



## Wykorzystanie metody Prony'a do estymacji częstotliwości chwilowych sygnałów jednoczesnych w systemach NPCz

HENRYK GRUCHAŁŁA-WĘSIERSKI, MIROSŁAW CZYŻEWSKI,  
ADAM SŁOWIK

Wojskowa Akademia Techniczna, Wydział Elektroniki, Instytut Radioelektroniki,  
00-908 Warszawa, ul. S. Kaliskiego 2

**Streszczenie.** W artykule przedstawiona została koncepcja wykorzystania parametrycznej metody rozwiązywania układu równań nieliniowych, określanej jako metoda Prony'a, do estymacji częstotliwości chwilowych sygnałów jednoczesnych w układach NPCz. Metoda ta pozwala na estymację częstotliwości wielu sygnałów jednocześnie pojawiających się na wejściu układu NPCz, jednak ze względu na prostotę rozwiązania, rozważania ograniczono do dwóch sygnałów jednoczesnych. W artykule metoda Prony'a została omówiona teoretycznie, zaproponowany został sposób jej aplikacji do układu rzeczywistego NPCz oraz przedstawione zostały wyniki eksperymentu. W oparciu o otrzymane wyniki dla układu rzeczywistego przeprowadzona została analiza błędów i możliwości zastosowania zaproponowanego podejścia w systemach rozpoznania i walki elektronicznej.

**Słowa kluczowe:** natychmiastowy pomiar częstotliwości, estymacja sygnałów jednoczesnych, metoda Prony'a

**Symbole UKD:** 621.396.96

### 1. Wprowadzenie

Współczesne pole walki stawia przed systemami rozpoznania i walki elektronicznej coraz większe wymagania w dziedzinie szybkości, ilości i precyzji zdobywanych informacji o przeciwniku. Taka sytuacja zmusza do poszukiwania coraz to nowych rozwiązań systemowych, a jednocześnie ciągłego udoskonalania już istniejących. Analizowane w artykule układy natychmiastowego pomiaru częstotliwości (NPCz) stanowią istotny element w grupie szerokopasmowych, pasywnych układów estyma-

cji częstotliwości chwilowych sygnałów, a ze względu na wiele swoich zalet, wciąż znajdują szerokie zastosowanie w systemach rozpoznania. Rosnące wymagania prowadzą do ciągłego rozwoju zarówno części mikrofalowej tych układów, jak i sposobów obróbki uzyskiwanych w nich sygnałów wyjściowych [1-4]. Ten drugi aspekt, związany z przetwarzaniem sygnałów wyjściowych z układu NPCz, będzie stanowił przedmiot rozważań w tym artykule. Zaproponowana zostanie metoda estymacji częstotliwości chwilowych w sytuacji, gdy na wejściu układu NPCz pojawi się więcej niż jeden sygnał jednocześnie. Podstawę przyjętego rozwiązania stanowi matematyczna metoda rozwiązywania układu równań nieliniowych, określana w literaturze jako metoda Prony'a.

## 2. Zastosowanie metody Prony'a w układzie NPCz

Parametryczna metoda Prony'a jest matematyczną metodą rozwiązywania układu równań nieliniowych, które w przypadku ogólnym mają następującą postać:

$$\begin{aligned} x_1 &= c_1 + c_2 + \dots + c_p \\ x_2 &= c_1 z_1 + c_2 z_2 + \dots + c_p z_p \\ &\dots \\ x_N &= c_1 z_1^{(N-1)} + c_2 z_2^{(N-1)} + \dots + c_p z_p^{(N-1)}, \end{aligned} \quad (1)$$

gdzie  $x_i$  reprezentują znane wartości, a wartości  $c_i$  i  $z_i$  są nieznanne.

W układzie tym jest  $2p$  niewiadomych i  $N$  równań. Aby otrzymać jednoznaczne rozwiązanie dla wszystkich niewiadomych, musi być spełniony następujący warunek:

$$N = 2p. \quad (2)$$

Metoda Prony'a jest trzyetapowa. W pierwszym etapie należy wprowadzić  $p$  nowych niewiadomych (od  $a_1$  do  $a_p$ ), i sprowadzić równania do równań liniowych zmiennej  $a_i$ . Biorąc najpierw  $p+1$  równań, należy pomnożyć pierwsze przez  $a_p$ , drugie przez  $a_{p-1}$  i tak aż do równania z  $x_{p+1}$ , pomnożonego przez  $-1$ , co pozwoli uzyskać następujący układ  $p+1$  równań:

$$\begin{aligned} a_p x_1 &= a_p c_1 + a_p c_2 + \dots + a_p c_p \\ a_{p-1} x_2 &= a_{p-1} c_1 z_1 + a_{p-1} c_2 z_2 + \dots + a_{p-1} c_p z_p \\ &\dots \\ a_1 x_p &= a_1 c_1 z_1^{(p-1)} + a_1 c_2 z_2^{(p-1)} + \dots + a_1 c_p z_p^{(p-1)} \\ -x_{p+1} &= -c_1 z_1^p - c_2 z_2^p - \dots - c_p z_p^p. \end{aligned} \quad (3)$$

Sumując lewe strony tych równań i przyrównując je do zera, można ułożyć następujące równanie:

$$a_p x_1 + a_{p-1} x_2 + \dots + a_1 x_p - x_{p+1} = 0. \quad (4)$$

Jest to jedno z równań potrzebnych do określenia wartości nowo wprowadzonej zmiennej  $a_i$ . Pozostałe  $p-1$  równań potrzebnych do określenia wartości wszystkich  $a_p$  zmiennych może być otrzymane w podobny sposób. W wyniku tych operacji powstanie następujący układ równań liniowych:

$$\begin{aligned} a_p x_1 + a_{p-1} x_2 + \dots + a_1 x_p - x_{p+1} &= 0 \\ a_p x_2 + a_{p-1} x_3 + \dots + a_1 x_{p+1} - x_{p+2} &= 0 \\ \dots & \\ a_p x_p + a_{p-1} x_{p+1} + \dots + a_1 x_{2p-1} - x_{2p} &= 0, \end{aligned} \quad (5)$$

co można zapisać w postaci macierzowej:

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_p \\ x_2 & x_3 & \dots & x_{p+1} \\ \dots & & & \\ x_p & x_{p+1} & \dots & x_{2p-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_p \\ a_{p-1} \\ \vdots \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{p+1} \\ x_{p+2} \\ \vdots \\ x_{2p} \end{bmatrix}. \quad (6)$$

Rozwiązaniem powyższego równania, przy znanych wartościach  $x_i$ , będą wartości wprowadzonych współczynników  $a_i$ , co kończy pierwszy etap w omawianej metodzie.

W drugim etapie określone zostaną wartości niewiadomych  $z_i$ . W tym celu zsumowane i przyrównane do zera zostaną prawe strony równań (3), co w efekcie pozwoli utworzyć następujące równanie:

$$\begin{aligned} c_1 (a_p + a_{p-1} z_1 + \dots + a_1 z_1^{p-1} - z_1^p) + c_2 (a_p + a_{p-1} z_2 + \dots + a_1 z_2^{p-1} - z_2^p) + \dots \\ + c_p (a_p + a_{p-1} z_p + \dots + a_1 z_p^{p-1} - z_p^p) = 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Jest to pierwsze z równań potrzebnych do określenia niewiadomych  $z_i$ . Postępując w sposób analogiczny jak w przypadku określania parametrów  $a_i$ , można utworzyć również pozostałe równania, których postać macierzowa jest następująca:

$$\begin{bmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_p \\ c_1 z_1 & c_2 z_2 & \cdots & c_p z_p \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_1 z_1^{p-1} & c_2 z_2^{p-1} & \cdots & c_p z_p^{p-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_p + a_{p-1} z_1 \cdots - z_1^p \\ a_p + a_{p-1} z_2 \cdots - z_2^p \\ \vdots \\ a_p + a_{p-1} z_p \cdots - z_p^p \end{bmatrix} = 0. \quad (8)$$

Rozwiązaniem tego układu równań jest następujące równanie nieliniowe:

$$a_p + a_{p-1} z_i + \cdots + a_1 z_i^{p-1} - z_i^p = 0 \quad i = 1, 2, \dots, p-1. \quad (9)$$

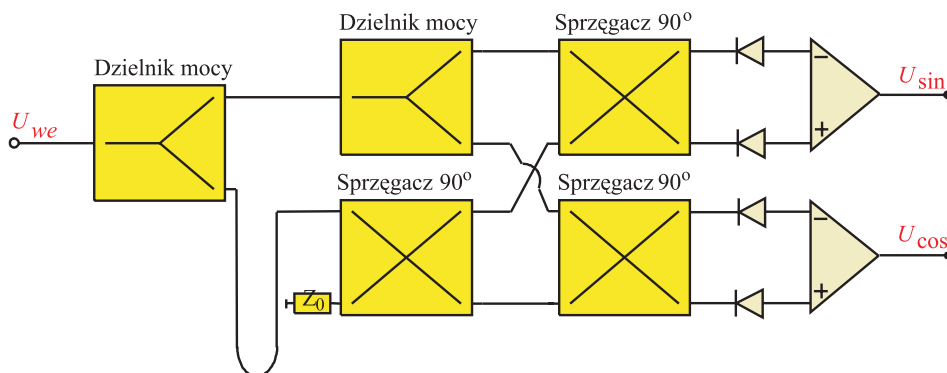
Równanie to można zapisać również w następującej postaci:

$$z^p - a_1 z^{p-1} - \cdots - a_{p-1} z - a_p = 0. \quad (10)$$

Po wyznaczeniu wartości wszystkich niewiadomych  $z_i$ , podstawiając je do układu równań (1), można określić również wartości niewiadomych  $c_i$ , co stanowi ostatni etap w omawianej metodzie.

W metodzie Prony'a teoretycznie można rozpatrywać dowolną liczbę niewiadomych  $z$ , jednak ścisłą postać rozwiązania można uzyskać tylko dla nie więcej niż czterech. Ograniczenie to wynika z potrzeby rozwiązania jednego nieliniowego równania (10). Jeżeli występuje pięć lub więcej niewiadomych, pierwiastki  $z_i$  mogą zostać znalezione jedynie przy wykorzystaniu metod numerycznych [5, 6].

Analiza możliwości wykorzystania metody Prony'a do estymacji częstotliwości chwilowych sygnałów jednoczesnych zostanie oparta na klasycznej strukturze układu NPCz, przedstawionej na rysunku 1.



Rys. 1. Schemat blokowy układu NPCz

W omawianym przypadku, gdy na wejściu układu NPCz (rys. 1) pojawią się dwa sygnały jednocześnie, sygnał wejściowy ma następującą postać:

$$U_{we} = A_1 \cos \omega_1 t + A_2 \cos \omega_2 t, \quad (11)$$

gdzie:  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  są odpowiednio amplitudami i pulsacjami poszczególnych sygnałów wejściowych (przyjęto zerową fazę początkową).

Układ NPCz z punktu widzenia matematycznego wykonuje, na drodze analogowej, funkcję autokorelacji sygnału w.cz. Ta matematyczna operacja realizowana jest najpierw przez układy mikrofalowe, gdzie poprzez odpowiedni dobór długości linii opóźniającej, zdeterminowane zostaje opóźnienie  $\tau$  funkcji autokorelacji, a następnie realizowany jest spłot sygnału opóźnionego i nieopóźnionego. W kolejnym etapie w wyniku detekcji kwadratowej, filtracji i odejmowania parami czterech sygnałów wyjściowych, otrzymane są dwa sygnały o następującej postaci:

$$U_{\sin} = kA_1^2 \sin(\omega_1 \tau) + kA_2^2 \sin(\omega_2 \tau) \quad (12)$$

$$U_{\cos} = kA_1^2 \cos(\omega_1 \tau) + kA_2^2 \cos(\omega_2 \tau), \quad (13)$$

gdzie:  $k$  jest współczynnikiem podziału, którego wartość zależy od struktury układu.

Następnie poprzez odpowiednią kombinację tych sygnałów uzyskiwana jest wartość funkcji autokorelacji sygnału wejściowego o opóźnieniu  $\tau$ , co można zapisać jako:

$$R(\tau) = R(1) = U_{\cos} + jU_{\sin} = kA_1^2 \exp(j\omega_1 \tau) + kA_2^2 \exp(j\omega_2 \tau). \quad (14)$$

Oczywistym warunkiem koniecznym do spełnienia powyższych zależności jest czas trwania sygnału wejściowego, który musi być dłuższy od czasu opóźnienia, w przeciwnym wypadku funkcja autokorelacji musi zostać zastąpiona funkcją kowariancji, co w istotny sposób komplikuje dalszą analizę takiego sygnału.

U podstaw wykorzystania metody Prony'a w układach NPCz leży możliwość wprowadzania do funkcji autokorelacji, za pomocą linii opóźniającej, ściśle określonych opóźnień. W związku z tym poza układem o podstawowym opóźnieniu  $\tau$ , istnieje również możliwość zaprojektowania układów o opóźnieniach  $2\tau$  i bez opóźnienia, którym będą odpowiadać następujące wartości funkcji autokorelacji:

$$R(2\tau) = R(2) = kA_1^2 \exp(j2\omega_1 \tau) + kA_2^2 \exp(j2\omega_2 \tau) \quad (15)$$

$$R(\tau = 0) = R(0) = kA_1^2 + kA_2^2. \quad (16)$$

Wprowadzono zmienną pomocniczą  $z_i$ , którą można zapisać jako:

$$z_i = \exp(j\omega_i \tau) \quad i = 1, 2. \quad (17)$$

Sygnały wyjściowe z trzech torów układu NPCz, o różnych opóźnieniach  $0$ ,  $\tau$  i  $2\tau$ , można zapisać w postaci następującego układu równań nieliniowych:

$$\begin{aligned} R(-1) &= P_1 z_1^{-1} + P_2 z_2^{-1} \\ R(0) &= P_1 + P_2 \\ R(1) &= P_1 z_1 + P_2 z_2 \\ R(2) &= P_1 z_1^2 + P_2 z_2^2. \end{aligned} \quad (18)$$

Wykorzystując metodę Prony'a, można rozwiązać ten układ równań. W pierwszym etapie należy wprowadzić i wyznaczyć parametry  $a_1$  i  $a_2$  zgodnie z następującym równaniem macierzowym:

$$\begin{bmatrix} R(0) & R(-1) \\ R(1) & R(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} R(1) \\ R(2) \end{bmatrix}. \quad (19)$$

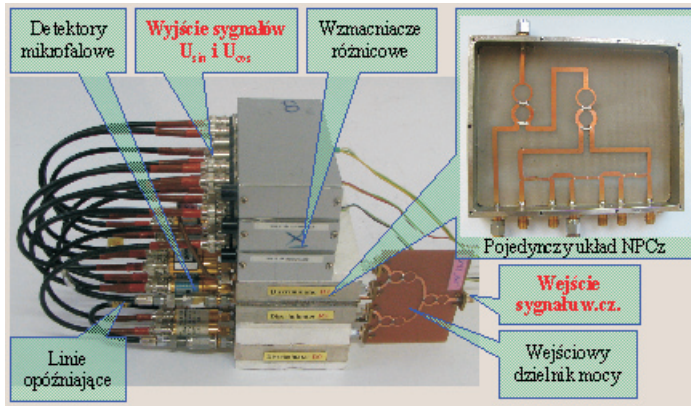
W drugim etapie należy rozwiązać następujące równanie drugiego rzędu:

$$z^2 + a_1 z + a_2 = 0. \quad (20)$$

Wyznaczone w ten sposób niewiadome  $z_1$  i  $z_2$ , zgodnie z równaniem (17) pozwolą określić pulsację jednoczesnych sygnałów wejściowych  $\omega_1$  i  $\omega_2$ .

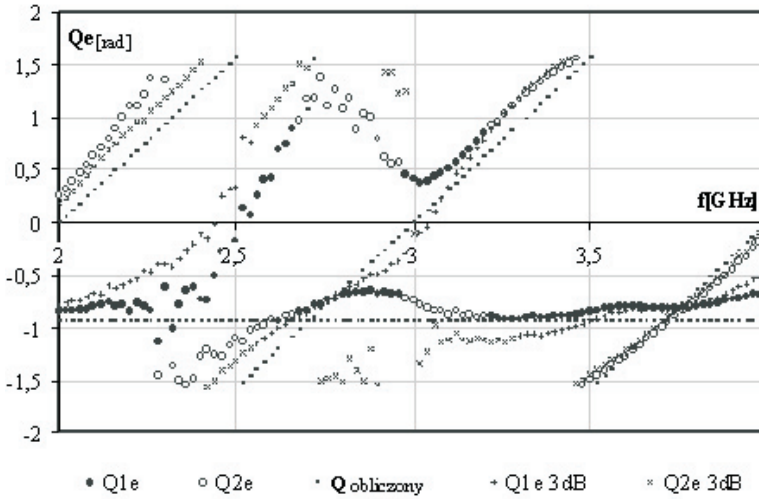
### 3. Eksperymentalne wyniki badań

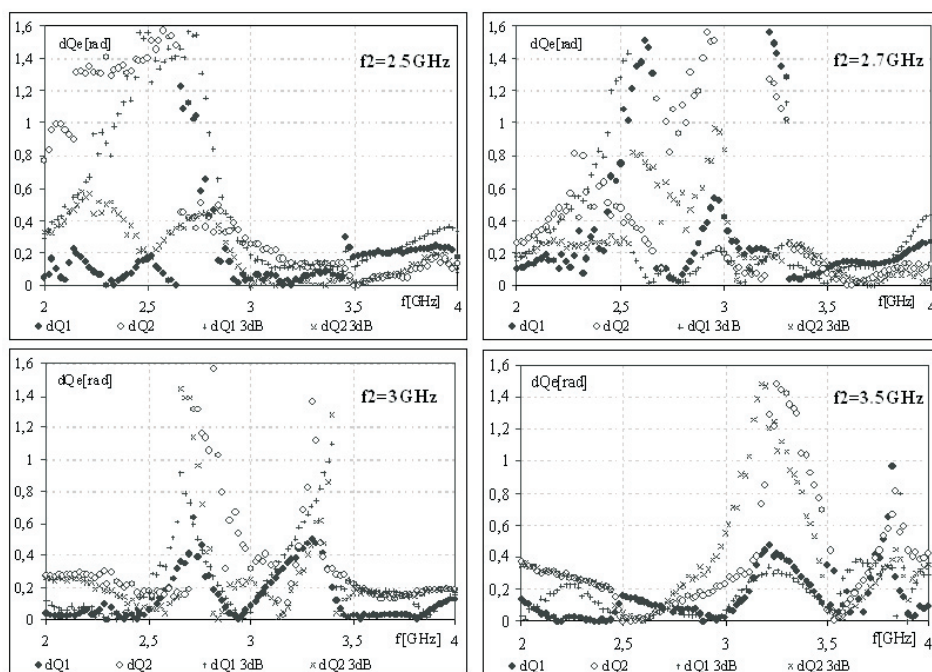
W oparciu o powyższą analizę teoretyczną przeprowadzone zostały badania eksperymentalne w celu zweryfikowania możliwości wykorzystania algorytmu Prony'a w praktycznych realizacjach układów NPCz zdolnych do estymacji dwóch sygnałów jednocześnie. Zgodnie z przyjętymi wcześniej założeniami, do badań wykorzystano trójkanałowy układ NPCz pracujący w paśmie 2÷4 GHz, z liniami opóźniającymi zapewniającymi opóźnienia  $0$ ,  $\tau$ ,  $2\tau$ , przedstawiony na rysunku 2.



Rys. 2. Trójkanałowy układ NPCz wykorzystany do pomiarów

Wyniki pracy estymatora zaprojektowanego w oparciu o algorytm Prony'a dla dwóch sygnałów jednoczesnych o różnych poziomach mocy, z których jeden miał stałą częstotliwość 2,7 GHz, przedstawione zostały na rysunku 3.

Rys. 3. Wyniki estymacji częstotliwości metodą Prony'a w układzie NPCz dla dwóch sygnałów jednoczesnych ( $f_1 = 2\div 4$  GHz,  $f_2 = 2,7$  GHz)



Rys. 4. Błędy estymacji częstotliwości metodą Prony'a w układzie NPCz dla dwóch sygnałów jednoczesnych ( $f_1 = 2 \div 4$  GHz,  $f_2 = 2,5$  GHz, 2,7 GHz, 3 GHz, 3,5 GHz)

#### 4. Wnioski

Przeprowadzona w artykule analiza wskazuje na możliwość wykorzystania parametrycznej metody Prony'a do estymacji częstotliwości wielu sygnałów jednoczesnych w układach NPCz. Wyjątkową zaletą tej metody jest jej prostota w dość złożonej sytuacji radiolokacyjnej, co przy natychmiastowym pomiarze częstotliwości ma ogromne znaczenie, gdyż nie wymaga dużych mocy obliczeniowych, a co za tym idzie nie opóźnia pracy całego systemu. Drugą istotną zaletą tej metody są jej niewielkie wymagania sprzętowe, gdyż przy analizie  $p$  sygnałów wystarczy  $p+1$  dyskryminatorów częstotliwości. W przypadku analizowanych dwóch sygnałów jednoczesnych do zaprojektowania praktycznego estymatora wystarczyły trzy dyskryminatory.

Analiza teoretyczna wskazuje również na pewne ujemne strony zastosowania tej metody. Zasadniczym problemem jest tu znaczne, bo aż o połowę, ograniczenie pasma jednoznacznego pomiaru, co jest cechą tej metody, której nie można wyeliminować. Drugą cechą metody, która może rzutować na jej praktyczną aplikację w układach rzeczywistych jest całkowite pominięcie problemu szumów, co ogranicza możliwości jej stosowalności jedynie do sygnałów o dużym stosunku S/N. Pewnym



problemem może być również uzyskanie wartości funkcji autokorelacji na wyjściu układu NPCz w przypadku bardzo krótkich sygnałów, których czas trwania jest krótszy od opóźnienia wprowadzanego przez układ z najdłuższą linią opóźniającą. Ogranicza to w pewien sposób ilość sygnałów, które można analizować.

Analiza wyników eksperymentu wskazuje na kolejne czynniki, które należy uwzględnić, rozważając możliwość praktycznego wykorzystania metody Prony'a w rzeczywistych realizacjach układów NPCz mających zdolność estymacji wielu częstotliwości. Zasadniczym problemem jest w tym przypadku efekt związany z sygnałami o zbliżonych częstotliwościach.

Analiza dodatnich i ujemnych cech zaproponowanego rozwiązania wskazuje z jednej strony na możliwości zastosowania tej metody w układach NPCz, ze względu na jej niewątpliwe zalety, z drugiej jednak strony mnogość zasygnalizowanych problemów mocno ją ogranicza. Wymaga ona w tym przypadku wprowadzenia odpowiednich modyfikacji i dodatkowych elementów uwzględniających wymagania stawiane przez nowoczesne układy NPCz. Jednakże w obecnej sytuacji, gdy układy tego typu coraz częściej spotykają się z problemem wielu sygnałów jednocześnie pojawiających się na ich wejściu, istnieje uzasadniona konieczność poszukiwań i pracy nad takimi metodami.

Artykuł wpłynął do redakcji 17.01.2007 r. Zweryfikowaną wersję po recenzji otrzymano w marcu 2007 r.

#### LITERATURA

- [1] J. P. COUPEZ, H. GRUCHAŁŁA, A. SŁOWIK, CZ. REĆKO, A. RUTKOWSKI, *High resolution IFMs*, Proceedings of the XIV International Conference on Microwave, Gdańsk, 20-22 maja 2002.
- [2] B. SMÓLSKI, *Analiza i synteza mikrofalowych układów natychmiastowego pomiaru częstotliwości*, Dodatek do Biuletynu WAT, nr 7(335), Warszawa, 1980.
- [3] B. STEC, *Analiza i badania mikrofalowego dyskryminatora częstotliwości*, Biul. WAT, nr 7(431), Warszawa, 1988.
- [4] H. GRUCHAŁŁA, M. CZYŻEWSKI, *The instantaneous frequency measurement receiver in the complex electromagnetic environment*, Proceedings of the XIV International Conference on Microwave, Warszawa, tom I, 18-20 maja 2004, 155-159.
- [5] J. B. Y. TSUI, *Digital Microwave Receivers. Theory and Concepts*, Artech House, Norwood, 1989.
- [6] J. B. Y. TSUI, *Digital Techniques for Wideband Receivers*, Artech House, Norwood, 1995.

H. GRUCHAŁŁA-WĘSIERSKI, M. CZYŻEWSKI, A. SŁOWIK

#### **Prony's method used for estimation of simultaneous signals frequencies in the IFM systems**

**Abstract.** The instantaneous frequency measurement systems are very important part of passive reconnaissance systems. An IFM system can be very small and can measure frequency accurately on a short pulse, but it cannot process two simultaneous signals. In this paper, the instantaneous

frequency measurement systems with simultaneous signals capability using Prony's algorithm has been presented. Prony's algorithm provides the estimates of multiple frequencies by using multiple correlators to generate an estimate of the covariance matrix. Although the method can be used to multiple signals, in this paper, only the two signals case has been considered for reasons of simplicity. Experimental data have been shown and compared to theoretical analysis. Some problems that stem from this approach have been indicated and solutions for them have been proposed.

**Keywords:** IFM system, simultaneous signals estimate, Prony's method

**Universal Decimal Classification:** 621.396.96