



Dynamika grubościennej kulistej osłony obciążonej wewnętrznym ciśnieniem zmiennym w czasie

EDWARD WŁODARCZYK, MARIUSZ ZIELENKIEWICZ*

Wojskowa Akademia Techniczna, Wydział Mechatroniki,
00-908 Warszawa, ul. S. Kaliskiego 2

*Wojskowy Instytut Techniczny Uzbrojenia, Zakład Uzbrojenia Artyleryjskiego,
05-220 Zielonka, ul. Prymasa Stefana Wyszyńskiego 7

Streszczenie. Zbadano problem radialnych drgań grubościennej osłony kulistej, obciążonej udarowo wewnętrznym ciśnieniem impulsowym. Założono, że materiał osłony jest sprężysto nieściśliwy. Przy takim uproszczeniu uzyskano zamknięte analityczne rozwiązanie zagadnienia dynamiki osłony kulistej w ramach liniowej teorii sprężystości. Okazuje się, że osłona kulista wykonana z materiału nieściśliwego, podobnie jak rura [5], obciążona wewnątrz udarowo, zachowuje się jak układ o jednym stopniu swobody. Częstotliwość kołowa drgań własnych osłony kulistej jest kilkakrotnie większa od częstotliwości rury o tej samej średnicy wewnętrznej i grubości ścianki.

Przedstawione rozwiązanie można wykorzystać do szacowania wytrzymałości kulistych osłon balistycznych stosowanych przy wybuchowym napędzaniu cienkościennych pierścieni używanych w badaniach dynamicznych właściwości materiałów. Poza tym przedstawione wyniki badań dają dodatkowy wkład wiedzy do teorii drgań technicznych układów ciągłych.

Słowa kluczowe: dynamika kulistej osłony grubościennej, drgania wymuszone, wewnętrzne ciśnienie impulsowe, materiał osłony nieściśliwy

Symbole UKD: 623.45

1. Wprowadzenie

Jednym z doświadczalnych sposobów badania właściwości mechanicznych materiałów obciążonych dynamicznie jest metoda pierścieniowa [1, 2]. Metoda ta polega na rejestracji radialnego ruchu lub promieniowej prędkości rozszerzania się cienkiego pierścienia, wykonanego z badanego materiału i napędzanego produkta-

mi detonacji ładunku wysokoenergetycznego materiału wybuchowego (MW) lub silnym, impulsowym polem elektromagnetycznym.

W celu wyeliminowania w procesie napędzania pierścienia wpływu zaburzeń pochodzących od produktów detonacji MW, używa się grubościennych osłon metalowych o symetriach: kulistej lub cylindrycznej. Pierścień nakłada się na zewnętrzną powierzchnię tych osłon, których wewnątrz wypełnione jest całkowicie lub częściowo MW. Po detonacji MW w ścianie obudowy propaguje się uderzeniowa fala ściskania, która odbija się od powierzchni kontaktowej z pierścieniem i powoduje skokowe jego napędzenie. Oddziaływanie produktów spalania materiałów wybuchowych na obudowy o różnej geometrii występuje również w pociskach artyleryjskich, granatach i bombach oraz w lufach urządzeń miotających [3, 4]. Zagadnienia te są przedmiotem wielu badań doświadczalnych i teoretycznych.

W pracy [5] zbadano analitycznie zagadnienie radialnych drgań grubościennej rury wymuszonych wewnętrznym ciśnieniem nagle wytworzonym i równomiernie rozłożonym wzdłuż jej długości. Materiał rury modelowano liniowo-sprężystym ośrodkiem nieściśliwym. Dla takiego materiału uzyskano zamknięte analityczne rozwiązanie zagadnienia dynamiki grubościennej rury. Okazuje się, że rura wykonana z materiału nieściśliwego, obciążona wewnątrz udarowo, zachowuje się jak układ o jednym stopniu swobody. Na przykład rura obciążona nagle stałym wewnętrznym ciśnieniem drga ze stałą częstotliwością kołową ω_0 wokół stanu określonego przez statyczne rozwiązanie zagadnienia Lamego.

W niniejszej pracy rozpatrzmy analogiczne zagadnienie dla grubościennej osłony kulistej. Porównanie analitycznych wyników, określających dynamiczne stany obydwóch obiektów ma istotne znaczenie praktyczne i stanowi dodatkowy wkład wiedzy do teorii drgań obiektów ciągłych.

2. Sformułowanie problemu

Określimy dynamiczne stany: radialnego przemieszczenia, naprężenia i odkształcenia w grubościennej osłonie kulistej, obciążonej udarowo wewnętrznym ciśnieniem $p(t)$.

Oznaczmy przez a i b promienie: wewnętrzny i zewnętrzny osłony. Zagadnienie będziemy rozwiązywać w sferycznym układzie współrzędnych Lagrange'a r, ϕ, θ . Ze względu na kulistą symetrię problem jest przestrzennie jednowymiarowy. W związku z tym stany naprężenia i odkształcenia w materiale osłony reprezentowane są przez następujące składowe:

- σ_r — naprężenie promieniowe (radialne),
- $\sigma_\phi = \sigma_\theta$ — naprężenia obwodowe (styczne),
- ε_r — odkształcenie promieniowe (radialne),
- $\varepsilon_\phi = \varepsilon_\theta$ — odkształcenia obwodowe (styczne).

Pozostałe składowe tensorów naprężenia i odkształcenia w tym układzie współrzędnych są równe zeru.

Problem rozwiązujemy w ramach liniowej teorii sprężystości, zgodnie z którą mamy następujące relacje [6]:

$$\varepsilon_r(r, t) = \frac{\partial u(r, t)}{\partial r}, \quad \varepsilon_\varphi(r, t) = \varepsilon_\theta(r, t) = \frac{u(r, t)}{r}, \quad (2.1)$$

$$\sigma_r(r, t) - \sigma_\varphi(r, t) = 2\mu(\varepsilon_r - \varepsilon_\varphi), \quad (2.2)$$

gdzie u i r są odpowiednio przemieszczeniem radialnym elementu osłony i współrzędną Lagrange'a, μ oznacza moduł Kirchhoffa:

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}. \quad (2.3)$$

Z kolei symbole E i ν oznaczają odpowiednio moduł Younga i liczbę Poissona.

Z prawa zachowania masy, zapisanego dla elementu osłony we współrzędnej Lagrange'a r dla symetrii kulistej, otrzymuje się:

$$(r+u)^2 \left(1 + \frac{\partial u}{\partial r}\right) = \frac{\rho_0}{\rho} r^2, \quad (2.4)$$

gdzie symbole ρ_0 i ρ oznaczają gęstości materiału osłony: początkową i bieżącą.

Dla umiarkowanych ciśnień nieprzekraczających kilku tysięcy MPa, w przypadku metali można przyjąć, że $\rho \approx \rho_0 = \text{const}$. Po uwzględnieniu tego założenia, dla małych odkształceń, ($\varepsilon_\varphi \varepsilon_r = \frac{u}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \approx 0$, $\varepsilon_\varphi^2 = \left(\frac{u}{r}\right)^2 \approx 0$) równanie (2.4) można zredukować do postaci:

$$\frac{\partial u}{\partial r} + 2\frac{u}{r} = 0. \quad (2.5)$$

Z dynamicznej równowagi elementu osłony, zapisanej we współrzędnej Lagrange'a r , po przekształceniach otrzymuje się ogólne równanie ruchu tego elementu w następującej postaci:

$$\rho_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \left(1 + \frac{u}{r}\right)^2 \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + 2\left(1 + \frac{u}{r}\right) \left(1 + \frac{\partial u}{\partial r}\right) \frac{\sigma_r - \sigma_\varphi}{r}. \quad (2.6)$$

Dla odkształceń wyrażonych wzorami (2.1), po pominięciu małych wyższego rzędu, równanie (2.6) można zredukować do postaci:

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + 2 \frac{\sigma_r - \sigma_\varphi}{r} = \rho_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \quad (2.7)$$

Zlinearyzowany układ równań (2.5) i (2.7) rozwiążemy dla następujących warunków granicznych:

$$\sigma_r(a, t) = -p(t) \quad \text{dla } r = a \quad (2.8)$$

$$\sigma_r(b, t) \equiv 0 \quad \text{dla } r = b \quad (2.9)$$

$$\sigma_r(a, t) = -p(t) \quad \text{i} \quad v(r, 0) = \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} \equiv 0. \quad (2.10)$$

Obecnie przejdziemy do konstrukcji analitycznego rozwiązania tak sformułowanego problemu.

3. Analityczne rozwiązanie problemu

Rozwiązanie ogólne równania (2.5) ma postać:

$$u(r, t) = \frac{C(t)}{r^2}, \quad (3.1)$$

gdzie $C(t)$ jest ciągłą, dwa razy różniczkowalną funkcją czasu.

Z wyrażeń (2.1), (2.2) i (3.1) wynika, że:

$$\varepsilon_r(r, t) = -2 \frac{C(t)}{r^3}, \quad \varepsilon_\varphi(r, t) = \varepsilon_\theta(r, t) = \frac{C(t)}{r^3}, \quad (3.2)$$

$$\sigma_r(r, t) - \sigma_\varphi(r, t) = -6\mu \frac{C(t)}{r^3}. \quad (3.3)$$

Po podstawieniu wyrażeń (3.1) i (3.3) do równania ruchu (2.7) i scałkowaniu względem r , otrzymuje się:

$$\sigma_r(r, t) = -4\mu \frac{C(t)}{r^3} - \rho_0 \frac{\ddot{C}(t)}{r} + A(t), \quad (3.4)$$

gdzie $\ddot{C}(t) = d^2C(t)/dt^2$, $A(t)$ jest dowolną funkcją czasu. Z warunku brzegowego (2.9) i rozwiązania (3.4) mamy:

$$A(t) = 4\mu \frac{C(t)}{b^3} + \rho_0 \frac{\ddot{C}(t)}{b}. \quad (3.5)$$

Ostatecznie, po podstawieniu (3.5) do wyrażenia (3.4) i prostych przekształceniach, naprężenie radialne $\sigma_r(r, t)$ można określić następującym wzorem:

$$\sigma_r(r, t) = \rho_0 \frac{r-b}{br} \ddot{C}(t) + 4\mu \frac{r^3 - b^3}{b^3 r^3} C(t). \quad (3.6)$$

Z kolei, po podstawieniu wyrażenia (3.6) do warunku brzegowego (2.8) i przekształceniach, otrzymuje się:

$$\ddot{C}(t) + 4 \frac{\mu}{\rho_0} \frac{b^2 + ab + a^2}{a^2 b^2} C(t) = \frac{ab}{\rho_0 (b-a)} p(t). \quad (3.7)$$

Wprowadzimy następujące oznaczenia:

$$c = \sqrt{\frac{\mu}{\rho_0}}, \quad \beta = \frac{b}{a}, \quad (3.8)$$

$$\omega_0^2 = 4 \frac{\mu}{\rho_0} \frac{b^2 + ab + a^2}{a^2 b^2} = 4 \left(\frac{c}{a}\right)^2 \frac{\beta^2 + \beta + 1}{\beta^2},$$

gdzie c oznacza prędkość propagacji fali poprzecznej w materiale osłony, a ω_0 jest kołową częstotliwością drgań własnych osłony. Okazuje się, że podobnie jak rura nieściśliwa [5], grubościenna osłona kulista charakteryzuje się jedną częstotliwością drgań własnych i zachowuje się jak układ o jednym stopniu swobody.

Funkcja $C(t)$, po uwzględnieniu wyrażeń (3.8) i (2.10) określona jest następującym równaniem:

$$\ddot{C}(t) + \omega_0^2 C(t) = \frac{a}{\rho_0} \frac{\beta}{\beta-1} p(t), \quad (3.9)$$

z jednorodnymi warunkami początkowymi:

$$C(0) = 0 \quad \text{i} \quad \dot{C}(t) = \frac{dC(t)}{dt} \Big|_{t=0} = 0. \quad (3.10)$$

Rozwiązanie równania (3.9) z warunkami początkowymi (3.10) ma postać [7]:

$$C(t) = \frac{a}{\rho_0 \omega_0} \frac{\beta}{\beta - 1} \int_0^t p(\tau) \sin \omega_0 (t - \tau) d\tau. \quad (3.11)$$

Z kolei z równania (3.9) wynika, że:

$$\ddot{C}(t) = \frac{a}{\rho_0} \frac{\beta}{\beta - 1} p(t) - \omega_0^2 C(t). \quad (3.12)$$

Jak widać, dla zadanego ciśnienia $p(t)$, za pomocą całki (3.11) jednoznacznie określa się funkcję $C(t)$, która determinuje wszystkie parametry problemu, a mianowicie:

$$u(r, t) = \frac{C(t)}{r^2}, \quad (3.13)$$

$$v(r, t) = \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\dot{C}(t)}{r^2}, \quad \dot{C}(t) = \frac{dC(t)}{dt}, \quad (3.14)$$

$$\varepsilon_r(r, t) = \frac{\partial u}{\partial r} = -2 \frac{C(t)}{r^3}, \quad (3.15)$$

$$\varepsilon_\varphi(r, t) = \varepsilon_\theta(r, t) = \frac{u}{r} = \frac{C(t)}{r^3}, \quad (3.16)$$

$$\sigma_r(r, t) = \frac{1}{\beta - 1} \left(1 - \frac{b}{r} \right) p(t) + 4 \frac{\mu}{b^3} \left(1 - \left(\frac{b}{r} \right)^3 - \frac{b^2 + ab + a^2}{a^2} \left(1 - \frac{b}{r} \right) \right) C(t), \quad (3.17)$$

$$\sigma_\varphi(r, t) = \frac{1}{\beta - 1} \left(1 - \frac{b}{r} \right) p(t) + 2 \frac{\mu}{b^3} \left(2 + \left(\frac{b}{r} \right)^3 - 2 \frac{b^2 + ab + a^2}{a^2} \left(1 - \frac{b}{r} \right) \right) C(t). \quad (3.18)$$

Jeśli wewnątrz osłony wytworzone jest ciśnienie w sposób statyczny, tj. $p(t) = p_s = \text{const}$, to funkcja $C(t) = C_s = \text{const}$. Wówczas $\ddot{C}(t) = 0$ i z relacji (3.6) otrzymuje się:

$$\sigma_r(r, t) = \sigma_{rs}(r) = -4 \frac{\mu}{b^3} \frac{b^3 - r^3}{b^3 + r^3} C_s. \quad (3.19)$$

Z kolei z warunku brzegowego $\sigma_{rs}(a) = -p_s$ i ze wzoru (3.19) wynika, że:

$$C_s = \frac{1}{4} \frac{p_s}{\mu} \frac{a^3 b^3}{b^3 - a^3} = \frac{1}{4} \frac{p_s}{\mu} \frac{\beta^3}{\beta^3 - 1} a^3. \quad (3.20)$$

Dalej, po podstawieniu do wzorów (3.13), (3.15)-(3.18) w miejsce funkcji $C(t)$ wielkości C_s , otrzymuje się wartości parametrów problemu dla obciążenia statycznego.

4. Dynamiczny stan parametrów osłony kulistej obciążonej w sposób nagły wewnętrznym ciśnieniem $p = \text{const}$.

W celu uproszczenia analizy ilościowej poszczególnych parametrów: przemieszczenia, prędkości, odkształceń i naprężeń, wprowadzimy następujące wielkości bezwymiarowe:

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \frac{r}{a}, & \eta &= \frac{t}{T_0}, & \beta &= \frac{b}{a}, & U &= \frac{u}{a}, & V &= \frac{v}{c}, \\ \bar{C} &= \frac{C}{a^3}, & F &= \frac{\mu}{p}, & S_r &= \frac{\sigma_r}{p}, & S_\varphi &= \frac{\sigma_\varphi}{p}, & U_s &= \frac{u_s}{a}, \\ \bar{C}_s &= \frac{C_s}{a^3}, & S_{rs} &= \frac{\sigma_{rs}}{p_s}, & S_{\varphi s} &= \frac{\sigma_{\varphi s}}{p_s}, & \bar{\omega}_0 &= \frac{\omega_0}{(c/a)}, \end{aligned} \right\} \quad (4.1)$$

gdzie T_0 jest okresem drgań własnych osłony:

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}. \quad (4.2)$$

Po podstawieniu $p(\tau) = p = \text{const}$ do wyrażenia (3.11), scałkowaniu w granicach $0 \div t$ i wykorzystaniu wielkości bezwymiarowych (4.1) otrzymuje się:

$$\begin{aligned} \bar{C}(t) &= \frac{1}{4F} \frac{\beta^3}{\beta^3 - 1} (1 - \cos 2\pi\eta) = \bar{C}_s (1 - \cos 2\pi\eta), \\ \bar{C}_s &= \frac{1}{4F} \frac{\beta^3}{\beta^3 - 1}. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Pozostałe parametry określające mechaniczny stan osłony, zgodnie z wyrażeniami (3.13)-(3.19) i (4.3), można wyrazić następującymi wzorami:

— dla obciążenia dynamicznego:

$$U(\xi, \eta) = \frac{\bar{C}_s}{\xi^2} (1 - \cos 2\pi\eta), \quad (4.4)$$

$$V(\xi, \eta) = \frac{1}{2\sqrt{3}F} \frac{\beta^2 \sqrt{\beta^2 + \beta + 1}}{\beta^3 - 1} \frac{1}{\xi^2} \sin 2\pi\eta, \quad (4.5)$$

$$\varepsilon_\varphi(\xi, \eta) = -\frac{1}{2} \varepsilon_r(\xi, \eta) = \frac{\bar{C}_s}{\xi^3} (1 - \cos 2\pi\eta), \quad (4.6)$$

$$S_r(\xi, \eta) = -\frac{1}{\beta^3 - 1} \left(\left(\frac{\beta}{\xi} \right)^3 - 1 \right) + A_r(\xi) \cos 2\pi\eta, \quad (4.7)$$

$$A_r(\xi) = \frac{1}{\beta^3 - 1} \left(\left(\frac{\beta}{\xi} \right)^3 - (\beta^2 + \beta + 1) \left(\frac{\beta}{\xi} - 1 \right) - 1 \right),$$

$$S_\varphi(\xi, \eta) = \frac{1}{2(\beta^3 - 1)} \left(2 + \left(\frac{\beta}{\xi} \right)^3 \right) - A_\varphi(\xi) \cos 2\pi\eta, \quad (4.8)$$

$$A_\varphi(\xi) = \frac{1}{2(\beta^3 - 1)} \left(\left(\frac{\beta}{\xi} \right)^3 + 2(\beta^2 + \beta + 1) \left(\frac{\beta}{\xi} - 1 \right) + 2 \right),$$

$$\bar{\omega}_0 = 2 \frac{\sqrt{\beta^2 + \beta + 1}}{\beta}; \quad (4.9)$$

— dla obciążenia statycznego:

$$U_s(\xi) = \frac{1}{4F} \frac{\beta^3}{\beta^3 - 1} \frac{1}{\xi^2} = \frac{\bar{C}_s}{\xi^2}, \quad (4.10)$$

$$\varepsilon_{\varphi s}(\xi) = -\frac{1}{2} \varepsilon_{rs}(\xi) = \frac{\bar{C}_s}{\xi^3}, \quad (4.11)$$

$$S_{rs}(\xi) = -\frac{1}{\beta^3 - 1} \left(\left(\frac{\beta}{\xi} \right)^3 - 1 \right), \quad (4.12)$$

$$S_{\varphi s}(\xi) = \frac{1}{2(\beta^3 - 1)} \left(2 + \left(\frac{\beta}{\xi} \right)^3 \right). \quad (4.13)$$

W celu porównania wyników przytoczymy analogiczne zależności uzyskane dla osłony cylindrycznej [5]:

— dla obciążenia dynamicznego:

$$C_s = \frac{a^2 b^2}{b^2 - a^2} \frac{p}{2\mu}, \quad \bar{C}_s = \frac{C}{a^2} = \frac{1}{2F} \frac{\beta^2}{\beta^2 - 1}, \quad (4.14)$$

$$U(\xi, \eta) = \frac{1}{2F} \frac{\beta^2}{\beta^2 - 1} \frac{1}{\xi} (1 - \cos 2\pi\eta) = \frac{\bar{C}_s}{\xi} (1 - \cos 2\pi\eta), \quad (4.15)$$

$$V(\xi, \eta) = \frac{1}{F} \frac{\beta^2}{\beta^2 - 1} \sqrt{\frac{\beta^2 - 1}{2 \ln \beta}} \frac{1}{\xi} \sin 2\pi\eta, \quad (4.16)$$

$$\varepsilon_\varphi(\xi, \eta) = -\varepsilon_r(\xi, \eta) = \frac{\bar{C}_s}{\xi^2} (1 - \cos 2\pi\eta), \quad (4.17)$$

$$S_r(\xi, \eta) = -\frac{1}{\beta^2 - 1} \left(\left(\frac{\beta}{\xi} \right)^2 - 1 \right) + A_r(\xi) \cos 2\pi\eta, \quad (4.18)$$

$$A_r(\xi) = \frac{1}{\beta^2 - 1} \left(\left(\frac{\beta}{\xi} \right)^2 - 1 \right) - \frac{\ln(\beta/\xi)}{\ln \beta},$$

$$S_\varphi(\xi, \eta) = \frac{1}{\beta^2 - 1} \left(\left(\frac{\beta}{\xi} \right)^2 + 1 \right) - A_\varphi(\xi) \cos 2\pi\eta, \quad (4.19)$$

$$A_\varphi(\xi) = \frac{1}{\beta^2 - 1} \left(\left(\frac{\beta}{\xi} \right)^2 + 1 \right) + \frac{\ln(\beta/\xi)}{\ln \beta},$$

$$\bar{\omega}_0 = \sqrt{\frac{2(\beta^2 - 1)}{\beta^2 \ln \beta}}; \quad (4.20)$$

— dla obciążenia statycznego:

$$U_s(\xi) = \frac{1}{2F} \frac{\beta^2}{\beta^2 - 1} \frac{1}{\xi} = \frac{\bar{C}_s}{\xi}, \quad (4.21)$$

$$\varepsilon_{\varphi s}(\xi) = -\varepsilon_{rs}(\xi) = \frac{\bar{C}_s}{\xi^2}, \quad (4.22)$$

$$S_{rs}(\xi) = -\frac{1}{\beta^2 - 1} \left(\left(\frac{\beta}{\xi} \right)^2 - 1 \right), \quad (4.23)$$

$$S_{\varphi s}(\xi) = \frac{1}{\beta^2 - 1} \left(\left(\frac{\beta}{\xi} \right)^2 + 1 \right), \quad (4.24)$$

Z analizy zamieszczonych wyżej wzorów wynika ogólny wniosek, że rozpatrywane osłony, obciążone w sposób nagły wewnętrznym ciśnieniem $p = \text{const}$, zachowują się jak układy mechaniczne o jednym stopniu swobody, które drgają radialnie z częstotliwościami kołowymi określonymi wzorami (4.9) i (4.20). Dynamiczny stan parametrów mechanicznych obciążonych osłon zmienia się w czasie cyklicznie wokół ich wartości statycznych, uzyskanych przy ciśnieniu wytworzonym statycznie o tej samej wartości, tj. $p = p_s = \text{const}$.

Obecnie przejdziemy do ilościowej analizy parametrów mechanicznych badanych osłon.

5. Ilościowa analiza dynamicznych parametrów mechanicznych badanych osłon

Zakładamy, że rozpatrywane osłony wykonane są ze stali o następujących charakterystykach mechanicznych: gęstość w warunkach normalnych — $\rho_0 = 7800 \text{ kg/m}^3$, moduł Kirchoffa — $\mu = 75 \text{ GPa}$. Wartość ciśnienia przyjmujemy $p = 400 \text{ MPa}$. Dla ta-

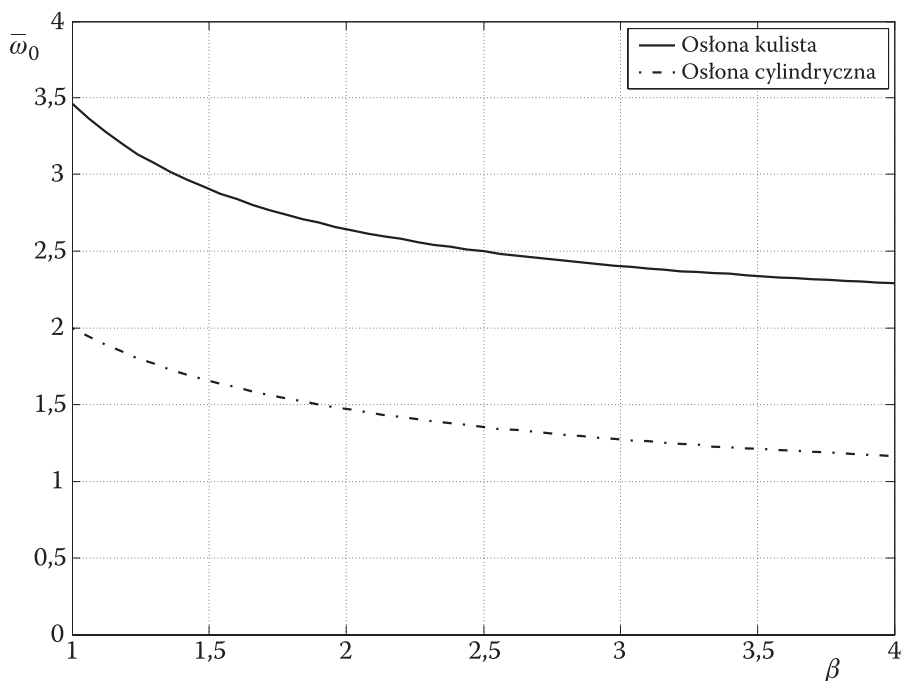
kich danych mamy: $F = \frac{\mu}{p} = 187,5$; $c = \sqrt{\frac{\mu}{\rho_0}} = 3100 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Pozostałe wartości liczbowe

odpowiednich wielkości będą podawane przy analizie konkretnych parametrów.

Zgodnie ze wzorami (4.9) i (4.20), względne częstości kołowe drgań własnych rozpatrywanych osłon są funkcjami grubości ich ścianek charakteryzowanej przez parametr β . Wykresy tych funkcji pokazane są na rysunku 1.

Jak widać, kołowe częstości drgań własnych osłon maleją wykładniczo wraz ze wzrostem grubości ich ścian, co jest powodowane wzrostem ich masy. Istotny jest fakt,

że częstość kołowa osłony kulistej jest prawie dwa razy większa od częstości kołowej osłony cylindrycznej. Wynika to z większej sztywności osłony kulistej w porównaniu ze sztywnością osłony cylindrycznej przy tych samych grubościach ścianek.



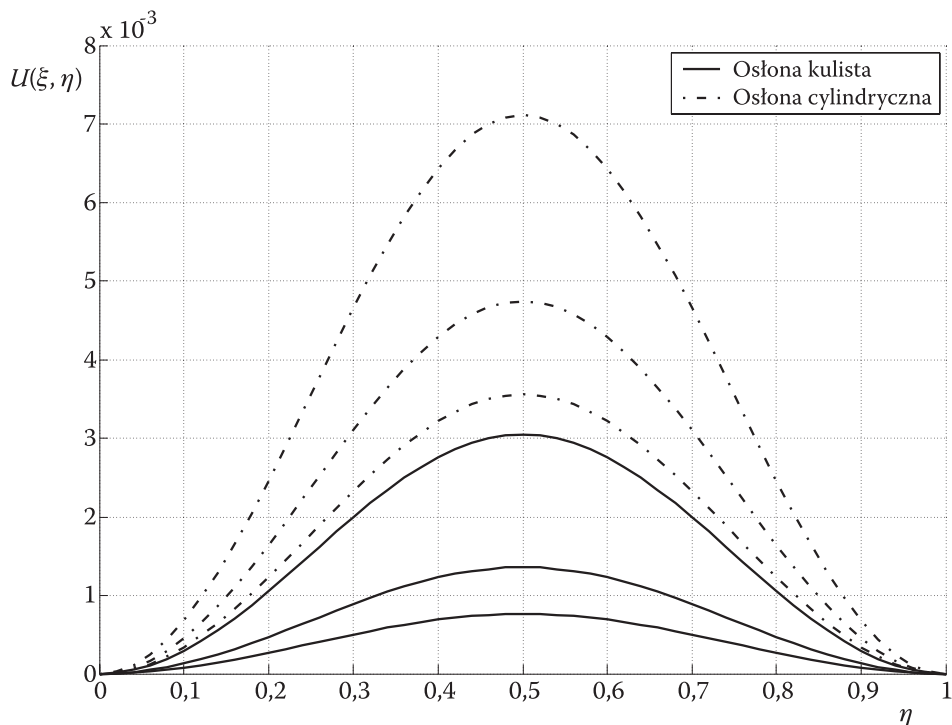
Rys. 1. Zmiany względnych kołowych częstości drgań własnych osłon w funkcji parametru β

Na rysunku 2 pokazane są wykresy zmian względnego radialnego przemieszczenia powierzchni osłon w przedziale $0 \leq \eta \leq 1$, tj. w pełnym okresie drgań $0 \leq t \leq T_0$, narysowane zgodnie ze wzorami (4.4) i (4.15) dla kilku wartości ξ i $\beta = 2$. Zwróćmy uwagę na fakt, że przemieszczenie radialne wewnętrznej ($\xi = 1$) i pozostałych powierzchni osłon jest dodatnią funkcją zmiennej η w całym okresie drgań. Oznacza to, że osłony podczas sprężystych drgań wymuszonych stałym wewnętrznym ciśnieniem, wytworzonym w sposób nagły, nie zmniejszają początkowej średnicy. Jak widać, amplitudy radialnych drgań poszczególnych powierzchni osłony kulistej są kilkakrotnie mniejsze od analogicznych amplitud osłony cylindrycznej. Oznacza to, że osłona kulista jest konstrukcją bardziej sztywną w porównaniu z osłoną cylindryczną.

W analogii do układu mechanicznego o jednym stopniu swobody, współczynnik dynamiczności udarowego obciążenia dla obydwóch osłon, zgodnie ze wzorami (4.4) i (4.10) oraz (4.15) i (4.21) określony jest wyrażeniem:

$$\Psi = \frac{U(\xi, \eta)}{U_s(\xi)} = 1 - \cos 2\pi\eta \quad (5.1)$$

i jego maksymalna wartość wynosi 2.



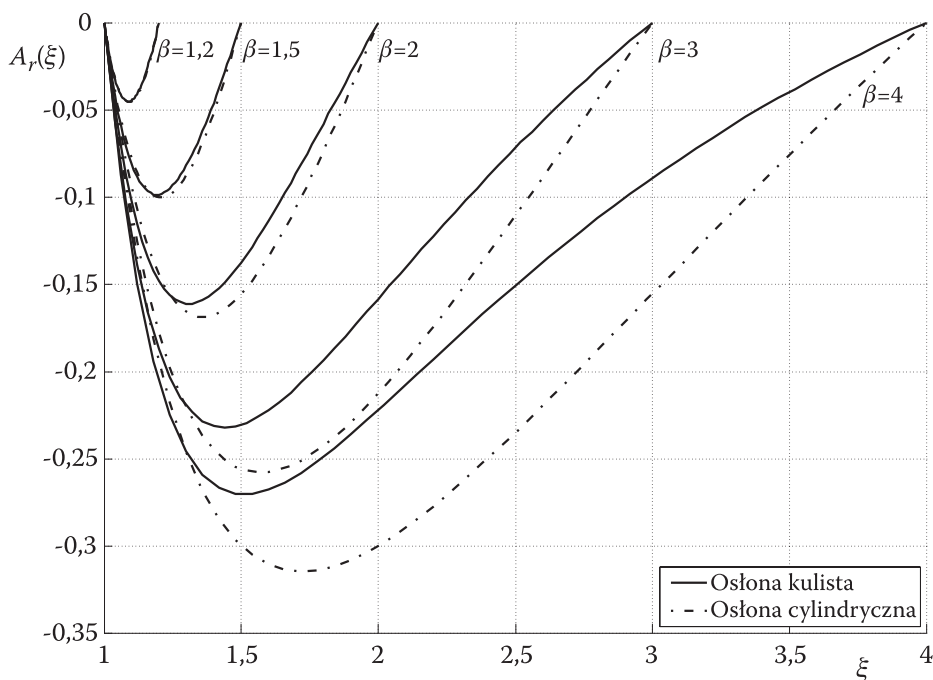
Rys. 2. Zmiany względnego radialnego przemieszczenia poszczególnych powierzchni osłon w przedziale $0 \leq \eta \leq 1$ dla kilku wartości parametru ξ i $\beta = 2$

Z kolei na rysunku 3 przedstawiono wykresy amplitud $A_r(\xi)$ wzdłuż grubości ścian osłon ($1 \leq \xi \leq \beta$) dla kilku wartości parametru β . Z wykresów tych wynika, że funkcje $A_r(\xi)$ są ujemne i w przedziale $1 \leq \xi \leq \beta$ osiągają minimalną wartość dla $\xi = \xi_e$, przy czym:

$$\xi_e = \beta \sqrt{3/(\beta^2 + \beta + 1)} \quad \text{— dla osłony kulistej,} \quad (5.2)$$

$$\xi_e = \beta \sqrt{2 \ln \beta / (\beta^2 - 1)} \quad \text{— dla osłony cylindrycznej.} \quad (5.3)$$

W miarę zbliżania się do wewnętrznych powierzchni osłon ($\xi \rightarrow 1$) ekstrema amplitud $A_r(\xi)$, wyrażone w bezwzględnych wartościach, maleją i znikają dla $\xi = 1$, co jest zgodne z warunkiem brzegowym ($S_r(1, \eta) \equiv -1$). Wartości funkcji $A_r(\xi)$ dla obydwóch osłon są porównywalne dla $\beta < 2$. Dla grubych ścianek różnice między funkcjami $A_r(\xi)$ dla osłon cylindrycznych i kulistych, po osiągnięciu ekstremum, rosną.

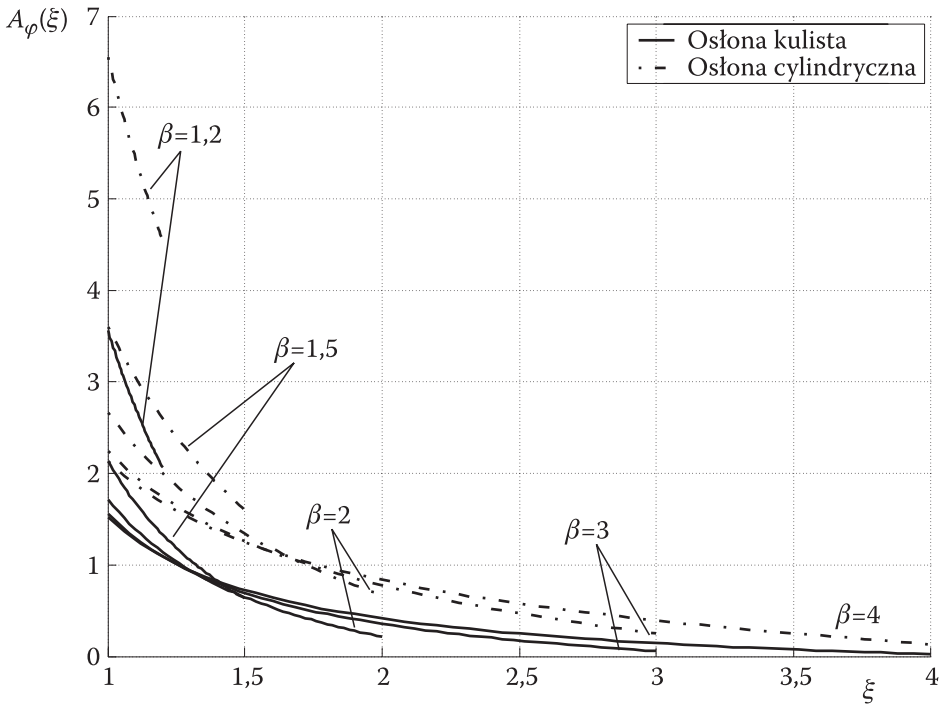


Rys. 3. Wykresy amplitud $A_r(\xi)$ pulsacji względnego naprężenia radialnego $S_r(\xi, \eta)$ w ściankach osłon dla kilku wartości ich grubości ($\beta = 1,2; 1,5; 2; 3$ i 4)

Analogiczne wykresy amplitud $A_\phi(\xi)$ pulsacji względnego naprężenia obwodowego S_ϕ w ścianach osłon pokazano na rysunku 4. Amplitudy $A_\phi(\xi)$ w przedziale $1 \leq \xi \leq \beta$ są malejącymi funkcjami dodatnimi. Największe wartości amplitud występują na wewnętrznych powierzchniach osłon ($\xi = 1$) i określone są następującymi wzorami:

$$A_{\phi \max} = 3\beta^3 / 2(\beta^3 - 1) \quad \text{— dla osłony kulistej,} \quad (5.4)$$

$$A_{\phi \max} = 2\beta^2 / (\beta^2 - 1) \quad \text{— dla osłony cylindrycznej.} \quad (5.5)$$



Rys. 4. Wykresy amplitud $A_\varphi(\xi)$ pulsacji względnego naprężenia obwodowego $S_\varphi(\xi, \eta)$ w ściankach osłon dla kilku wartości ich grubości ($\beta = 1,2$; $1,5$ i 4)

Z analizy wzorów (4.7) i (4.18) wynika wniosek, że funkcja $S_r(\xi, \eta)$ może zmieniać znak z ujemnego na dodatni (rozciąganie) wewnątrz ścianki osłony. Zjawisko to dla $\eta = 0,5$ (połowa okresu drgań) występuje w osłonie kulistej, jeśli parametr β charakteryzujący grubość ścianki spełnia nierówność:

$$\beta^4 + 2\beta^3 - 5\beta^2 - 6\beta + 5 > 0. \quad (5.6)$$

Nierówność ta jest spełniona, jeśli $\beta > 1,79$. Oznacza to, że w ściance o grubości, dla której ($\beta = b/a$) $< 1,79$ rozciągające naprężenia radialne nie wystąpią. Maksymalna dodatnia wartość funkcji $S_r(\xi, 0,5)$ dla osłony kulistej jest osiągnięta na powierzchni określonej równaniem:

$$\xi = \xi_e(\beta) = \beta \sqrt{\frac{6}{\beta^2 + \beta + 1}}, \quad \beta > 1,79, \quad (5.7)$$

i wynosi:

$$S_{r\max}(\xi_e; 0,5) = \frac{1}{\beta - 1} \left(\frac{\beta}{\xi_e} - 1 \right) - \frac{2}{\beta^3 - 1} \left(\left(\frac{\beta}{\xi_e} \right)^2 - 1 \right). \quad (5.8)$$

Analogiczne zależności dla osłony cylindrycznej mają postać:

$$\xi = \xi_e(\beta) = \exp\left(\frac{2(\beta^2 + 1)\ln\beta - \beta^2 + 1}{2(\beta^2 - 1)}\right), \quad \beta > 1,87, \quad (5.9)$$

$$S_{r\max}(\xi_e; 0,5) = \frac{\ln(\beta/\xi_e)}{\ln\beta} - \frac{2}{\beta^2 - 1} \left(\left(\frac{\beta}{\xi_e}\right)^2 - 1 \right). \quad (5.10)$$

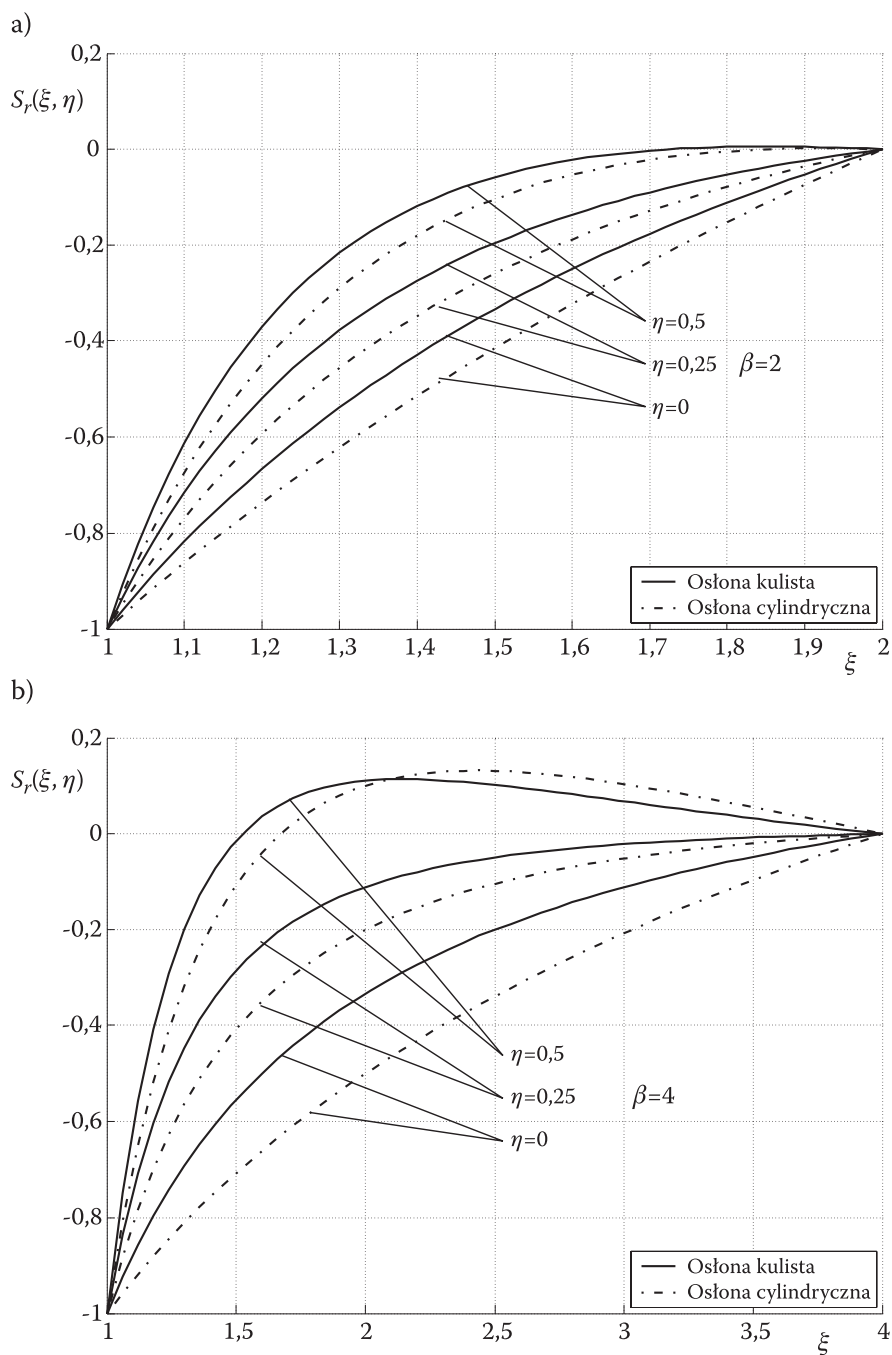
Graficzny obraz funkcji $S_r(\xi, \eta)$ przedstawiony jest na rysunkach 5-7.

Wykresy zamieszczone na rysunku 5 dla $\eta = 0,25$ odpowiadają obciążeniu statycznemu ($\cos 2\pi \cdot 0,25 = 0$). Pozostałe wartości funkcji $S_r(\xi, \eta)$ dla $\eta = 0$ i $\eta = 0,5$ są symetrycznie rozmieszczone względem wykresu statycznego. Oznacza to, że układ drga wokół położenia równowagi statycznej. Na wszystkich wykresach, zamieszczonych na rysunkach 5 i 6, funkcje $S_r(\xi, \eta)$ dla obydwóch osłon mają podobne przebiegi jakościowe, natomiast występują niewielkie różnice ilościowe. Bezwzględne wartości funkcji $S_r(\xi, \eta)$ dla osłony cylindrycznej są w większości przypadków większe. Wynika to z faktu, że przemieszczenie i odkształcenia dla tego samego obciążenia i grubości ścianki w osłonie cylindrycznej są większe (rys. 2).

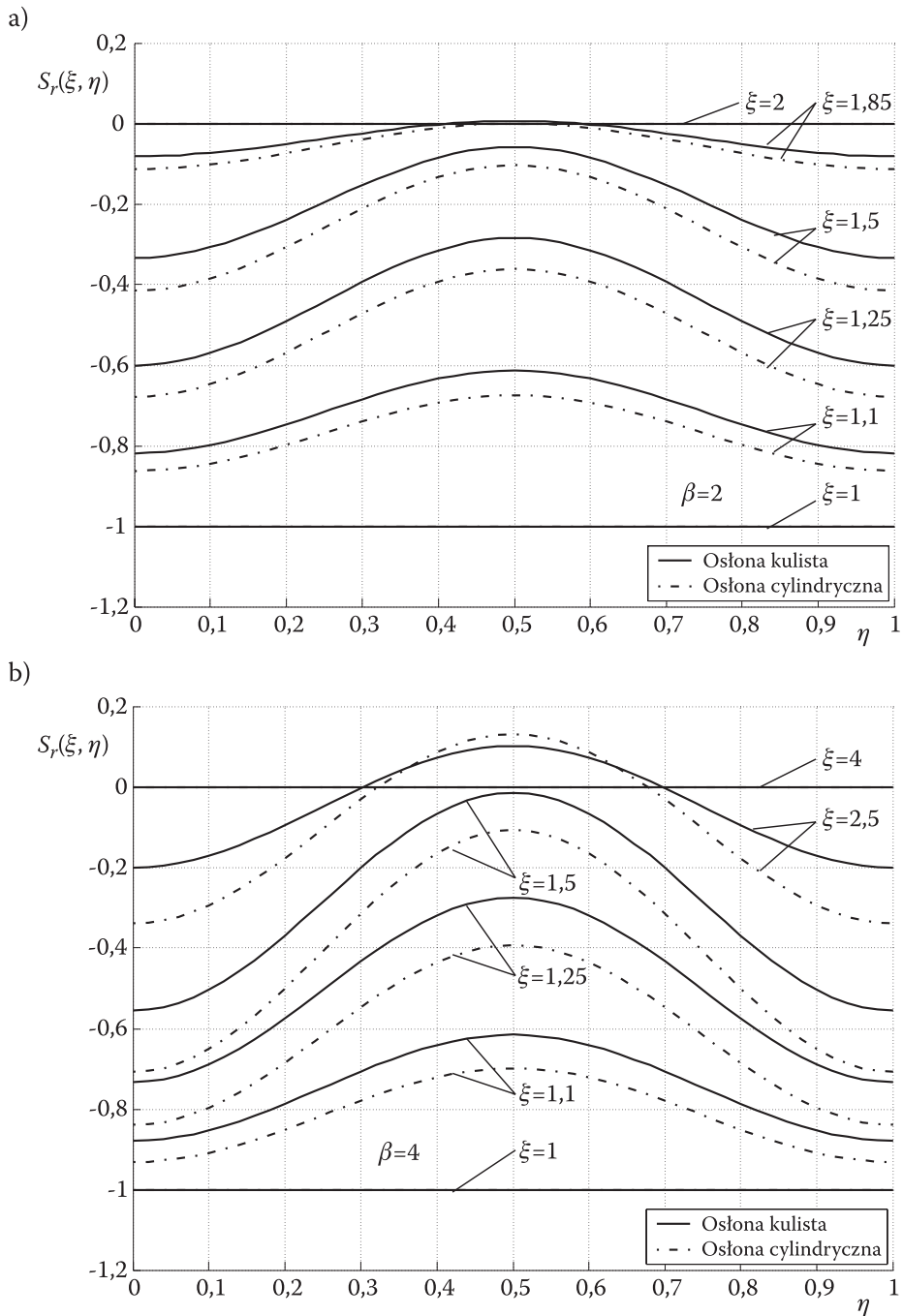
Na rysunkach 8-10 przedstawiono analogiczne wykresy dla funkcji $S_\phi(\xi, \eta)$. Istotnym faktem, różniącym funkcję $S_\phi(\xi, \eta)$ od funkcji $S_r(\xi, \eta)$, jest zmiana jej znaku z ujemnego na dodatni podczas procesu drgań dla każdej grubości ścianki. W początkowej chwili procesu drgań bezwładność ścianki powoduje, że naprężenie obwodowe jest ujemne (ściskanie). Natomiast z upływem czasu ścianka przemieszcza się radialnie i naprężenie obwodowe zmienia znak na dodatni. Maksymalna wartość tego naprężenia występuje na wewnętrznej powierzchni ścianki ($\xi = 1$) i jest osiągnięta w połowie okresu drgań ($\eta = 0,5$ — rys. 8). Wartości maksymalne funkcji $S_\phi(\xi, \eta)$ dla osłon — kulistej i cylindrycznej określone są wzorami:

$$S_{\phi\max} = \frac{5\beta^3 + 1}{\beta^3 - 1} \quad \text{— dla osłony kulistej,} \quad (5.11)$$

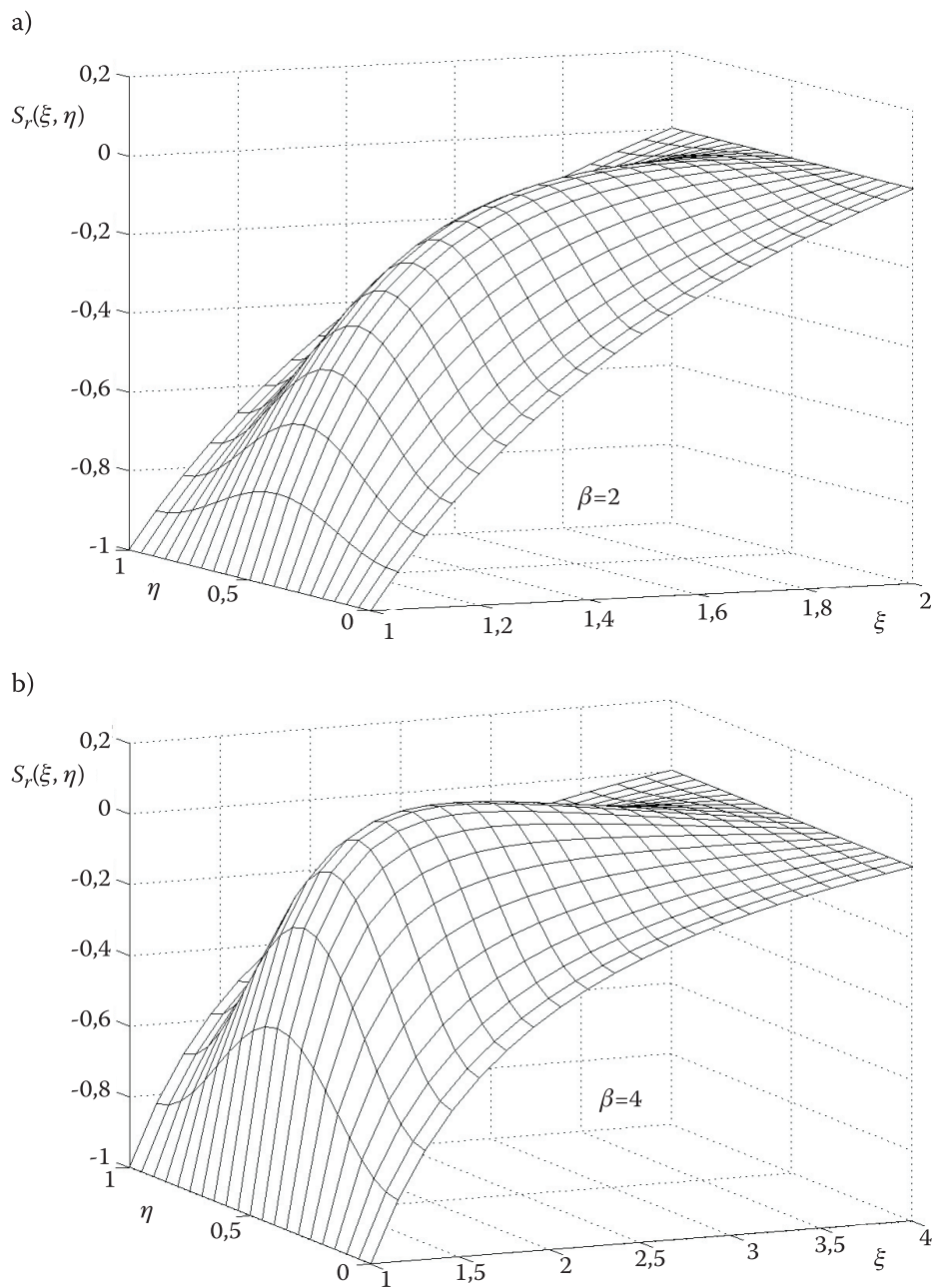
$$S_{\phi\max} = \frac{3\beta^2 + 1}{\beta^2 - 1} \quad \text{— dla osłony cylindrycznej.} \quad (5.12)$$

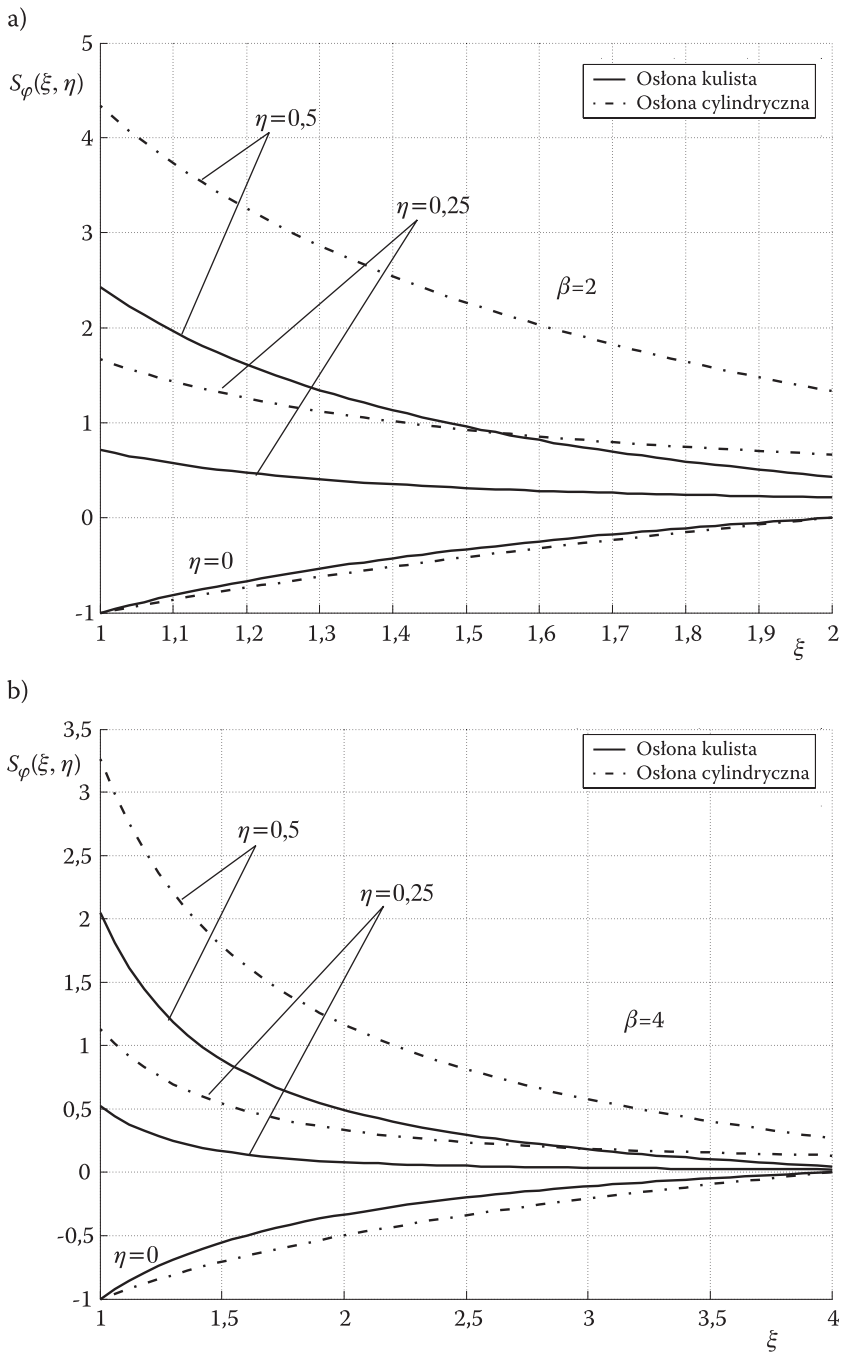


Rys. 5. Zmiana funkcji $S_r(\xi, \eta)$ wzdłuż grubości ścianek osłon dla $\eta = 0; 0,25$ i $0,5$ oraz $\beta = 2$ i $\beta = 4$

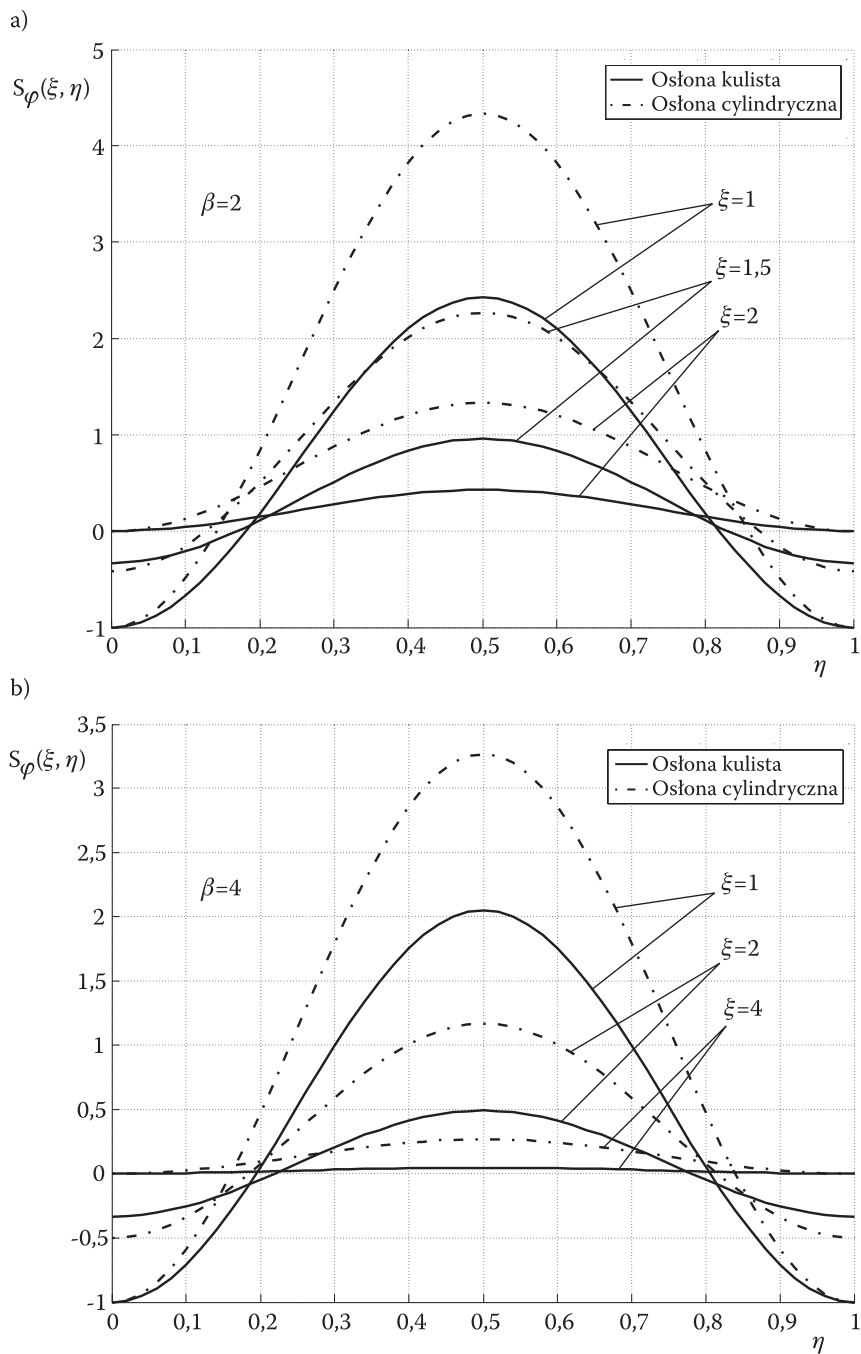


Rys. 6. Zmiana funkcji $S_r(\xi, \eta)$ podczas drgań w ustalonych obwodowych przekrojach ścianek dla $\beta = 2$ i $\beta = 4$

Rys. 7. Przestrzenne kształty funkcji $S_r(\xi, \eta)$ dla osłony kulistej

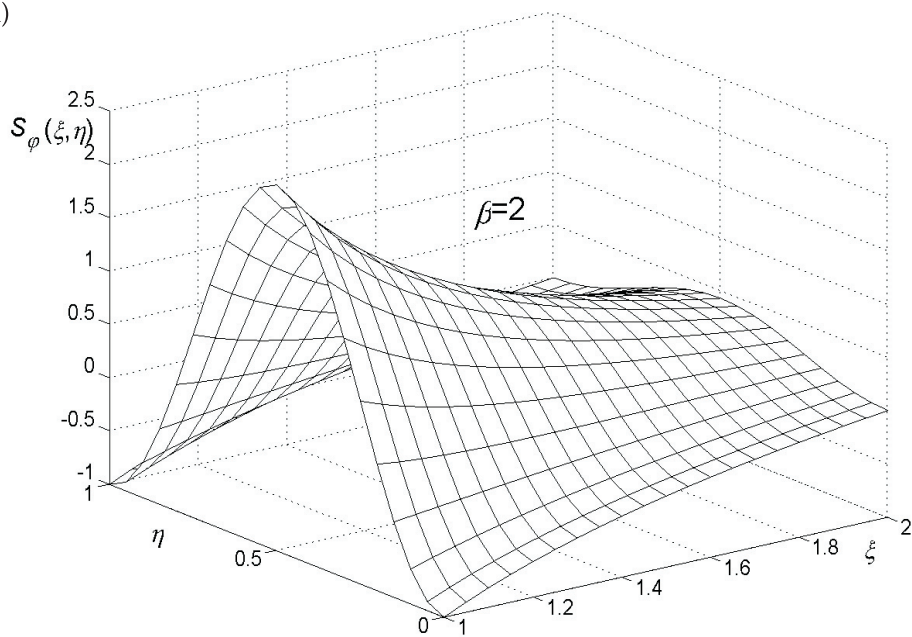


Rys. 8. Zmiana funkcji $S_\varphi(\xi, \eta)$ wzdłuż grubości ścianek osłon dla $\eta = 0; 0,25$ i $0,5$ oraz $\beta = 2$ i $\beta = 4$

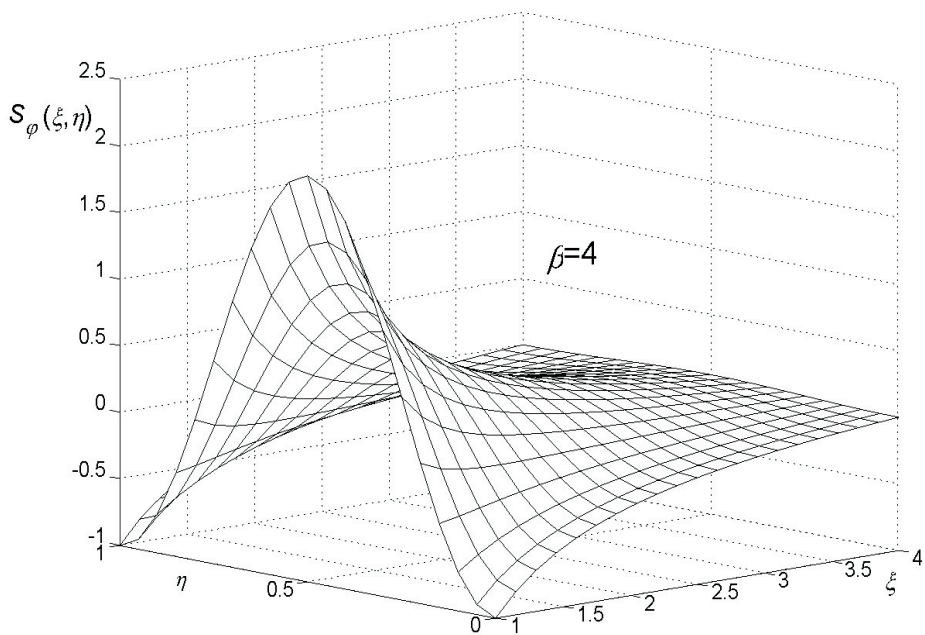


Rys. 9. Zmiana funkcji $S_{\varphi}(\xi, \eta)$ podczas drgań w ustalonych obwodowych przekrojach ścianek dla $\beta = 2$ i $\beta = 4$

a)



b)

Rys. 10. Przestrzenne kształty funkcji $S_\varphi(\xi, \eta)$ dla osłony kulistej

Z analizy wykresów przedstawionych na rysunkach 8-10 wynika wniosek, że podobnie jak w przypadku funkcji $S_r(\xi, \eta)$, przebiegi jakościowe funkcji $S_\phi(\xi, \eta)$ dla osłon kulistych i cylindrycznych są podobne, natomiast występują dość znaczne różnice ilościowe. Generalnie można stwierdzić, że dla tych samych wartości średnic i grubości ścianek oraz ciśnienia wewnętrznego, wytworzonego w osłonach w sposób udarowy, naprężenia obwodowe są większe w osłonie cylindrycznej.

6. Wnioski końcowe

Z analizy problemu można sformułować następujące wnioski:

1. Grubościenne osłony o symetrii kulistej i cylindrycznej, obciążone nagle wewnętrznym ciśnieniem drgają radialnie z częstościami kołowymi ω_0 i zachowują się podobnie jak mechaniczny układ o jednym stopniu swobody. Przy równych średnicach i grubościach ścianek, kołowa częstość drgań własnych osłony kulistej jest prawie dwukrotnie większa od osłony cylindrycznej. Przyczyną tej różnicy jest większa sztywność osłony kulistej.
2. Maksymalny współczynnik dynamiczności drgań $\Psi = 2$.
3. Z analitycznego rozwiązania problemu bezpośrednio wynika, że dynamiczne stany: radialnego przemieszczenia (u), odkształceń ($\varepsilon_r, \varepsilon_\phi$) i naprężeń (σ_r, σ_ϕ), wygenerowane w ściankach osłon wewnętrznym ciśnieniem $p(t)$ zdeterminowane są przez fizyczne właściwości ich materiału (ρ_0, μ) i geometrię (a, b) oraz charakter zmian ciśnienia w funkcji czasu ($p(t)$).

Artykuł wpłynął do redakcji 28.12.2006 r. Zweryfikowaną wersję po recenzji otrzymano w lutym 2007 r.

LITERATURA

- [1] E. WŁODARCZYK, J. JANISZEWSKI, *Static and dynamic ductility of copper and its sinters*, J. Tech. Phys., 45, 4, 2004, 263-274.
- [2] E. WŁODARCZYK, J. JANISZEWSKI, Z. GŁODOWSKI, *Dynamiczny stan naprężenia i odkształcenia w cienkim, rozszerzanym wybuchowo metalowym pierścieniu*, Biul. WAT, LIV, 2-3, 2005, 109-119.
- [3] W. P. WALTERS, J. A. ZUKAS, *Fundamentals of shaped charges*, New York: A. Wiley — Interscience Publication, 1989.
- [4] E. WŁODARCZYK, J. JANISZEWSKI, M. MAGIER, *Analiza koncentracji osiowego naprężenia w rdzeniu wydłużonego pocisku podkalibrowego podczas strzału*, Biul. WAT, LIII, 2-3, 2004, 109-132.
- [5] E. WŁODARCZYK, Z. GŁODOWSKI, R. PASZKOWSKI, *Radialne drgania grubościennej rury wymuszone wewnętrznym ciśnieniem impulsowym*, Biul. WAT, LIV, 10, 2005, 31-48.
- [6] W. NOWACKI, *Teoria sprężystości*, PWN, Warszawa, 1970.
- [7] Z. DŻYGADŁO, S. KALISKI, L. SOLARZ, E. WŁODARCZYK, *Drgania i fale w ciałach stałych*, PWN, Warszawa, 1966.

E. WŁODARCZYK, M. ZIELENKIEWICZ

**Dynamics of thick-walled spherical casing loaded with variable
in time internal pressure**

Abstract. The problem of radial vibrations of thick-walled spherical casing, loaded with variable in time internal pressure was studied. We assumed that the casing material is incompressible. Furthermore, the linear elasticity theory was used in these considerations. By means of these simplifications, the analytical solution of the dynamics of thick-walled spherical casing loaded with an internal pressure has been obtained. This solution may be used for estimation of strength of the spherical ballistic casings applied to explosively driven specimens in the ring test. Moreover, the results shown in this paper are the contribution to the vibration theory of continuous engineering systems.

Keywords: dynamics of thick-walled spherical casing, forced vibrations, pulsed internal pressure, incompressible casing material

Universal Decimal Classification: 623.52

