



## Modelowanie zachowania niesprężystej belki żelbetowej

PIOTR SMARZEWSKI\*, ADAM STOLARSKI

\*Politechnika Lubelska, Wydział Budownictwa i Inżynierii Sanitarnej,  
20-618 Lublin, ul. Nadbystrzycka 38 D  
Wojskowa Akademia Techniczna, Wydział Inżynierii Lądowej i Geodezji,  
00-908 Warszawa, ul. S. Kaliskiego 2

**Streszczenie.** W niniejszej pracy przedstawiono analizę wyężenia zginanej belki żelbetowej. Modelowanie przeprowadzono z wykorzystaniem zasad metody elementów skończonych. W celu zweryfikowania poprawności założonych modeli materiałów konstrukcyjnych: betonu i stali zbrojeniowej porównano otrzymane wyniki obliczeń numerycznych z wynikami doświadczalnymi oraz z wynikami obliczeń analitycznych.

**Słowa kluczowe:** metoda elementów skończonych, elementy żelbetowe, belki

**Symbole UKD:** 624.072

### 1. Wprowadzenie

Analiza wyężenia elementów konstrukcyjnych jest ważnym zagadnieniem mechaniki konstrukcji, szczególnie w odniesieniu do elementów wykonanych z materiałów kruchych, gdyż umożliwia ocenę bezpieczeństwa konstrukcji i optymalne projektowanie budowli inżynierskich.

Zwiększenie nośności elementów konstrukcyjnych wykonanych z materiałów kruchych uzyskuje się przez zastosowanie zbrojenia w postaci wiotkich prętów stalowych rozłożonych w materiale matrycy elementu w tych strefach, w których występują naprężenia rozciągające wywołujące zarysowanie materiału.

Przedmiotem pracy są belki żelbetowe traktowane jako kompozycja materiałowa składająca się z matrycy betonowej wzmocnionej wiotkimi prętami stalowymi rozłożonymi dyskretnie w matrycy.

Celem pracy jest modelowanie procesów statycznego odkształcania belek żelbetowych z uwzględnieniem nieliniowości fizycznych materiałów konstrukcyjnych betonu i stali zbrojeniowej.

Zakres pracy obejmuje rozważania dotyczące modelowania niesprężystych właściwości materiałów, modelowania procesów odkształcania przestrzennego ustroju konstrukcyjnego oraz opracowanie rozwiązań numerycznych.

W odniesieniu do stali zbrojeniowej wykorzystano model materiału sprężysto-idealnie plastycznego, a w odniesieniu do betonu — model materiału sprężysto-plastycznego ze wzmocnieniem. Model betonu uwzględnia możliwość kruchego zniszczenia betonu podatnego na zarysowanie przy rozciąganiu i zmiażdżenie przy ściskaniu.

Rozwiązania numeryczne uzyskano z wykorzystaniem programu obliczeniowego metody elementów skończonych, umożliwiającego modelowanie zachowania żelbetowych układów konstrukcyjnych z uwzględnieniem zróżnicowanych, lecz wzajemnie uzupełniających się właściwości materiałowych betonu i stali zbrojeniowej, rzeczywistego układu stali zbrojeniowej w obszarze konstrukcji i wzajemnej współpracy tych materiałów konstrukcyjnych. Tego typu symulacje komputerowe przyczyniają się do redukcji kosztów związanych z przeprowadzeniem badań doświadczalnych konstrukcji, nie zastępują tych badań, ale umożliwiają efektywniejsze planowanie eksperymentów. Umożliwiają analizę złożonych zagadnień zachowania konstrukcji żelbetowych w całym zakresie odkształcenia od zakresu liniowo-sprężystego, przez fazy niesprężystego odkształcenia w obszarach naprężeń rozciągających powodujących stany początkowego i zaawansowanego zarysowania, a w obszarach naprężeń ściskających powodujących zmiażdżenie betonu, prowadzące do zniszczenia elementów konstrukcyjnych.

## 2. Modele materiałów konstrukcyjnych

### 2.1. Beton

Model betonu opisuje powierzchnia graniczna interpretowana jako powierzchnia zniszczenia oraz prawo zmiany tej powierzchni w funkcji odkształcenia. Opis zniszczenia betonu przy ściskaniu jest zgodny z teorią Willama-Warnke, uwzględniającą pięć parametrów materiałowych, zaprezentowaną w pracy [12]. Opis zniszczenia przy rozciąganiu jest zgodny z kryterium maksymalnego naprężenia normalnego Rankina. W modelu nie uwzględniono wpływu naprężeń relaksacyjnych po zarysowaniu i założono model kruchego zniszczenia przy rozciąganiu. W betonie zarysowanym uwzględniono możliwość jego wzmocnienia przy ścinaniu przez definiowanie współczynników ścinania dla rys otwartych i rys zamkniętych.

### Powierzchnia graniczna

Powierzchnia graniczna betonu w złożonym stanie naprężenia jest określona równaniem:

$$\frac{F}{f_c} - S = 0. \quad (1)$$

Funkcje stanu naprężenia  $F$  i powierzchni zniszczenia  $S$  są wyrażone w zależności od naprężeń głównych  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ ,

gdzie:  $\sigma_1 = \max(\sigma_{xp}, \sigma_{yp}, \sigma_{zp})$ ,  $\sigma_3 = \min(\sigma_{xp}, \sigma_{yp}, \sigma_{zp})$  i  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ ,

a naprężenia  $\sigma_{xp}, \sigma_{yp}, \sigma_{zp}$  są naprężeniami normalnymi działającymi w kierunkach prostokątnego układu współrzędnych  $x, y, z$ .

Powierzchnia zniszczenia  $S$  zależy również od pięciu parametrów  $f_t, f_c, f_{cb}, f_1, f_2$ , które określają:

- $f_c$  — graniczną wytrzymałość na ściskanie w jednoosiowym stanie naprężenia,
- $f_t$  — graniczną wytrzymałość na rozciąganie w jednoosiowym stanie naprężenia,
- $f_{cb}$  — graniczną wytrzymałość w stanie dwuosiowego ściskania,
- $f_1$  — graniczną wytrzymałość w stanie dwuosiowego ściskania i równocześnie w stanie naprężenia hydrostatycznego  $\sigma_h^a$ ,
- $f_2$  — graniczną wytrzymałość w stanie jednoosiowego ściskania i równocześnie w stanie naprężenia hydrostatycznego  $\sigma_h^a$ .

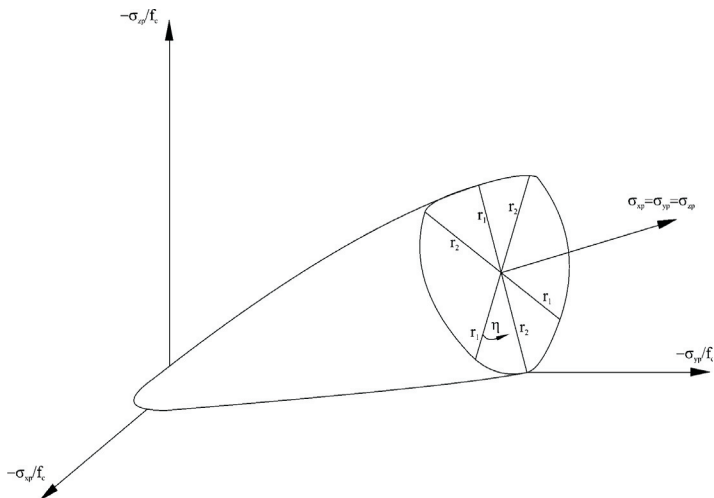
Powierzchnia graniczna betonu jest wykorzystywana jako kryterium zniszczenia zgodnie z następującą interpretacją.

Materiał znajduje się w stanie zniszczenia, gdy równanie (1) jest spełnione. Jako stany zniszczenia rozróżnia się stan zarysowania, jeżeli dowolne naprężenie główne jest rozciągające, oraz stan zmiążdżenia, gdy wszystkie naprężenia główne są ściskające.

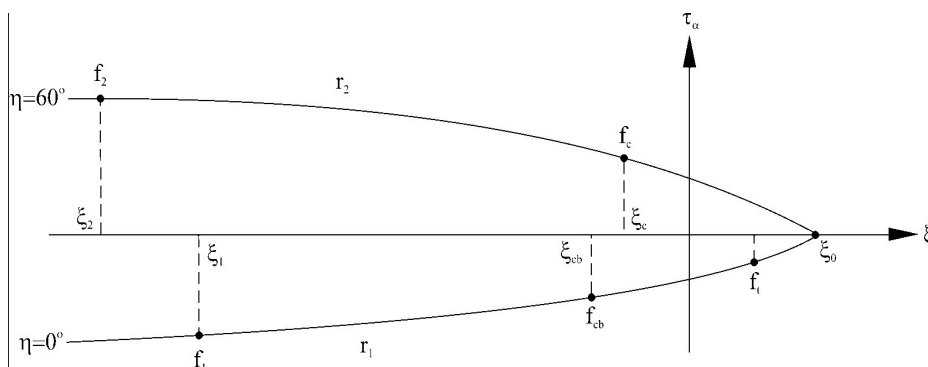
Opis zniszczenia betonu określa się w czterech zakresach stanu naprężenia:

1.  $0 \geq \sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$  (ściskanie-ściskanie-ściskanie),
2.  $\sigma_1 \geq 0 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$  (rozciąganie-ściskanie-ściskanie),
3.  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq 0 \geq \sigma_3$  (rozciąganie-rozciąganie-ściskanie),
4.  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3 \geq 0$  (rozciąganie-rozciąganie-rozciąganie).

W każdym zakresie stanu naprężenia, niezależne funkcje opisują funkcję  $F$  i powierzchnię zniszczenia  $S$ . Funkcje opisujące funkcję stanu naprężenia  $F$  oznaczono jako  $F_1, F_2, F_3, F_4$ , natomiast funkcje opisujące powierzchnię zniszczenia  $S$  oznaczono jako  $S_1, S_2, S_3, S_4$ . Powierzchnię graniczną przedstawiono na rysunkach 1 i 2. Funkcje te omówiono szczegółowo w każdym zakresie stanu naprężenia.



Rys. 1. Przestrzenna powierzchnia zniszczenia w obszarze naprężeń głównych



Rys. 2. Przekrój powierzchni zniszczenia

**Złożony stan naprężenia ściskanie-ściskanie-ściskanie,  $0 \geq \sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$**

W stanie ściskanie-ściskanie-ściskanie funkcja  $F$  ma postać:

$$F = F_1 = \frac{1}{\sqrt{15}} \left[ (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (2)$$

a  $S$  jest definiowane jako:

$$S = S_1 = \frac{2r_2(r_2^2 - r_1^2)\cos\eta + r_2(2r_1 - r_2)\left[4(r_2^2 - r_1^2)\cos^2\eta + 5r_1^2 - 4r_1r_2\right]^{\frac{1}{2}}}{4(r_2^2 - r_1^2)\cos^2\eta + (r_2 - 2r_1)^2}, \quad (3)$$

gdzie:

$$\cos\eta = \frac{2\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3}{\sqrt{2}\left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2\right]^{\frac{1}{2}}} \quad (4)$$

$$r_1 = a_0 + a_1\xi + a_2\xi^2 \quad (5)$$

$$r_2 = b_0 + b_1\xi + b_2\xi^2 \quad (6)$$

$$\xi = \frac{\sigma_h}{f_c} \quad (7)$$

$$\sigma_h = \frac{1}{3}(\sigma_{xp} + \sigma_{yp} + \sigma_{zp}). \quad (8)$$

W równaniu (7) stan naprężenia hydrostatycznego  $\sigma_h$  obliczono z równania (8), a nieznanne wartości współczynników  $a_0, a_1, a_2, b_0, b_1, b_2$  określono na podstawie poniżej przedstawionych zaleceń.

Wartość kąta  $\eta$  zależy od względnych wartości naprężeń głównych. Jeżeli w równaniu (4)  $\eta = 0^\circ$ , to wzór opisuje stan naprężeń, w którym  $\sigma_3 = \sigma_2 > \sigma_1$ , czyli jednoosiowe ściskanie lub dwuosiowe rozciąganie. Jeżeli w równaniu (4)  $\eta = 60^\circ$  wzór opisuje jednoosiowe rozciąganie lub dwuosiowe ściskanie, w którym  $\sigma_3 > \sigma_2 = \sigma_1$ . Pozostałe złożone stany naprężenia powstają dla kąta z przedziału  $0^\circ \leq \eta \leq 60^\circ$ . Dla wartości kąta  $\eta = 0^\circ$ , funkcja  $S_1$  obliczona z równania (3) jest równa  $r_1$ , natomiast dla wartości kąta  $\eta = 60^\circ$ , funkcja  $S_1$  jest równa  $r_2$ . Wynika stąd wniosek, że funkcja  $r_1$  reprezentuje powierzchnię zniszczenia we wszystkich stanach naprężenia dla  $\eta = 0^\circ$ . Funkcje  $r_1, r_2$  i kąt  $\eta$  przedstawiono na rysunku 1.

Można zauważyć, że przekrój poprzeczny płaszczyzny zniszczenia jest symetryczny, co  $120^\circ$  dla wartości kąta z przedziału  $0^\circ \leq \eta \leq 60^\circ$ . Funkcja  $r_1$  jest określona przez współczynniki  $a_0, a_1, a_2$  dobrane w taki sposób, aby  $f_t, f_{cb}, f_1$  leżały na powierzchni zniszczenia. Wartości tych współczynników otrzymujemy w wyniku rozwiązania poniższych równań:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{F_1}{f_c}(\sigma_1 = f_t, \sigma_2 = \sigma_3 = 0) \\ \frac{F_1}{f_c}(\sigma_1 = 0, \sigma_2 = \sigma_3 = -f_{cb}) \\ \frac{F_1}{f_c}(\sigma_1 = -\sigma_h^a, \sigma_2 = \sigma_3 = -\sigma_h^a - f_1) \end{array} \right\} = \begin{bmatrix} 1 & \xi_t & \xi_t^2 \\ 1 & \xi_{cb} & \xi_{cb}^2 \\ 1 & \xi_1 & \xi_1^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix}, \quad (9)$$

$$\xi_t = \frac{f_t}{3f_c}, \xi_{cb} = -\frac{2f_{cb}}{3f_c}, \xi_1 = -\frac{\sigma_h^a}{f_c} - \frac{2f_1}{3f_c}. \quad (10)$$

Funkcja  $r_2$  jest obliczona po dobraniu wartości współczynników  $b_0, b_1, b_2$ , tak aby spełnione były następujące warunki:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{F_1}{f_c}(\sigma_1 = \sigma_2 = 0, \sigma_3 = -f_c) \\ \frac{F_1}{f_c}(\sigma_1 = \sigma_2 = -\sigma_h^a, \sigma_3 = -\sigma_h^a - f_2) \\ \frac{F_1}{f_c}(\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = 0) \end{array} \right\} = \begin{bmatrix} 1 & \xi_c & \xi_c^2 \\ 1 & \xi_2 & \xi_2^2 \\ 1 & \xi_0 & \xi_0^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{9} \\ 1 & \xi_2 & \xi_2^2 \\ 1 & \xi_0 & \xi_0^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{Bmatrix} \quad (11)$$

$$\xi_c = -\frac{f_c}{3f_c} = -\frac{1}{3}, \xi_2 = -\frac{\sigma_h^a}{f_c} - \frac{f_2}{3f_c} \quad (12)$$

$\xi_0$  jest dodatnim pierwiastkiem równania:

$$r_2(\xi_0) = a_0 + a_1\xi_0 + a_2\xi_0^2 = 0 \Rightarrow \xi_0 = \frac{-a_1 + \sqrt{a_1^2 - 4a_2a_0}}{2a_2}, \quad (13)$$

w którym współczynniki  $a_0, a_1, a_2$  są obliczone według równania (9).

Stosunek  $\frac{r_1}{r_2}$  ograniczono do takiego przedziału, aby powierzchnia zniszczenia była wypukła, czyli  $0,5 < \frac{r_1}{r_2} < 1,25$ . Chociaż górna granica nie jest rozważana, to dla większości materiałów jest ograniczona przy  $\frac{r_1}{r_2} < 1$ . Współczynniki  $a_0, a_1, a_2, b_0, b_1, b_2$  muszą spełniać następujące warunki:

$$a_0 > 0, a_1 \leq 0, a_2 \leq 0 \quad (14)$$

$$b_0 > 0, b_1 \leq 0, b_2 \leq 0. \quad (15)$$

Powierzchnia graniczna jest powierzchnią zamkniętą i zniszczenie wystąpi przy wysokim naprężeniu hydrostatycznym dla  $\xi > \xi_2$ . Wartości  $f_1, f_2$  dobrano na poziomie naprężenia hydrostatycznego  $\sigma_h^a$ . Równanie (13) odpowiada powierzchni granicznej o wierzchołku w punkcie  $\xi = \xi_0$ . Funkcje  $r_1, r_2$  w zależności od  $\xi$  przedstawiono na rysunku 2.

Dolna gałąź krzywej odpowiada wszystkim stanom naprężenia dla wartości kąta  $\eta = 0^\circ$ , a górna gałąź krzywej odpowiada stanom naprężenia dla wartości kąta  $\eta = 60^\circ$ . Materiał ulega miażdżeniu, jeżeli kryterium zniszczenia jest spełnione.

**Złożony stan naprężenia rozciąganie-ściskanie-ściskanie,  $\sigma_1 \geq 0 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$**

W stanie rozciąganie-ściskanie-ściskanie funkcję  $F$  zapisujemy w postaci:

$$F = F_2 = \frac{1}{\sqrt{15}} \left[ (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (16)$$

a  $S$  jest definiowane równaniem:

$$S = S_2 = \left( 1 - \frac{\sigma_1}{f_t} \right) \frac{2p_2(p_2^2 - p_1^2) \cos \eta + p_2(2p_1 - p_2) \left[ 4(p_2^2 - p_1^2) \cos^2 \eta + 5p_1^2 - 4p_1 p_2 \right]^{\frac{1}{2}}}{4(p_2^2 - p_1^2) \cos^2 \eta + (p_2 - 2p_1)^2} \quad (17)$$

w którym  $\cos \eta$  jest opisany równaniem (4), a  $p_1, p_2$  obliczamy ze wzorów:

$$p_1 = a_0 + a_1 \chi + a_2 \chi^2, \quad (18)$$

$$p_2 = b_0 + b_1 \chi + b_2 \chi^2, \quad (19)$$

a nieznane wartości współczynników  $a_0, a_1, a_2, b_0, b_1, b_2$  określono zgodnie z równaniami (9), (11) dla:

$$\chi = \frac{1}{3} (\sigma_2 + \sigma_3). \quad (20)$$

Zarysowanie powstanie w płaszczyźnie prostopadłej do naprężenia głównego  $\sigma_1$ , gdy spełnione jest kryterium zniszczenia. W tym stanie naprężenia może również powstać miażdżenie.

**Złożony stan naprężenia rozciąganie-rozciąganie-ściskanie,  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq 0 \geq \sigma_3$**

W stanie rozciąganie-rozciąganie-ściskanie funkcja  $F$  przyjmuje postać:

$$F = F_3 = \sigma_i \quad i = 1, 2, \quad (21)$$

a  $S$  jest definiowane jako:

$$S = S_3 = \frac{f_t}{f_c} \left( 1 + \frac{\sigma_3}{f_c} \right). \quad (22)$$

Zarysowanie powstanie w płaszczyznach prostopadłych do naprężeń głównych  $\sigma_1, \sigma_2$ , gdy spełnione jest kryterium zniszczenia dla  $i = 1, 2$ . Zarysowanie powstanie tylko w płaszczyźnie prostopadłej do naprężenia głównego  $\sigma_1$ , gdy spełnione jest kryterium zniszczenia dla  $i = 1$ . W tym stanie naprężenia może również powstać miażdżenie.

**Złożony stan naprężenia rozciąganie-rozciąganie-rozciąganie,  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3 \geq 0$**

W stanie rozciąganie-rozciąganie-rozciąganie funkcja  $F$  ma postać:

$$F = F_4 = \sigma_i \quad i = 1, 2, 3 \quad (23)$$

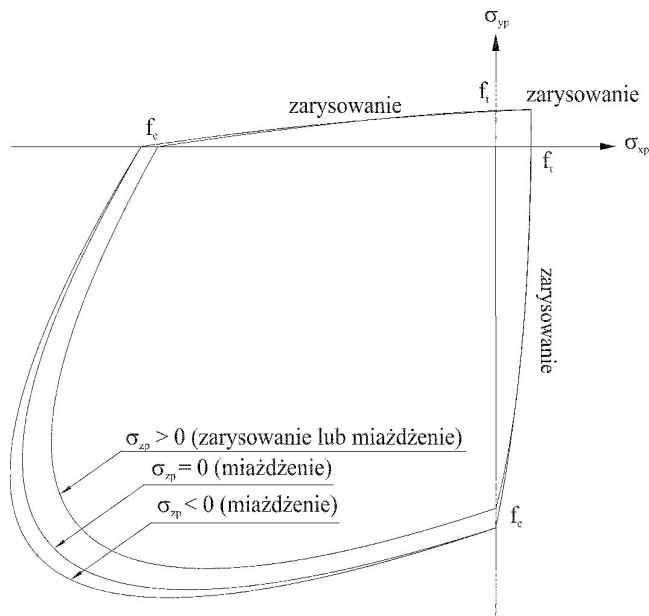
a  $S$  jest definiowane jako:

$$S = S_4 = \frac{f_t}{f_c}. \quad (24)$$

Zarysowanie powstanie w płaszczyznach prostopadłych do naprężeń głównych  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ , gdy spełnione jest kryterium zniszczenia dla  $i = 1, 2, 3$ . Zarysowanie powstanie w płaszczyznach prostopadłych do naprężeń głównych  $\sigma_1, \sigma_2$ , gdy spełnione jest kryterium zniszczenia dla  $i = 1, 2$ . Zarysowanie powstanie tylko w płaszczyźnie prostopadłej do naprężenia głównego  $\sigma_1$ , gdy spełnione jest kryterium zniszczenia dla  $i = 1$ .

Na rysunku 3 przedstawiono trzy powierzchnie dla  $\sigma_{zp}$  nieznacznie większego od zera,  $\sigma_{zp}$  równego zera i  $\sigma_{zp}$  nieznacznie mniejszego od zera, gdy największe niezerowe naprężenia normalne  $\sigma_{xp}, \sigma_{yp}$  są na kierunkach  $x$  i  $y$ . Stan zniszczenia jest funkcją znaku naprężenia normalnego  $\sigma_{zp}$  na kierunku  $z$ .





Rys. 3. Powierzchnia zniszczenia w obszarze naprężeń głównych w dwuosiowym stanie naprężenia

### Prawo ewolucji powierzchni granicznej

Prawo ewolucji powierzchni granicznej opisuje zależność pomiędzy naprężeniami i odkształceniami w jednoosiowym stanie naprężenia zaproponowaną przez Desayi'a i Krishnana w pracy [5]:

$$\sigma_c = \frac{E_c \varepsilon_c}{1 + \left(\frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{cl}}\right)^2}, \quad (25)$$

gdzie:  $\varepsilon_{cl} = \frac{2f_c}{E_c}$  — odkształcenie graniczne odpowiadające wytrzymałości na ściskanie w jednoosiowym stanie naprężenia  $f_c$ ;

$E_c = 57000\sqrt{f_c}$  — współczynnik sprężystości obliczony zgodnie z amerykańską normą [1].

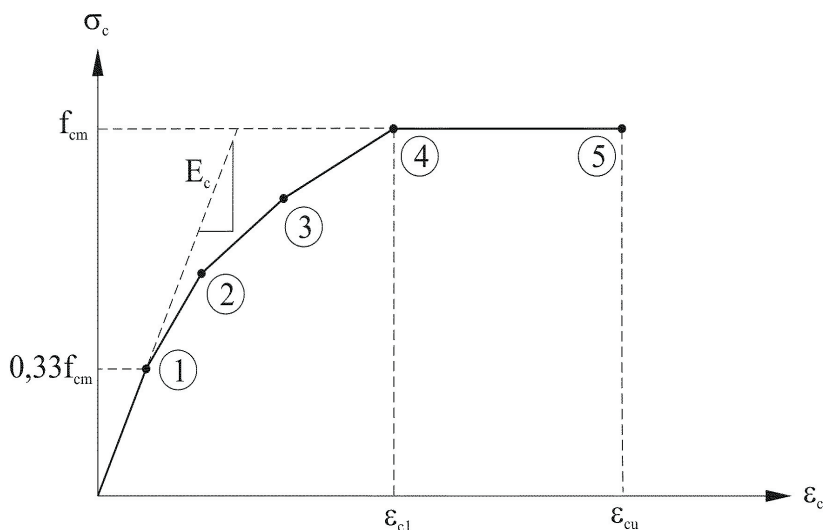
Przyjęto następujące dane materiałowe dla betonu:

—  $f_c = 33,1$  MPa — wytrzymałość na ściskanie w jednoosiowym stanie naprężenia ustalona doświadczalnie przez Buckhouse'a [4],

- $f_t = 7,5\sqrt{f_c}$  — wytrzymałość na rozciąganie w jednoosiowym stanie naprężenia obliczona na podstawie normy [1],
- współczynnik Poissona  $\nu = 0,2$ ,
- współczynnik nośności na ścinanie dla rys otwartych  $\beta_t = 0,3$ ,
- współczynnik nośności na ścinanie dla rys zamkniętych  $\beta_c = 1$ .

Do zależności określających  $E_c$  i  $f_t$  należy podstawiać wartość  $f_c$  w jednostce [funt/cal<sup>2</sup>] oznaczanej również jako [psi].

Na rysunku 4 przedstawiono zależność pomiędzy naprężeniami i odkształceniami dla betonu opisaną równaniem (2).



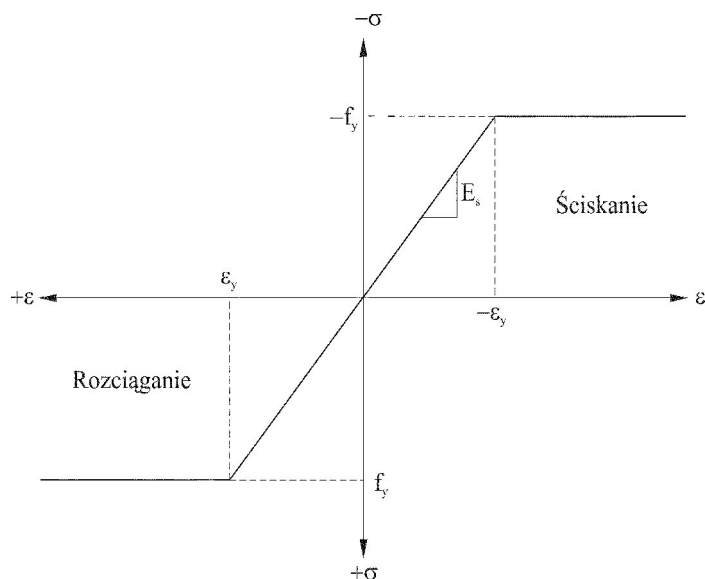
Rys. 4. Uproszczona zależność naprężenie–odkształcenie dla betonu w stanie jednoosiowego ściskania

## 2.2. Stal zbrojeniowa

Dla stali zbrojeniowej przyjęto model materiału sprężysto-idealnie plastycznego, o identycznych właściwościach przy rozciąganiu i ściskaniu, opisywanych przez następujące parametry wytrzymałościowe i odkształceniowe:

- moduł sprężystości  $E_s = 200$  GPa,
- granicę plastyczności  $f_y = 410$  MPa,
- współczynnik Poissona  $\nu = 0,3$ .

Na rysunku 5 przedstawiono schematy zależności pomiędzy naprężeniami i odkształceniami dla stali zbrojeniowej.



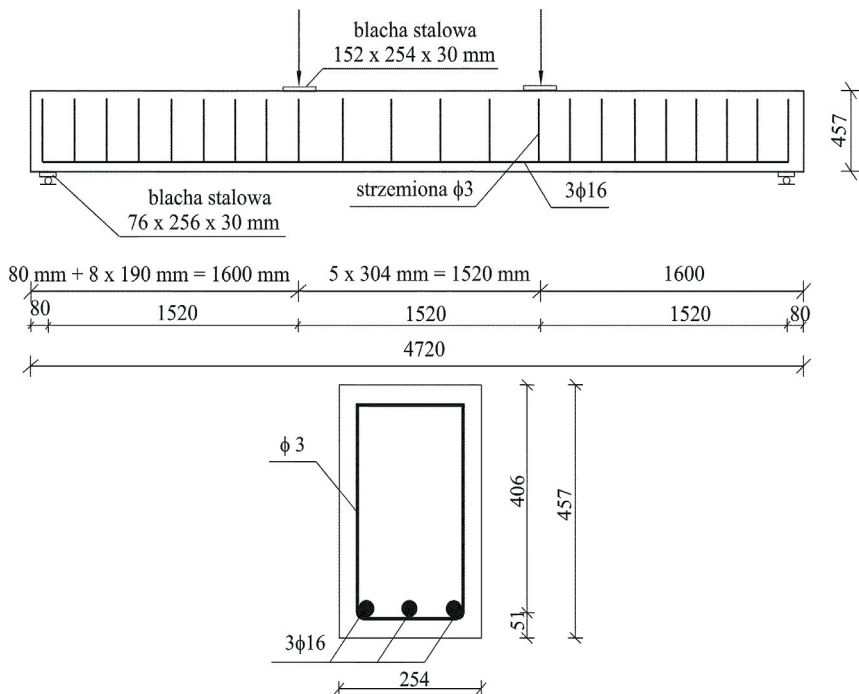
Rys. 5. Wykres naprężenie-odkształcenie dla stali zbrojeniowej

### 3. Model belki żelbetowej

W numerycznym modelu belki żelbetowej zastosowano wymiary elementu oraz właściwości materiałów odpowiadające belce C1 badanej przez Buckhouse'a i opisanej w pracy [4]. Wymiary i przekrój poprzeczny belki wraz z układem zbrojenia i schematem obciążenia przedstawiono na rysunku 6.

Uwzględniając poprzeczną i podłużną symetrię elementu, modelowano 1/4 belki o długości 2360 mm, szerokości 127 mm i wysokości 457 mm.

Do opisu materiału matrycy betonowej i płyt stalowych w punktach przyłożenia obciążenia i na podporach w dyskretyzowanym modelu konstrukcji, zastosowano przestrzenne, prostopadłościenne elementy o ośmiu węzłach w narożach i trzech stopniach swobody w każdym z nich: 3792 elementy dla matrycy betonowej, 48 elementów dla płyty stalowej pod siłą skupioną i 24 elementy dla płyty stalowej nad podporą. Do opisu stali zbrojeniowej zastosowano dwuwęzłowe elementy prętowe z trzema stopniami swobody w każdym z węzłów: po 60 elementów dla prętów zbrojenia głównego i po 17 elementów dla strzemion. Siatkę jednowymiarowych elementów zbrojenia połączono z siatką elementów materiału matrycy betonowej we wspólnych punktach węzłowych elementów betonowych i stali zbrojeniowej. Taki sposób modelowania wyraża naturalną zasadę współpracy betonu i stali zbrojeniowej w elemencie żelbetowym.



Rys. 6. Wymiary, przekrój poprzeczny, układ zbrojenia i schemat obciążenia belki żelbetowej [4]

Warunki brzegowe modelowano w sposób umożliwiający możliwie wierne odzwierciedlenie rzeczywistego zachowania belki doświadczalnej. Wprowadzono warunki brzegowe w dwóch płaszczyznach symetrii belki. Warunki brzegowe na podporach modelowano jako poziome płyty stalowe przekazujące siły węzłowe elementów materiału matrycy betonowej na poprzeczny wałek stalowy umożliwiający obrót belki w płaszczyźnie zginania.

Obciążenie siłą skupioną  $P$  jest przyłożone za pośrednictwem poziomej płyty stalowej. Przyjęto, że rozkład siły w każdym punkcie węzłowym w kierunku poprzecznej osi symetrii tej płyty wynika z rozdziału siły zależnego od funkcji kształtu elementu skończonego. Obciążenia z węzłów płyty stalowej przenoszone są bezpośrednio na węzły elementów materiału matrycy betonowej.

#### 4. Rozwiązanie numeryczne

Nieliniowe zagadnienie statyki w ujęciu metody elementów skończonych wymaga rozwiązania układu algebraicznych równań liniowych opisującego stan równowagi konstrukcji w następującej przyrostowej formie:

$$K_i \Delta u_{i,i+1} = R_{i+1} - F_i, \quad (26)$$

gdzie:  $i, i + 1$  — kroki przyrostów obciążenia;

$F_i = F_{i-1} + \Delta F_{i-1,i}$  — wektor uogólnionych sił węzłowych, odpowiadający stanowi naprężenia w  $i$ -tym kroku obciążenia, a  $\Delta F_{i-1,i}$  — jest wektorem przyrostu uogólnionych sił węzłowych uwzględniającym nieliniowości fizyczne i geometryczne;

$R_{i+1} = R_i + \Delta R_{i,i+1}$  — uogólniony wektor obciążenia zewnętrznego, a  $\Delta R_{i,i+1}$  jest zadany wektorem przyrostu obciążenia zewnętrznego w przedziale  $(i, i + 1)$ ;

$K_i$  — styczna macierz sztywności układu w  $i$ -tym kroku obciążenia, uwzględniająca nieliniowości fizyczne i geometryczne;

$u_{i+1} = u_i + \Delta u_{i,i+1}$  — wektor uogólnionych przemieszczeń, a  $\Delta u_{i,i+1}$  jest poszukiwanym przyrostem wektora uogólnionych przemieszczeń.

Rozwiązanie układu równań metodą elementów skończonych uzyskano przy zastosowaniu metody Newtona-Raphsona ze zmienną wielkością przyrostu obciążenia szczegółowo opisanej w monografiach Bathe'a [3] i Kleibera [9] oraz w pracy Zienkiewicza i Taylora [13].

## 5. Analiza wyników numerycznych

### 5.1. Zachowanie belki żelbetowej do chwili powstania pierwszych rys

W zakresie odkształceń liniowo-sprężystych przed pojawieniem się zarysowania porównano zgodność naprężeń i przemieszczeń w modelu obliczeniowym i belkach badanych doświadczalnie przez Buckhouse'a [4].

Wyznaczono analitycznie naprężenia w betonie, naprężenia w stali zbrojeniowej oraz przemieszczenia pionowe w środku belki pod obciążeniem rysującym  $P_{cr} = 23,58$  kN, przy założeniu Fazy Ia zachowania żelbetowego przekroju zginanego. W tabeli 1 zamieszczono porównanie tych wyników z wynikami obliczeń numerycznych uzyskanych metodą elementów skończonych w chwili powstania pierwszej rysy. W obszarze działania stałego momentu naprężenia w środku rozpiętości belki, odpowiadające zarysowaniu w płaszczyźnie zginania, są równe 3,72 MPa. W pozostałych dwóch płaszczyznach, prostopadłych do płaszczyzny zginania, pierwsze rysy powstały pod większym obciążeniem równym 26,4 kN. Buckhouse zaobserwował w doświadczeniu powstanie pierwszej rysy nieco wcześniej, bo pod obciążeniem 20 kN. Obliczone obciążenie rysujące jest większe od zarejestrowanego doświadczalnie. Różnica pomiędzy obciążeniem rysującym obliczonym i doświadczalnym wynosi ok. 18%.

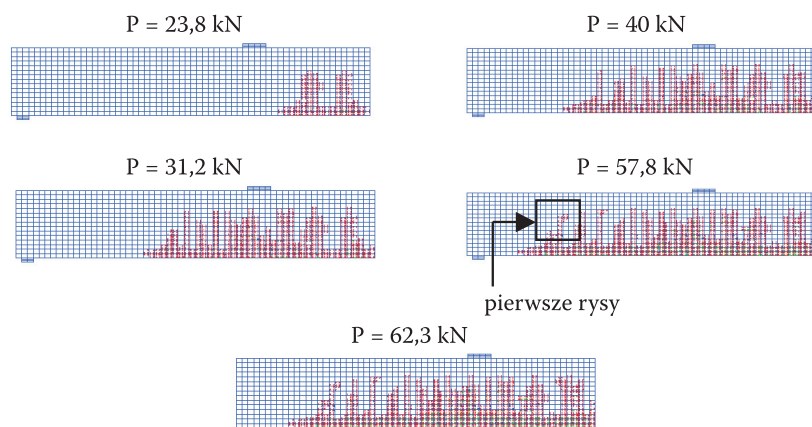
TABELA 1

Porównanie wyników doświadczalnych z wynikami analitycznymi i numerycznymi w chwili powstania pierwszej rysy

Rodzaj analizy	Naprężenie betonu w strefie rozciąganej $\sigma_{ct}$ [MPa]	Naprężenie w stali zbrojeniowej $\sigma_s$ [MPa]	Przemieszczenie pionowe w środku belki $V_d$ [mm]	Siła rysująca $P_c$ [kN]
Wynik doświadczalny Buckhouse'a	–	–	2,70	20
Obliczenia analityczne	3,73	19,65	1,36	23,58
Obliczenia numeryczne MES	3,72	23,03	1,35	23,57

## 5.2. Zachowanie belki żelbetowej po zarysowaniu

Na rysunku 7 zilustrowano schematy zarysowania w początkowych etapach obciążenia.



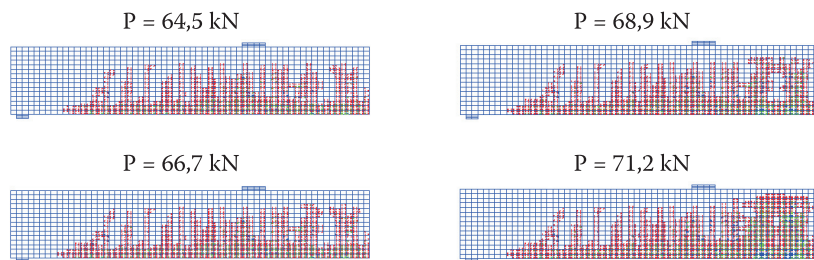
Rys. 7. Schematy zarysowania w początkowych etapach obciążenia

Na początku procesu obciążenia rysy od zginania powstawały w połowie rozpiętości belki. W miarę wzrostu obciążenia, obszar pionowych rys od zginania powiększał się poziomo w kierunku podpory. Przy jeszcze wyższym obciążeniu pojawiały się ukośne rysy od rozciągania i ścinania. Dalsze zwiększanie obciążenia wywoływało powstawanie kolejnych rys od zginania oraz ukośnych od rozciągania i ścinania. W końcowych etapach obciążenia powstały rysy wywołane ściskaniem

w obszarach sąsiadujących z punktami obciążenia. Taki schemat zarysowania jest jakościowo zgodny ze schematem zarejestrowanym w badaniach doświadczalnych Buckhouse'a [4]. W górnej części belki zginanej powstało znaczne zarysowanie. W obszarze działania stałego momentu zginającego rysy rozwijały się do osiągnięcia obciążenia 24,5 kN. Następnie zaobserwowano rozwój zarysowania belki w kierunku podpory. Znaczny wzrost zarysowania belki zaobserwowano w chwili powstania rys ukośnych pod obciążeniem 57,8 kN.

### 5.3. Zachowanie belki żelbetowej w chwili uplastycznienia stali zbrojeniowej

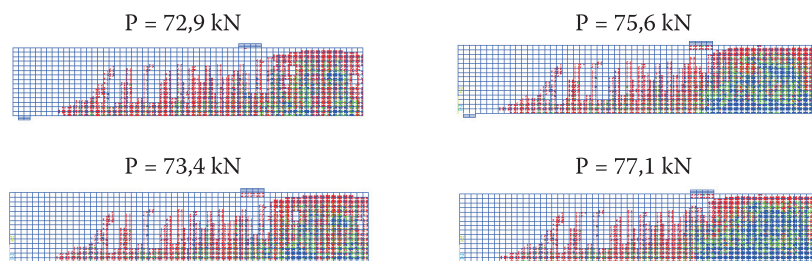
Uplastycznienie stali zbrojeniowej pojawiło się pod działaniem obciążenia 64,8 kN. Zarejestrowano wówczas gwałtowny wzrost przemieszczeń pionowych w środku belki. Na rysunku 8 przedstawiono schematy postępującego zarysowania belki żelbetowej przed uplastycznieniem stali zbrojeniowej i po nim. Pod obciążeniem 68,9 kN znacznie powiększyły się rysy prostopadłe w płaszczyźnie zginania, w obszarze działania prawie stałego momentu zginającego, tj. pomiędzy siłami skupionymi obciążenia zewnętrznego.



Rys. 8. Schematy zarysowania przed uplastycznieniem stali zbrojeniowej i po nim

### 5.4. Zachowanie belki żelbetowej w stanie nośności granicznej

W rozwiązaniu numerycznym stan graniczny nośności zarejestrowano pod obciążeniem  $P = 77,1$  kN. Stan graniczny nośności zinterpretowano w rozwiązaniu numerycznym jako stan osiągnięty dla takiego obciążenia, określonego z dokładnością do zadanego przyrostu obciążenia, dla którego zarejestrowano gwałtowny przyrost przemieszczenia, będącego objawem braku zbieżności rozwiązania numerycznego. Na rysunku 9 przedstawiono schematy zarysowania belki przed zniszczeniem i w chwili zniszczenia. Zaobserwowano spotęgowanie procesów zarysowania polegające na pojawieniu się nowych rys w płaszczyznach dotychczas nie zarysowanych oraz bardzo niewielkie powiększenie zasięgu stref zarysowanych.



Rys. 9. Schematy zarysowania przed zniszczeniem i w chwili zniszczenia

W tabeli 2 przedstawiono porównanie pionowego przemieszczenia w środku belki pod obciążeniem niszczącym określonego na podstawie rozwiązań numerycznego z wynikami doświadczalnymi Buckhouse'a dla belki C1.

TABELA 2

Porównanie wyników doświadczalnych i numerycznych przemieszczeń pionowych w środku belki pod obciążeniem niszczącym

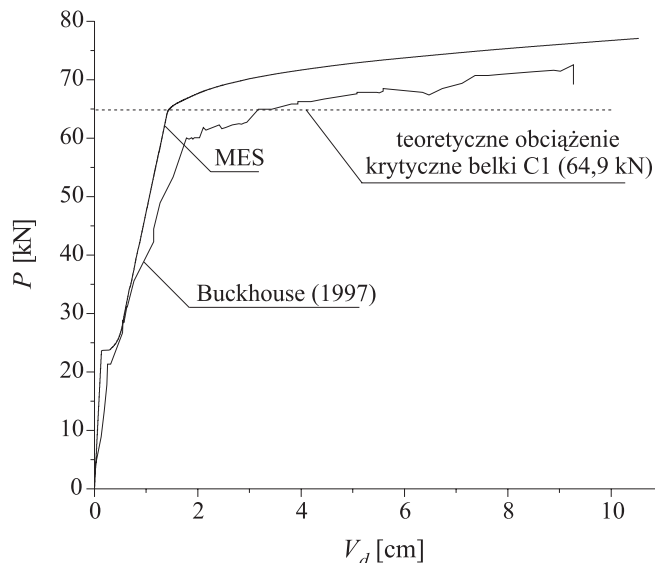
Rodzaj analizy	Obciążenie $P$ [kN]	Przemieszczenie pionowe w środku belki $V_d$ [mm]
Wynik doświadczalny Buckhouse'a	72,6	92,7
Obliczenia numeryczne MES	77,1	100,5

Graniczne przemieszczenie pionowe w środku rozpiętości belki zarejestrowane w rozwiązaniu numerycznym jest około 8% większe od wyniku zarejestrowanego w doświadczeniu. Z kolei obciążenie graniczne zarejestrowane w rozwiązaniu numerycznym jest około 6% większe od doświadczalnego.

Nieliniową zależność obciążenie–przemieszczenie pionowe otrzymaną w analizie numerycznej w porównaniu z krzywą doświadczalną przedstawiono na rysunku 10.

W zakresie liniowego zachowania krzywa obciążenie–przemieszczenie określona numerycznie charakteryzuje się nieco większą sztywnością od krzywej doświadczalnej. Pierwsze obciążenie rysujące w analizie numerycznej wynosi 23,57 kN i jest wyższe o 18% od obciążenia rysującego stwierdzonego w doświadczeniu, równego 20 kN. Po pierwszym zarysowaniu numeryczny model belki ma również większą sztywność niż belka doświadczalna. W numerycznym modelu belki uplastycznienie rozciąganej stali zbrojeniowej sygnalizowane na wykresie obciążenie–przemieszczenie natychmiastowym zmniejszeniem sztywności zaobserwowano przy obciążeniu 64,8 kN. Wyznaczone numerycznie obciążenie graniczne równe 100,5 kN





Rys. 10. Porównanie zależności przemieszczenia pionowego w środku belki od obciążenia

jest wyższe o około 6% od obciążenia granicznego określonego doświadczalnie równego 92,7 kN.

## 6. Zakończenie

### 6.1. Wnioski dotyczące analizy zachowania belek żelbetowych

1. W pracy dokonano oceny efektywności metody elementów skończonych w analizach nieliniowego zachowania belki żelbetowej modelowanej jako przestrzenny element konstrukcyjny bez wprowadzania uproszczeń wynikających z założeń technicznej teorii konstrukcji belkowych.
2. Analizowano belkę żelbetową, dla której dostępne były wyniki badań doświadczalnych. Zarejestrowano początkowe zarysowanie betonu, uplastycznienie stali i nośność graniczną belki oraz dokonano porównania wyników obliczeń numerycznych z wynikami doświadczalnymi.
3. Zachowanie numerycznego modelu belki żelbetowej opisywane zależnością obciążenie–przemieszczenie w środku rozpiętości wskazuje na dobrą zgodność z wynikami doświadczalnymi w całym zakresie obciążenia.
4. Obciążenie graniczne uzyskane w obliczeniach numerycznych było wyższe od wyniku doświadczalnego o ok. 6%.
5. Numeryczny model belki charakteryzował się nieznacznie większą sztywnością niż belki doświadczalnej. Większa sztywność numerycznego modelu belki

może być spowodowana kilkoma czynnikami, m.in.: (1) homogenicznością modelu konstytutywnego betonu nie uwzględniającego wszystkich efektów fizycznych związanych z procesami mikrozarzysowania i rozwoju dyslokacji w płaszczyznach styku ziaren kruszywa i zaprawy, (2) założeniem idealnej przyczepności pomiędzy betonem i stalą zbrojeniową w modelu numerycznym belki wyłącznie w węzłach wspólnych siatki podziału elementów materiału matrycy betonowej i stali zbrojeniowej.

6. Schematy zarzysowania uzyskane w rozwiązaniu numerycznym jakościowo dobrze odpowiadały opisom mechanizmu zniszczenia w belkach doświadczalnych.

## **6.2. Wnioski dotyczące modelowania belek żelbetowych metodą elementów skończonych**

1. W modelowaniu belek żelbetowych powinny być stosowane uproszczenia zapewniające efektywność uzyskania rozwiązania: (1) wykorzystanie symetrii elementów konstrukcyjnych, (2) lokalizowanie elementów skończonych stali zbrojeniowej zgodnie z siatką podziału elementów skończonych materiału matrycy betonowej.
2. Modelowanie płyt stalowych w miejscach podparcia i przyłożenia obciążeń skupionych w sposób odzwierciedlający warunki rzeczywiste jest podstawowym czynnikiem zapewniającym zgodność wyników numerycznych z wynikami doświadczalnymi.
3. Modele numeryczne elementów żelbetowych uwzględniające fizyczne nieliniowości materiałów są podatne na numeryczne niestabilności rozwiązania.
4. Rząd rozwiązania odpowiada analizie dużych odkształceń. W wyniku uwzględnienia nieliniowych efektów geometrycznych w belkach żelbetowych otrzymano lepszą zgodność wyników numerycznych z doświadczalnymi, szczególnie wyraźnie dostrzegalną w fazie po uplastycznieniu stali zbrojeniowej.
5. W początkowym etapie modelowania należy ustalić sposób podziału na elementy skończone i zbadać zbieżność rozwiązania. W analizach nieliniowego zachowania numerycznych modeli konstrukcji żelbetowych zbyt drobna siatka może powodować numeryczne niestabilności. Z drugiej jednak strony przyjęcie zbyt dużej siatki może skutkować uzyskaniem niedokładnych wyników. W betonie, w chwili powstania rysy lub grupy rys ich długość w wielu przypadkach jest większa od maksymalnego wymiaru kruszywa, na co zwrócono uwagę w pracy Shaha i in. [11]. W związku z powyższym wymiary elementu skończonego materiału matrycy betonowej powinny być co najmniej dwa, trzy razy większe od maksymalnego wymiaru ziarna kruszywa w celu uzyskania poprawnego i realnego modelu zarzysowania rozmytego. Fakt ten został potwierdzony w pracach Barzegara i in. [2], Isenbergga [7] oraz Shaha i in. [11].

W belkach badanych doświadczalnie maksymalny wymiar ziarna kruszywa wynosił 24 mm, podczas gdy minimalne wymiary elementu skończonego materiału matrycy betonowej przyjęto w numerycznym modelu belki jako równe  $38 \times 32 \times 30$  mm.

6. W analizie nieliniowego zachowania belek żelbetowych należy przyjąć współczynnik nośności na ścinanie. Dla rys zamkniętych wartość przyjętego współczynnika powinna być nieznacznie mniejsza lub równa 1, a dla rys otwartych powinna być dobrana z przedziału od 0,05 do 0,25, co ustalono w pracach Barzegara i in. [2], Huysę'a i in. [6], Isenberga [7], Kachlakeva i in. [8] oraz Najjara i in. [10]. W wyniku prób numerycznych zastosowano wartość 0,3. Mniejsze wartości współczynnika powodowały problemy ze zbieżnością rozwiązania dla niskich poziomów obciążenia.
7. W obliczeniach do rozwiązywania zagadnień nieliniowych wykorzystano procedurę numeryczną Newtona-Raphsona. Trudności w otrzymaniu rozwiązania zbieżnego obserwowano przy sterowaniu obciążeniem i założeniu zbyt dużych przyrostów obciążenia w zakresie obciążeń po zarysowaniu.
8. W analizie nieliniowego zachowania modelu konstrukcji żelbetowej tolerancje w kryterium zbieżności powinny być określone z należytą uwagą. Wartości tolerancji w kryterium obciążenia i przemieszczenia powinny być zwiększane w zależności od etapu obciążenia i zakresu fazy niesprężystego odkształcenia w celu uzyskania zbieżności rozwiązania.
9. W analizie nieliniowego zachowania belki żelbetowej, obciążenie całkowite przyłożone w modelu powinno być podzielone na określoną liczbę małych przyrostów obciążenia, szczególnie w najbardziej krytycznych fazach pracy belki żelbetowej, np. takich jak powstawanie zarysowania betonu, pojawienie się uplastycznienia stali zbrojeniowej, osiągnięcie granicznej nośności belki żelbetowej. Zastosowanie odpowiedniej, zmiennej wartości przyrostu obciążenia w poszczególnych fazach pracy belki zapewni zbieżność rozwiązania i umożliwi skrócenie czasu obliczeń numerycznych.

Artykuł wpłynął do redakcji 5.03.2007 r. Zweryfikowaną wersję po recenzji otrzymano w maju 2007 r.

#### LITERATURA

- [1] ACI 318-99, *Building Code Requirements for Reinforced Concrete*, American Concrete Institute, Farmington Hills, Michigan, 1999.
- [2] F. BARZEGAR, S. MADDIPUDI, *Three-Dimensional Modeling of Concrete Structures. I: Plain Concrete*. Journal of Structural Engineering, 123(10), 1997, 1339-1346.
- [3] K. J. BATHE, *Finite Element Procedures*, Prentice-Hall, Inc., Upper Saddle River, New Jersey, 1996.
- [4] E. R. BUCKHOUSE, *External Flexural Reinforcement of Existing Reinforced Concrete Beams Using Bolted Steel Channels*, Master's Thesis, Marquette University, Milwaukee, Wisconsin, 1997.

- 
- [5] P. DESAYI, S. KRISHNAN, *Equation for the Stress-Strain Curve of Concrete*, Journal of the American Concrete Institute, 61, March 1964, 345-350.
- [6] L. HUYSE, Y. HEMMATY, L. VANDEWALLE, *Finite Element Modeling of Fiber Reinforced Concrete Beams*, Proceedings of the ANSYS Conference, vol. 2, Pittsburgh, Pennsylvania, May 1994.
- [7] J. ISENBERG, *Finite Element Analysis of Reinforced Concrete Structures II*, ASCE, New York, 1993.
- [8] D. I. KACHLAKEV, T. MILLER, S. YIM, K. CHANSAWAT, T. POTSIUK, *Finite Element Modeling of Reinforced Concrete Structures Strengthened with FRP Laminates*, California Polytechnic State University, May, 2001.
- [9] M. KLEIBER, *Metoda elementów skończonych w nieliniowej mechanice kontinuum*, Wyd. PAN, Warszawa-Poznań, 1985.
- [10] S. NAJJAR, K. PILAKOUTAS, P. WALDRAN, *Finite Element Analysis of GFRP Reinforced Concrete Beams*, Proceedings of the Third International Symposium, Sapporo, Japan, 2, 1997, 519-526.
- [11] S. P. SHAH, S. E. SWARTZ, C. OUYANG, *Fracture Mechanics of Concrete*, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1995.
- [12] K. J. WILLAM, E. P. WARNKE, *Constitutive Model for the Triaxial Behavior of Concrete*. Proceedings, International Association for Bridge and Structural Engineering, vol. 19, ISMES, Bergamo, Italy, 1975.
- [13] O. C. ZIENKIEWICZ, R. L. TAYLOR, *The Finite Element Method. Fifth Edition*, Butterworth Heinemann, 2000.

P. SMARZEWSKI, A. STOLARSKI

### Modelling of behaviour of inelastic reinforced concrete beam

**Abstract.** Numerical modelling of the reinforced concrete beam is discussed in this paper. The comparison of the numerical and experimental results as well as theoretical solutions, were presented. The compared results indicate correctness of the constitutive models of the structural materials: concrete and reinforcing steel and effectiveness of the solution method.

**Keywords:** finite elements method, reinforced concrete structures, beams

**Universal Decimal Classification:** 624.072