów o ważonych węzłach

Oznaczmy:

$$\Omega^C(\alpha, v) = \{\omega(G') : G' \in C(\alpha, v)\};$$

$$C(\alpha, v, \omega') = \{G' \in C(\alpha, v) : \omega(G') = \omega'\} \quad (\omega' \in \Omega^C(\alpha, v));$$

$$\Omega^B(k, v) = \{\omega(G'') : G'' \in B(k, v)\};$$

$$B(k, v, \omega'') = \{G'' \in B(k, v) : \omega(G'') = \omega''\} \quad (\omega'' \in \Omega^B(k, v)).$$

Niech  $D(\omega', \omega'', v)$  (gdzie:  $\omega' \in \Omega^C(\alpha, v)$ ,  $\omega'' \in \Omega^B(k, v)$ ,  $3 \leq \alpha \leq r \leq k, v \in \Phi^r$ ) oznacza zbiór niepodobnych struktur  $D$  rzędu  $\alpha + k$ , indukowanych przez wszystkie możliwe sklejenia węzłów, o jednakowych wagach, digrafów

$G'$  (gdzie:  $G' \in C(\alpha, \nu)$ ) i  $G''$  (gdzie:  $G'' \in B(k, \nu)$ ), które mają grupy węzłowe, odpowiednio,  $\omega'$  i  $\omega''$ .

Jeżeli potrafimy wyznaczyć wartości  $\|D(\omega', \omega'', \nu)\|$ ,  $\|C(\alpha, \nu, \omega')\|$  oraz  $\|B(k, \nu, \omega'')\|$ , to liczebność zbioru struktur  $D$  rzędu  $m(m \geq 7)$ , będziemy mogli określić z zależności

$$\|D(m)\| = \sum_{\alpha=3}^{m-3} \sum_{r=3}^{m-\alpha} \sum_{\nu \in \Phi^r} \|D(\alpha, m-\alpha, \nu)\|, \quad (2)$$

gdzie

$$\|D(\alpha, k, \nu)\| = \sum_{\omega' \in \Omega^r(\alpha, \nu)} \sum_{\omega'' \in \Omega^p(k, \nu)} \|D(\omega', \omega'', \nu)\| \cdot \|C(\alpha, \nu, \omega')\| \cdot \|B(k, \nu, \omega'')\|.$$

Zauważmy, że

$$\|D(4)\| = \|D(5)\| = 1 \text{ oraz } \|D(6)\| = \sum_{\nu \in \Phi^3} \|D(3, 3, \nu)\| + 1, \quad (3)$$

bowiem  $\Phi^2 = \{(3, 2)\}$  i  $\|C(4, (3, 2))\| = 1$ .

Jeżeli grupy węzłowe (digrafów  $G'$  i  $G''$ ) można opisać za pomocą liczności grup węzłów podobnych o określonej wadze, a tak można zrobić poza przypadkiem, gdy  $\omega(G'') = (22)^2 (\delta_i(G''))$  - liczba węzłów podobnych o wadze  $i (i \in \{1, 2, 3\})$  digrafu ( $G \in \{G', G''\}$ ),  $\delta(G) = (\delta_1(G), \delta_2(G), \delta_3(G))$ , to

$$\|D(\delta(G'), \delta(G''), \nu)\| = \prod_{i=1}^3 \Theta_i(\delta_i(G'), \delta_i(G''), \nu) \quad (4)$$

gdzie

$$\Theta_i(\delta_i(G'), \delta_i(G''), \nu) = \sum_{s=\max\{0, \psi_i(\delta_i(G'), \delta_i(G''), \sigma_i(\nu))\}}^{\min\{\delta_i(G'), \delta_i(G'')\}} [\sigma_i(\nu) - 2 \cdot \min\{\delta_i(G'), \delta_i(G'')\} - |\delta_i(G') - \delta_i(G'')| + s]!,$$

bowiem sklejenie  $s$  węzłów podobnych (o wadze  $i$ ) digrafów  $G'$  i  $G''$ , powoduje sklejenie

$$\sigma_i(\nu) - 2 \cdot \min\{\delta_i(G'), \delta_i(G'')\} - |\delta_i(G') - \delta_i(G'')| + s$$

niepodobnych węzłów o wadze  $i$ , przy czym

$$\psi_i(\delta_i(G'), \delta_i(G''), \sigma_i(v)) = 2 \cdot \min\{\delta_i(G'), \delta_i(G'')\} + |\delta_i(G') - \delta_i(G'')| - \sigma_i(v).$$

Tak więc, z zależności (2)-(4), po uwzględnieniu, że

$$\begin{aligned} (\delta_2(G') < 4) &\Rightarrow (\|D(\delta(G'), (22)^2, (3, 2, 2, 2, 2))\| = 4!); \\ (\delta_2(G') = 4) &\Rightarrow (\|D(\delta(G'), (22)^2, (3, 2, 2, 2, 2))\| = 1) \end{aligned}$$

oraz, korzystając z danych przedstawionych w tablicach 1-6, uzyskujemy zależność (1).

### 3. Metoda wyznaczania własności struktur klasy $C(\alpha, v)$

Struktura klasy  $C(\alpha, v)$  jest grafem prostym (dwupodzielnym digrafem bez pętli) o ważonych ścieżkach (węzłach bez następników), których waga równa się stopniowi wejściowemu ścieżki.

Opiszemy prostą metodę (podatną do komputerowej realizacji) wyznaczania grup węzłowych  $\omega \in \Omega^C(\alpha, v)$  i liczebności zbiorów  $C(\alpha, v, \omega)$  (gdzie:  $\omega \in \Omega^C(\alpha, v), 3 \leq \alpha \leq v_1 + \dots + v_r, 3 \leq r \leq 5, v \in \Phi^r$ ) oraz wyznaczymy te wartości.

Oczywiście, jeżeli  $r \leq 2$ , to  $\Omega^C(\alpha, v) = \{\emptyset\}$  i  $\|C(\alpha, v, \omega)\| = 1$ .

Zauważmy, że macierz binarna  $M_{(\alpha \times r)}$ , w której  $m_{i,1} + \dots + m_{i,r} = \lambda_i$  ( $1 \leq i \leq \alpha$ ) oraz  $m_{1,j} + \dots + m_{\alpha,j} = v_j$  ( $1 \leq j \leq r$ ), gdzie  $\lambda \in \{\lambda' \in \Lambda^\alpha(v_1 + \dots + v_r) : \lambda'_1 \leq r\}$  ( $\Lambda^\alpha(v_1 + \dots + v_r)$  - zbiór  $\alpha$ -dzielnych podziałów liczby naturalnej  $v_1 + \dots + v_r$ ), jest macierzą przejść grafu prostego, należącego do takiego podzbioru zbioru  $C(\alpha, v)$ , w którym liczby następników poszczególnych źródeł grafu prostego opisuje wektor  $\lambda (\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_\alpha))$ . Po zredukowaniu macierzy podobnych (w zbiorach macierzy wyznaczonych dla określonej wartości  $\lambda$ ), określamy liczbę i wagę węzłów podobnych grafu, który odpowiada określonej macierzy, przy czym liczba ta równa się liczbie jednakowych kolumn macierzy, a waga-sumie każdej z tych kolumn.

Wyznaczone w ten sposób wartości  $\Omega^C(\alpha, v)$  oraz  $\|C(\alpha, v, \omega)\|$  podano w tablicach 1, 2 i 3.

Tab. 1. Wartości  $\Omega^C(\alpha, v)$  i  $\|C(\alpha, v, \omega)\|$  ( $v \in \Phi^3$ )

$v$	$\alpha$	3			4		5	
	$\omega$	$\emptyset$	$2^2$	$3^2$	$\emptyset$	$2^2$	$\emptyset$	$2^2$
(3,3,1)				1	2		3	
(3,2,2)		1	1		4	1	3	1
(3,2,1)		2			3		2	

Tablica 2. Wartości  $\Omega^C(\alpha, v)$  i  $\|C(\alpha, v, \omega)\|$  ( $v \in \Phi^4$ )

$v$	$\alpha$	3						4					
	$\omega$	$\emptyset$	$1^2$	$2^2$	$2^3$	$3^2$	$3^2 1^2$	$\emptyset$	$1^2$	$2^2$	$2^3$	$3^2$	$3^2 1^2$
(3,3,2,1)						3		7				4	
(3,3,1,1)						1	1	7	2			1	3
(3,2,2,2)				1	1			3		5	1		
(3,2,2,1)		2		2				8		2			
(3,2,1,1)		1	1					8	3				

Tab. 3. Wartości  $\Omega^C(\alpha, v)$  i  $\|C(\alpha, v, \omega)\|$  ( $v \in \Phi^5$ )

$v$	$\alpha$	3												
	$\omega$	$\emptyset$	$1^2$	$1^3$	$2^2$	$2^3$	$2^4$	$3^2$	$3^3$	$2^2 1^2$	$3^2 1^2$	$3^2 1^3$	$3^2 2^2$	$3^3 1^2$
(3,3,3,1,1)								1						1
(3,3,2,2,1)							2						2	
(3,3,2,1,1)							2			1				
(3,3,1,1,1)							1			1	1			
(3,2,2,2,2)					2	1	1							
(3,2,2,2,1)					4	2								
(3,2,2,1,1)		2	2		2					2				
(3,2,1,1,1)		1	3	2										



#### 4. Metody wyznaczania własności struktur klasy $B(k, v)$

Rozpatrzmy niektóre metody wyznaczania grup węzłowych  $\omega$  (gdzie:  $\omega \in \Omega^B(k, v)$ ) i liczebności zbiorów  $B(k, v, \omega)$  (gdzie:  $\omega \in \Omega^B(k, v)$ ,  $v \in \Phi^r$ ,  $3 \leq r \leq k \leq 5$ ) oraz wyznaczmy te wartości.

Oczywiście, jeżeli  $r \leq 2$ , to  $\Omega^B(k, v) = \{\emptyset\}$  i  $\|B(k, v, \omega)\| = 1$ .

Niech  $M^*(v)$  (gdzie:  $v \in \Phi^r$ ) oznacza taką macierz wymiaru  $(r \times r)$ , że:  $m_{i,i} = v_i$  ( $i \in \{1, \dots, r\}$ ); ( $i \neq j$ )  $\Rightarrow$  ( $m_{i,j} \in \{0, 1\}$ );  $m_{1,j} + \dots + m_{r,j} = 3$  ( $j \in \{1, \dots, r\}$ ); ( $m_{i,i} = 3$ )  $\Rightarrow$  ( $m_{i,1} + \dots + m_{i,r} > 3$ ) oraz ( $m_{i,j} = 1, i \neq j$ )  $\Rightarrow$  ( $m_{j,i} = 0$ ).

Zauważmy, że macierz  $M(v)$ , utworzona z macierzy  $M^*(v)$  przez podstawienie zer na jej głównej przekątnej, jest macierzą przejść digrafu, który należy do zbioru  $B(r, v)$ . Tak więc, aby wyznaczyć  $\Omega^B(k, v)$  i  $\|B(k, v, \omega)\|$ , należy wyznaczyć zbiór niepodobnych macierzy  $M^*(v)$  i określić ich przekształcenia automorficzne.

Dla przykładu:

$$\Omega^B(4, (3, 3, 1, 1)) = \{\emptyset, 3^2 1^2\};$$

$\|B(4, (3, 3, 1, 1), \emptyset)\| = \|B(4, (3, 3, 1, 1), 3^2 1^2)\| = 1$ , bowiem zbiór niepodobnych macierzy  $M^*((3, 3, 1, 1))$  zawiera dwie macierze (rys. 4), przy czym macierz  $M_1^*((3, 3, 1, 1))$  ma pusty zbiór przekształceń automorficznych oraz

$$M_2^*((3, 3, 1, 1))[(1, 2)(3)(4)] = M_2^*((3, 3, 1, 1))[(1)(2)(3, 4)] = M_2^*((3, 3, 1, 1)).$$

$$M_1^*((3, 3, 1, 1)) = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad M_2^*((3, 3, 1, 1)) = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

**Rys. 4.** Ilustracja sposobu wyznaczenia zbioru  $\Omega^B(4, (3, 3, 1, 1)) = \{\emptyset, 3^2 1^2\}$

Pokażemy inne sposoby wyznaczania zbiorów  $\Omega^B(k, v)$  i liczebności zbiorów  $B(k, v, \omega)$  (gdzie:  $\omega \in \Omega^B(k, v)$ ).

Zauważmy, że jeżeli  $v_2 = \dots = v_r = 2$ , to zbiór  $B(r, v)$  ( $r \geq 2$ ) jest zbiorem takich dendrytów, w których źródło ma wagę równą trzy, natomiast

pozostałe węzły wagę równą dwa, a więc, w tym przypadku, liczebność zbioru  $B(r, v)$  jest równa liczbie drzew z korzeniem rzędu  $r$ .

Ponieważ szereg przeliczający drzewa z korzeniem, ma postać

$$x + x^2 + 2x^3 + 4x^4 + 9x^5 + \dots,$$

to łatwo jest wyznaczyć postać graficzną takich drzew, do rzędu piątego, a z tej postaci (bezpośrednio) zbiory  $\Omega^B(k, v)$  i liczebności zbiorów  $B(k, v, \omega)$  (gdzie:  $\omega \in \Omega^B(k, v)$ ).

Zauważmy, że digraf zbioru  $B(r+1, (v_1, \dots, v_r, 1))$  możemy traktować jako nadgraf pewnego digrafu ze zbioru  $B(r, (v_1, \dots, v_r))$ , a więc, jeżeli digraf  $G$  (gdzie:  $G \in B(r, v, \omega)$ ,  $\omega \neq \emptyset$ ,  $v \in \Phi^r$ ,  $r \geq 3$ ) ma  $p$  ( $1 \leq p \leq \min\{3, \lfloor 2^{-1}(r-1) \rfloor\}$ ) podgrup węzłów podobnych o licznosciach  $\delta_1, \dots, \delta_p$ , to indukuje (przez dodanie do niego, jednego węzła)

$$\Delta(r-1-\delta^*) \cdot \binom{r-\delta^*}{2} + p \cdot (r-\delta^*) + p + \Delta(p-1) \cdot \binom{p}{2}$$

niepodobnych digrafów zbioru  $B(r+1, (v_1, \dots, v_r, 1))$ , bowiem poprzednikami dodanego węzła może być: para węzłów z poza grupy węzłów podobnych; para węzłów, której jednym z węzłów jest węzeł należący do określonej podgrupy węzłów podobnych, a drugim-węzeł z poza węzłów podobnych; jednorazowo wybrana para węzłów należących do tej samej podgrupy węzłów podobnych albo do różnych podgrup węzłów podobnych (gdzie:  $\delta^* = \delta_1 + \dots + \delta_p$ ;  $(a \leq 0) \Rightarrow (\Delta(a) = 0)$  i  $(a > 0) \Rightarrow (\Delta(a) = 1)$ ).

Tak więc, jeżeli  $\|B(r, v, \omega)\| = 1 (\omega \neq \emptyset)$ , to

$$\|B(r+1, (v_1, \dots, v_r, 1))\| = \|B(r, v, \emptyset)\| \cdot \binom{r}{2} + \sum_{\omega \in \Omega^B(r, v) \setminus \{\emptyset\}} \left( \Delta(r-1-\delta^*(\omega)) \cdot \binom{r-\delta^*(\omega)}{2} + p(\omega) \cdot (r+1-\delta^*(\omega)) + \Delta(p(\omega)-1) \cdot \binom{p(\omega)}{2} \right) \quad (5)$$

**Przykład 1.** Wiemy (tablica 5), że  $\Omega^B(4, (3, 2, 1, 1)) = \{\emptyset, 1^2\}$  oraz  $\|B(4, (3, 2, 1, 1), \emptyset)\| = 2$  i  $\|B(4, (3, 2, 1, 1), 1^2)\| = 1$ , a więc (z zależności (5)) otrzymujemy, że  $\|B(5, (3, 2, 1, 1, 1))\| = 16$ . Nie są dane wystarczające, bowiem konieczna jest znajomość zbioru  $\Omega^B(5, (3, 2, 1, 1, 1))$  i wartości

$\|B(5, (3, 2, 1, 1, 1), \omega)\|$  (gdzie:  $\omega \in \Omega^B(5, (3, 2, 1, 1, 1))$ ).

Zauważmy, że digraf  $G'$  (gdzie:  $G' \in B(r, v, \emptyset), v \in \Phi^r, r \geq 3$ ) indukuje

$$\binom{r}{2} - \|\{e \in E(G') : (v(e)=1) \wedge (\Gamma(e)=\emptyset)\}\| \quad (6)$$

niepodobnych digrafów zbioru  $B(r+1, (v_1, \dots, v_r, 1), \emptyset)$  oraz

$$\|\{e \in E(G') : (v(e)=1) \wedge (\Gamma(e)=\emptyset)\}\| \quad (6')$$

niepodobnych digrafów zbioru  $B(r+1, (v_1, \dots, v_r, 1), 1^2)$ , bowiem dla każdego wężła  $e'$  ( $e' \in \{e \in E(G') : (v(e)=1) \wedge (\Gamma(e)=\emptyset)\}$ ) istnieje w zbiorze digrafów indukowanych (przez digraf  $G'$ ) dokładnie jeden digraf, w którym poprzedniki dodanego wężła (nadgrafu), są wspólne z poprzednikami (w digrafie  $G'$ ) wężła  $e'$ .

Dla  $r \leq 4$ , zależność (6) przyjmuje postać

$$\binom{r}{2} - \Delta(2 - v_r), \quad (6'')$$

bowiem ( $v_r = 2$ )  $\Rightarrow$  ( $\|\{e \in E(G') : w(e)=1\}\| = 0$ ), a

( $v_r = 1$ )  $\Rightarrow$  ( $\|\{e \in E(G') : (w(e)=1) \wedge (\Gamma(e)=\emptyset)\}\| = 1$ ) gdyż, w przypadku, gdy  $\sigma_1(v) = 2$ , to albo  $\|\{e \in E(G') : (w(e)=1) \wedge (\Gamma(e)=\emptyset)\}\| = 1$ , albo digraf  $G'$  nie ma pustej grupy węzłowej.

Postępując analogicznie otrzymujemy, że digraf  $G''$  (gdzie:  $G'' \in B(4, (3, 2, 1, 1), 1^2)$ ) indukuje dwa digrafy ze zbioru  $B(5, (3, 2, 1, 1, 1), \emptyset)$  oraz po jednym digrafie ze zbioru  $B(5, (3, 2, 1, 1, 1), 1^2)$  oraz ze zbioru  $B(5, (3, 2, 1, 1, 1), 1^3)$ .

Sumując powyższe wyniki z wynikami uzyskanymi w przykładzie 1 otrzymujemy zbiór  $\Omega^B(5, (3, 2, 1, 1, 1))$  i wartości  $\|B(5, (3, 2, 1, 1, 1), \omega)\|$  (gdzie:  $\omega \in \Omega^B(5, (3, 2, 1, 1, 1))$ ) (tablica 6).

Przy wyznaczaniu zbiorów  $\Omega^B(r+1, (v_1, \dots, v_r, 1))$  i wartości  $\|B(r+1, (v_1, \dots, v_r, 1), \omega)\|$  (gdzie:  $\omega \in \Omega^B(r+1, (v_1, \dots, v_r, 1))$ ), indukowanych przez digraf  $G^*$  (gdzie:  $G^* \in B(r, v, \emptyset)$ ), pomocna jest znajomość postaci graficznej lub macierzowej digrafu  $G^*$ .

Digraf  $G'$  (gdzie:  $G' \in B(r+s, v), 3 \leq r \leq 4, 1 \leq s \leq 5-r, v \in \Phi'$ ) jest takim nadgrafem digrafu  $G''$  (gdzie:  $G'' \in B(r, v)$ ), że  $\|E(G')\| = \|E(G'')\| + s$ , przy czym, węzły  $E(G') \setminus E(G'')$  nie są węzłami ważonymi.

Zauważmy, że dla  $s=2$  możliwe są dwa przypadki gdy poprzedniki obu węzłów zbioru  $E(G') \setminus E(G'')$  są węzłami ważonymi, oraz gdy jeden z węzłów tego zbioru ma dokładnie jeden poprzednik, który nie jest węzłem ważonym.

Tak więc, digraf zbioru  $B(r, v, \emptyset)$  indukuje

$$\prod_{i=1}^s \binom{r}{4-i} + \Delta(s-1) \cdot \binom{r}{3} \quad (7)$$

digrafów zbioru  $B(r+s, v, \emptyset)$ , a digraf zbioru  $B(r, v, w^\delta)$  (gdzie:  $w \in \{1, 2, 3\}, 2 \leq \delta \leq r-1$ ) indukuje:

$$\Delta(r-\delta-1) \cdot \binom{r-\delta}{2} \quad \text{digrafów zbioru } B(r+1, v, \emptyset);$$

$$\nabla(\delta-2) \cdot (r-\delta) + \nabla(\delta-3) \quad \text{digrafów zbioru } B(r+1, v, w^2);$$

$$\nabla(\delta-3) \quad \text{digrafów zbioru } B(r+1, v, w^3)$$

oraz

$$1 \quad \text{digraf zbioru } B(r+2, v, \emptyset)$$

$$i \quad 2 \quad \text{digrafy zbioru } B(r+2, v, w^2),$$

przy czym  $(\nabla(b)=1) \Leftrightarrow (b=0)$ .

Powyższe zależności nie obejmują tylko przypadku wyznaczenia, niezbędnego z uwagi na cel niniejszej pracy, liczby i grupy węzłowej digrafów zbioru  $B(5, (3, 3, 1, 1))$ , indukowanych przez digraf zbioru  $B(4, (3, 3, 1, 1), 3^2 1^2)$ . Znając postać graficzną tego digrafu (rys. 3) i budując jego nadgrafy (w zbiorze  $B(5, (3, 3, 1, 1))$ ) łatwo stwierdzamy, że indukuje on po jednym digrafie o grupie węzłowej  $3^2$  oraz  $1^2$ .

**Przykład 2.** Wiemy (tablica 5), że:  $\Omega^B(4, (3, 2, 2, 2)) = \{\emptyset, 2^2, 2^3\}$ ;  $\|B(4, (3, 2, 2, 2), \emptyset)\| = 2$ ;  $\|B(4, (3, 2, 2, 2), 2^2)\| = \|B(4, (3, 2, 2, 2), 2^3)\| = 1$ , a ponieważ: digraf zbioru  $B(4, (3, 2, 2, 2), \emptyset)$  indukuje 4 digrafy zbioru  $B(5, (3, 2, 2, 2), \emptyset)$ ; digraf zbioru  $B(4, (3, 2, 2, 2), 2^2)$  indukuje 1 digraf zbioru  $B(5, (3, 2, 2, 2), \emptyset)$  i 2 digrafy zbioru  $B(5, (3, 2, 2, 2), 2^2)$  oraz digraf zbioru

$B(4, (3, 2, 2, 2), 2^3)$  indukuje po jednym digrafie zbioru  $B(5, (3, 2, 2, 2), 2^2)$  i zbioru  $B(5, (3, 2, 2, 2), 2^2)$ , to  $\|B(5, (3, 2, 2, 2), \emptyset)\|=9$ ,  $\|B(5, (3, 2, 2, 2), 2^2)\|=3$  oraz  $\|B(5, (3, 2, 2, 2), 2^3)\|=1$  (tablica 5).

Wartości  $\Omega^B(k, v)$  i  $\|B(k, v, \omega)\|$  (gdzie:  $v \in \Phi^r, 3 \leq r \leq k \leq 5$ ), wyznaczone za pomocą powyższych metod, podano w tablicach 4, 5 i 6.

**Tab. 4. Wartości  $\Omega^B(k, v)$  i  $\|B(k, v, \omega)\|$  ( $v \in \Phi^3$ )**

$v$	$k$	3			4			5		
	$\omega$	$\emptyset$	$2^2$	$3^2$	$\emptyset$	$2^2$	$3^2$	$\emptyset$	$2^2$	$3^2$
(3,3,1)				1			1	1		2
(3,2,2)		1	1		1	1		5	2	
(3,2,1)		1			1			4		

**Tab. 5. Wartości  $\Omega^B(k, v)$  i  $\|B(k, v, \omega)\|$  ( $v \in \Phi^4$ )**

$v$	$k$	4						5				
	$\omega$	$\emptyset$	$1^2$	$2^2$	$2^3$	$3^2$	$3^2 1^2$	$\emptyset$	$1^2$	$2^2$	$2^3$	$3^2$
(3,3,2,1)		2				1		9				2
(3,3,1,1)		1					1	4	1			1
(3,2,2,2)		2		1	1			9		3	1	
(3,2,2,1)		4		1				17		2		
(3,2,1,1)		2	1					9	2			

**Tab. 6. Wartości  $\Omega^B(k, v)$  i  $\|B(k, v, \omega)\|$  ( $v \in \Phi^5$ )**

$v$	$k$	5										
	$\omega$	$\emptyset$	$1^2$	$1^3$	$2^2$	$2^3$	$2^4$	$3^2$	$(22)^2$	$2^2 1^2$	$3^2 1^2$	$3^2 2^2$
(3,3,3,1,1)		1						1				
(3,3,2,2,1)		13			1			1				1
(3,3,2,1,1)		13						3				
(3,3,1,1,1)		5	2	1							1	
(3,2,2,2,2)		3			3	1	1		1			
(3,2,2,2,1)		14			4							
(3,2,2,1,1)		25	1		1					1		
(3,2,1,1,1)		12	3	1								

## 5. Podsumowanie

Znajomość, wyjaśnionych w artykule, własności acyklicznej części 3-optimalnej struktury opiniowania diagnostycznego oraz szeregu przeliczającego (nawet tylko do rzędu ósmego) taką strukturę (zależność 1), może być przydatna przy poszukiwaniu metod komputerowego projektowania 3-diagnozowalnych struktur opiniowania diagnostycznego, spełniających określone wymagania techniczne i ekonomiczne.

Wyznaczenie szeregu przeliczającego (rozpatrywanej struktury) tylko do rzędu ósmego wynika stąd, że grupy węzłowe digrafów, których scalenie (rys. 2) indukuje rozpatrywane struktury, można wyrazić (poza jednym tylko przypadkiem) za pomocą niezależnych grup węzłów podobnych. Nie stanowi to jednak istotnego ograniczenia w zastosowaniu zaproponowanej w artykule metody wyznaczenia współczynników szeregu przeliczającego, większych od rzędu ósmego.

Uzyskane wyniki mogą być również przydatne w pracach z zakresu teorii grafów-szczególnie dotyczących komputerowych metod określania grup węzłowych digrafów, wykrywania digrafów izomorficznych oraz generowania digrafów określonej klasy.

## Literatura

- [1] Barsi F., Grandoni F., Maestrini P.: *A Theory of Diagnosability of Digital Systems*, IEEE Trans. on Comput. 6, 1976, pp. 585-593.
- [2] Harary F., Palmer E.: *Graphical Enumeration*, New York and London, Academic Press, 1973.
- [3] Krawczyk H.: *Analiza i synteza samodiagnozowalnych systemów komputerowych*, Zeszyty Naukowe Politechniki Gdańskiej, Elektronika nr 64, Gdańsk, 1987.
- [4] Kulesza R.: *Podstawy diagnostyki sieci logicznych i komputerowych*, Instytut Automatyki i Robotyki, Wydział Cybernetyki Wojskowej Akademii Technicznej, Warszawa, 2000, ss. 222.
- [5] Kulesza R.: *Struktury samodiagnozowalne w technice cyfrowej*, diag'2003, V Krajowa Konferencja „Diagnostyka Techniczna Urządzeń i Systemów”, 13-17 października 2003, Ustroń, s.165-173.
- [6] Kulesza R.: *Problemy przeliczania optymalnych struktur opiniowania diagnostycznego*, Biuletyn Instytutu Automatyki i Robotyki, Wojskowa Akademia Techniczna, Warszawa, 2004, nr20, s.3-21.
- [7] Preparata F. P., Metzger G., Chien R.T.: *On the Connection Assignment Problem of Diagnosable Systems*, IEEE Trans. Comput. 6, 1967, pp. 848-854.

## **Some properties of the acyclic components of the 3-optimal structure**

**ABSTRACT:** The method of enumeration the acyclic components of the 3-optimal structures for one-step diagnosis of system is presented in this paper.

**KEYWORDS:** structures for one-step diagnosis of system; enumeration; isomorphism.

*Recenzent: dr hab. inż. Andrzej Chojnacki*

*Praca wpłynęła do redakcji: 05.07.2006*