

Metoda przeliczania 2- optymalnych struktur opiniowania diagnostycznego typu BGM

Roman KULESZA

Zakład Automatyki, Instytut Teleinformatyki i Automatyki WAT,
ul. Kaliskiego 2, 00-908 Warszawa

STRESZCZENIE: Artykuł jest kontynuacją artykułu [9]. Zaproponowano w nim metodę przeliczenia 2- optymalnych struktur opiniowania diagnostycznego (struktur OD) typu BGM (Barsi F., Grandoni F., Maestrini P [1]), które nie są silnie spójne i wyznaczono szereg przeliczający takie struktury do rzędu ósmego. Przypomniano też podstawowe własności 2- optymalnych struktur OD typu BGM oraz określono ich kanoniczne reprezentanty klas i podklas podobieństwa.

1. Wprowadzenie

Artykuł niniejszy jest kontynuacją artykułu [9]. Używa się w nim pojęć i symboli stosowanych w artykułach [6] – [9].

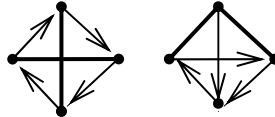
Celem artykułu [9] było wybranie kanonicznych reprezentantów klas podobieństwa niesilnie spójnych oraz silnie spójnych optymalnych struktur OD (zarówno typu PMC jak i BGM) oraz określenie liczebności zbiorów takich reprezentantów dla $m \leq 4$ i $k \leq 8$, a także przedstawienie sposobu wykrywania (redukowania) struktur podobnych (izomorficznych) w klasie struktur silnie spójnych.

Celem niniejszego artykułu jest zaproponowanie metody komputerowo wspomaganego przeliczania 2- optymalnych niesilnie spójnych struktur OD typu BGM i wyznaczenie ich szeregu przeliczającego (do rzędu ósmego) dla przypadku, gdy składowa silnej spójności takich struktur jest rzędu czwartego (część trzecia artykułu).

W części drugiej artykułu przypomniano podstawowe właściwości 2- optymalnych struktur OD typu BGM oraz wyznaczono kanoniczne reprezentanty klas i podklas podobieństwa takich niesilnie spójnych struktur.

2. Sformułowanie problemu

Wiadomo [9], że 2- optymalna struktura OD typu BGM rzędu czwartego ma postać jednej z dwóch struktur przedstawionych na rys. 1 oraz jest strukturą silnie spójną.



Rys. 1. Struktury OD typu BGM, 2- optymalne rzędu czwartego

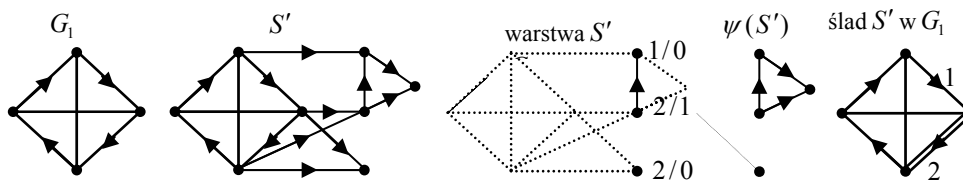
Zauważmy, że struktura G_1 (rys.1), w przeciwieństwie do struktury G_2 , nie ma trywialnej grupy węzłowej (trywialnego zbioru przekształceń automorficznych).

Niech $\mathbb{S}_2^B(k)$ oraz $\mathbb{S}_2^B(k|G)$, $k > 4$, oznacza (odpowiednio) zbiór 2- optymalnych struktur OD typu BGM rzędu k oraz taki podzbiór struktur tego zbioru, których składową silnej spójności jest struktura $G \in \{G_1, G_2\}$. Mówimy, że struktura G indukuje zbiór $\mathbb{S}_2^B(k|G)$.

Struktura $S' \in \mathbb{S}_2^B(k|G)$ jest takim nadgrafem grafu G , którego każdy podgraf, utworzony przez usunięcie węzła bez następników, jest 2- optymalną strukturą OD typu BGM, rzędu $k-1$ (rys. 2).

Cechy nadgrafu S' (rys. 2), takie jak: warstwa S' , przedłużenie $\psi(S')$, ślad S' w G , kanoniczny reprezentant klasy podobieństwa $\varphi(S')$ oraz charakterystyka warstwy $q(S')$, są (formalnie) opisane w pracy [9].

Podobieństwo struktur indukowanych przez strukturę G zależy zarówno od jej grupy węzłowej, jak i od cech nadgrafu S' . Celem artykułu jest zaproponowanie metody określającej taką zależność oraz wyznaczenie szeregu przeliczającego 2- optymalne struktury OD typu BGM do rzędu ósmego dla przypadku, gdy składowa silnej spójności takich struktur jest rzędu czwartego.



Rys. 2. Struktura S' ($S' \in \mathbb{S}_2^B(8|G_1)$) jest takim nadgrafem grafu G_1 ,
 że $\varphi(S') = (1, 2)$ oraz $q(S') = \{2/1, 2/0, 1/0\}$

3. Metoda przeliczania 2-optimalnych niesilnie spójnych struktur OD typu BGM

Taki wektor $\varphi(S) = (\varphi_1, \varphi_2)$, gdzie $\varphi_2 \geq 1$, $\varphi_1 + \varphi_2 \leq k - 4$, że :
 $\|\{e \in E(S') \setminus E(G) : \|\Gamma_{S'}^{-1}(e) \cap E(G)\| = p\}\| = \varphi_p$, $1 \leq p \leq 2$,
 jest kanonicznym reprezentantem klasy podobieństwa struktury
 $S \in \mathbb{S}_2^B(k)$, $k > 4$.

Zbiory Φ_2^{k-4} ($\varphi \in \Phi_2^{k-4}$, $5 \leq k \leq 8$), mają postać [9]:

$$\Phi_2^1 = \{(0, 1)\};$$

$$\Phi_2^2 = \{(0, 2), (1, 1)\};$$

$$\Phi_2^3 = \{(0, 3), (0, 2), (1, 2), (1, 1), (2, 1)\};$$

$$\Phi_2^4 = \{(0, 4), (0, 3), (0, 2), (1, 3), (1, 2), (1, 1), (2, 2), (2, 1), (3, 1)\}.$$

Nie będziemy rozpatrywać metod generowania zbiorów $\mathbb{Q}(\varphi)$ charakterystyk warstwy $q \in \mathbb{Q}(\varphi)$ oraz zbiorów $\Psi_2(q, k - 4)$ przedłużeń $\psi \in \Psi_2(q, k - 4)$, bowiem dla $k \leq 8$ są one oczywiste.

Zbiory $\mathbb{Q}(\varphi)$, gdzie $\varphi \in \Phi_2^a$, $a \leq 4$, podano w tabeli 1, a liczebności zbiorów $\Psi_2(q, k - 4)$ są następujące:

$$\begin{aligned} \|\Psi_2(\{2/0, 2/1, 1/0\}, 1)\| &= \|\Psi_2(\{2/1, 1/1, 1/0\}, 1)\| = \\ &= \|\Psi_2(\{2/1, 1/0\}, 2)\| = 3 \end{aligned}$$

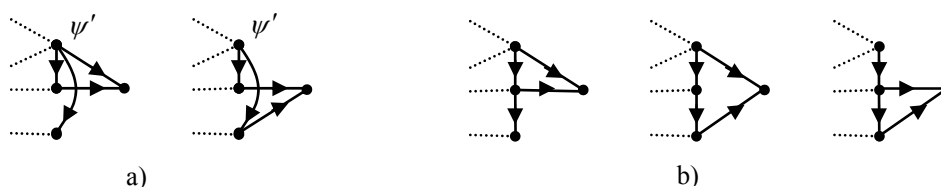
$$\|\Psi_2(\{2/2, 1/0, 1/0\}, 1)\| = \|\Psi_2(\{2/0, 2/0\}, 2)\| = 2,$$

przy czym dla pozostałych przypadków $\|\Psi_2(q, k - 4)\| = 1$.

Tabela 1. Zbiory charakterystyk warstwy nadgrafu dla określonego $\varphi \in \Phi_2^a, a \leq 4$

φ	$\mathbb{Q}(\varphi)$
(0,1)	{2/0}
(0,2)	{2/0,2/0}
(0,3)	{2/0,2/0,2/0}
(0,4)	{2/0,2/0,2/0,2/0}
(1,1)	{2/1,1/0}
(1,2)	{2/0,2/1,1/0}
(1,3)	{2/0,2/0,2/1,1/0}
(2,1)	{2/2,1/0,1/0}; {2/1,1/1,1/0}
(2,2)	{2/1,2/1,1/0,1/0}; {2/0,2/1,1/1,1/0}; {2/0,2/2,1/0,1/0}
(3,1)	{2/1,1/1,1/1,1/0}; {2/2,1/1,1/0,1/0}; {2/1,1/2,1/0,1/0}; {2/3,1/0,1/0,1/0}

Dla przykładu: na rys.3 przedstawiono przedłużenia zbioru $\Psi_2(\{2/2,1/0,1/0\},1)$ oraz zbioru $\Psi_2(\{2/1,1/1,1/0\},1)$.



Rys. 3. Przedłużenia a) - zbioru $\Psi_2(\{2/2,1/0,1/0\},1)$ oraz b) - zbioru $\Psi_2(\{2/1,1/1,1/0\},1)$

Zauważmy, że dla $k \leq 8$ liczba takich węzłów przedłużenia ψ' , które nie są elementami warstwy, nie jest większa od dwóch oraz że każdy z takich węzłów ma poprzednik w warstwie. Tak więc dla $k > \|q\| + 4$ przedłużenie można jednoznacznie (do izomorfizmu) opisać, przypisując każdemu elementowi $e \in E(q)$ warstwy, o charakterystyce q , liczbę następników poza warstwą ($\psi' = \{ \langle (2/2), 1 \rangle; \langle (1/0), 1 \rangle; \langle (1/0), 0 \rangle \}$ – rys. 3a).

Niech $\bar{G}(r, w), 1 \leq r \leq 6, r \leq w$, oznacza zbiór takich grafów $G \in \{G_1, G_2\}$ (rys. 1) o r ważonych gałęziach, że suma wag gałęzi równa się w , przy czym $w \in \{1, 2, \dots\}$, a $\Gamma(G)$ – grupę węzłową (zbiór przekształceń automorficznych) grafu G .

Oznaczmy:

$$\bar{G}_1(r, w|s) = \{G \in \bar{G}_1(r, w) : \|\Gamma(G)\| = s\} \quad (1 \leq s \leq \|\Gamma(G_1)\|).$$

Tabela 2. Wartości $\|\bar{G}_1(r, w|s)\|$

(r,w)	s			
	1	2	3	4
(1, w)	1	1	0	0
(2,2)	3	1	0	1
(2,3)	7	1	0	0
(2,4)	10	2	0	1
(3,3)	4	2	0	0
(3,4)	14	2	0	0
(4,4)	3	1	0	1

W tabeli 2 podano wartości $\|\bar{G}_1(r, w|s)\|$, $w \leq 4$. Określenie tych wartości, drogą analityczną, jest kłopotliwe (z uwagi na postać grupy węzłowej grafu G_1). Dokonano tego generując zbiory $\bar{G}_1(r, w)$, $1 \leq r \leq 4$, $w \leq 4$, to jest – indukując zbiór $\bar{G}_1(r+1, r+1)$ ze zbioru $\bar{G}_1(r, r)$ (przez dodanie gałęzi ważonej) oraz zbiór $\bar{G}_1(r, w+1)$ ze zbioru $\bar{G}_1(r, w)$ (przez zwiększenie wagi (dowolnej) gałęzi ważonej), redukując rozwiązania podobne i (ewentualnie) określając grupę węzłową każdego uzyskanego (w ten sposób) grafu (rys. 4). Oczywiście zbiór $\bar{G}_1(1,1)$ ma dwa grafy – jeden o ważonym łuku i jeden o ważonej krawędzi.

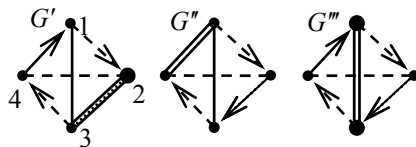
Pominiemy dla zbiorów $\bar{G}_1(r, w)$ rozważania analityczne. Zauważmy tylko, że:

$$\|\bar{G}_1(2,3)\| = 2 \cdot \|\bar{G}_1(2,2)\| - \|\{G' \in \bar{G}_1(2,2) : \|\Gamma(G')\| \neq 1\}\|;$$

$$\|\bar{G}_1(2,4)\| = \|\bar{G}_1(2,2)\| + \|\bar{G}_1(2,3)\|;$$

$$\|\bar{G}_1(3,4)\| = 3 \cdot \|\bar{G}_1(3,3)\| - \|\{G' \in \bar{G}_1(3,3) : \|\Gamma(G')\| \neq 1\}\|.$$

Dla przykładu na rys. 4 zilustrowano podobieństwo grafów i wartość grupy węzłowej grafu – grafy G' i G'' są izomorficzne (permutacja (5)(6)(13)(24) przekształca G' w G''), a $\|\Gamma(G''')\| = 2$, bowiem permutacje (1)(2)(3)(4)(5)(6) oraz (5)(6)(13)(24) przekształcają G''' w samego siebie.



Rys. 4. Przykłady grafów zbioru $\bar{G}_1(4,4)$
(krotność linii (ciągłej) symbolizuje wagę gałęzi)

Ponieważ graf G_2 jest grafem węzłowo asymetrycznym, to

$$\|\bar{G}_2(r, w)\| = \binom{6}{r} \cdot \sum_{\lambda \in \Lambda^r(w)} P(\lambda), \quad (1)$$

gdzie $P(\lambda)$ oznacza liczbę kombinacji ciągu $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_r)$, a $\Lambda^r(w)$ – zbiór podziałów liczby naturalnej w na r składników prostych.

Wiadomo, że $P(\lambda) = (\mu_1(\lambda) + \dots + \mu_{p(\lambda)}(\lambda))! \cdot (\mu_1(\lambda))! \cdot \dots \cdot \mu_{p(\lambda)}(\lambda)!^{-1}$, gdzie $(\mu_1(\lambda), \dots, \mu_{p(\lambda)}(\lambda))$, $1 \leq p(\lambda) \leq r$ jest ciągiem krotności multizbioru $\{\lambda_1, \dots, \lambda_r\}$.

Niech $\mathbb{S}_2^B(k|\varphi, q, G)$ oznacza zbiór 2- optymalnych struktur OD typu BGM rzędu $k \geq 5$, których kanonicznym reprezentantem klasy podobieństwa, jest wektor φ , charakterystyką warstwy – zbiór q , a składową silnej spójności – graf $G \in \{G_1, G_2\}$ (rys. 1). Jeżeli $\|\mathbb{Q}(\varphi)\| = 1$ (odwzorowanie $\varphi \rightarrow q$ jest wzajemnie jednoznaczne), to będziemy, dla uproszczenia, pisać $\mathbb{S}_2^B(k|\varphi, \bullet, G)$ lub $\mathbb{S}_2^B(k|\bullet, q, G)$.

Ślad nadgrafu $S' \in \mathbb{S}_2^B(4 + \varphi_2 | (0, \varphi_2), \bullet, G)$ jest elementem zbioru $\{G \in \bar{G}(r, w) : 1 \leq r \leq \varphi_2, w \leq \varphi_2\}$, a więc

$$\|\mathbb{S}_2^B(4 + \varphi_2 | (0, \varphi_2), \bullet, G)\| = \sum_{r=1}^{\min\{6, \varphi_2\}} \|\bar{G}(r, \varphi_2)\|. \quad (2)$$

Niech $\bar{G}^\bullet(r, w; r^\bullet, w^\bullet)$ oznacza zbiór takich grafów $G \in \{G_1, G_2\}$, (rys. 1) o r ważonych gałęziach i r^\bullet ważonych węzłach, że suma wag gałęzi równa się w , a suma wag węzłów w^\bullet .

Tabela 3. Wartości $\|\bar{G}_1^\bullet(r, w; r^\bullet, w^\bullet)\|$

(r, w)	(r^\bullet, w^\bullet)			
	$(1, w^\bullet)$	(2,2)	(2,3)	(3,3)
$(1, w)$	6	10	18	6
$(2,2)$	15	24	45	
$(2,3)$	30	45		
$(3,3)$	20			

W tabeli 3 podano wartości $\|\bar{G}_1^\bullet(r, w; r^\bullet, w^\bullet)\|$ ($r \geq 1, r^\bullet \geq 1, r + r^\bullet \leq 4$) Wartości te wyznaczono indukując zbiór $\bar{G}_1^\bullet(r, w; r^\bullet, w^\bullet)$ ze zbioru $\bar{G}_1(r, w)$ (przez dodanie r^\bullet węzłów ważonych o sumie wag równej w^\bullet) i redukując rozwiązania podobne.

Pominiemy dla zbiorów $\bar{G}_1^\bullet(r, w; r^\bullet, w^\bullet)$ rozważania analityczne, zauważmy tylko, że:

$$\|\bar{G}_1^\bullet(r, w; 1, 1)\| = \binom{4}{1} \cdot \sum_{s=1}^4 s^{-1} \cdot \|\bar{G}_1(r, w|s)\|. \quad (3)$$

Z asymetrii węzłowej grafu G_2 wynika, że

$$\|\bar{G}_2^\bullet(r, w; r^\bullet, w^\bullet)\| = \binom{6}{r} \cdot \sum_{\lambda' \in \Lambda^r(w)} P(\lambda') \cdot \binom{4}{r^\bullet} \cdot \sum_{\lambda'' \in \Lambda^{r^\bullet}(w^\bullet)} P(\lambda''). \quad (4)$$

Tabela 4. Wartości $\|\bar{G}_2^\bullet(r, w; r^\bullet, w^\bullet)\|$

(r, w)	(r^\bullet, w^\bullet)			
	$(1, w^\bullet)$	(2,2)	(2,3)	(3,3)
$(1, w)$	24	36	72	24
$(2,2)$	60	90	180	
$(2,3)$	120	180		
$(3,3)$	80			

Oznaczmy:

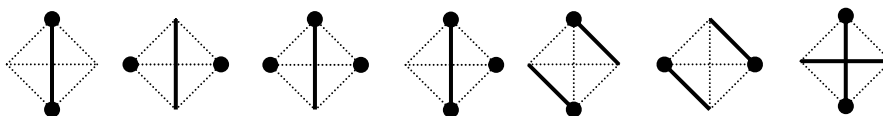
$$\bar{G}_1^*(r, w; r^*, w^* | s) = \{G \in \bar{G}_1^*(r, w; r^*, w^*) : \|\Gamma(G)\| = s\}.$$

Zauważmy, że $(w + w^* \leq 4) \Rightarrow (s \leq 2)$.

W tabeli 5, zestawiono liczebności niektórych zbiorów $\bar{G}_1^*(r, w; r^*, w^* | 2)$, a na rys. 5, przedstawiono grafy tych zbiorów.

Tabela 5. $\|\bar{G}_1^*(r, w; r^*, w^* | 2)\|$

(r, w)	(r^*, w^*)		
	$(1, w^*)$	$(2, 2)$	$(3, 3)$
$(1, w)$	0	2	2
$(2, 2)$	0	3	



Rys. 5. Niektóre grafy zbiorów $\bar{G}_1^*(r, w; r^*, w^* | 2)$
(orientacja luków jest taka jak na rys.1)

Ślad nadgrafu $S' \in \mathbb{S}_2^B(4 + \|q\| | \varphi(q), q, G)$ jest elementem zbioru

$$\{G' \in \bar{G}^*(r, w; r^*, w^*) : 1 \leq r \leq w \leq \varphi_2(q); 1 \leq r^* \leq w^* \leq \varphi_1(q)\},$$

a podobieństwo nadgrafów rzędu $4 + \|q\|$, o jednakowych śladach, zależy od cech warstwy q i grafu G' oraz od grupy węzłowej grafu G .

Wektor $(r, \varphi_2(q); r^*, \varphi_1(q))$ możemy traktować jako kanoniczny reprezentant klasy podobieństwa nadgrafów zbioru $\mathbb{S}_2^B(4 + \|q\| | \varphi(q), q, G)$, a więc liczebność tego zbioru – wyznaczać jako liniową kombinację wartości $\|\bar{G}^*(r, \varphi_2(q); r^*, \varphi_1(q))\|$ dla $1 \leq r \leq \varphi_2(q), 1 \leq r^* \leq \varphi_1(q)$.

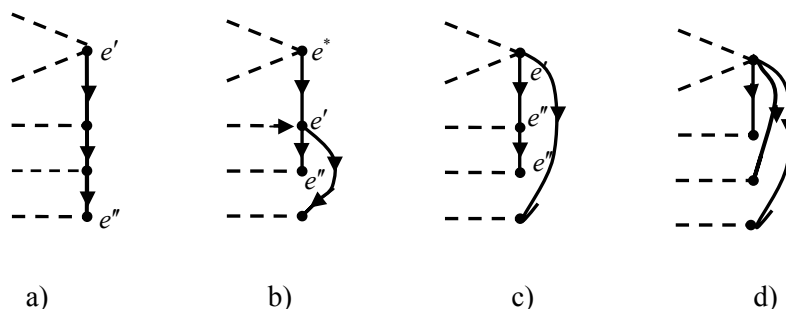
Rozpatrzmy taką warstwę q^* (rys. 6a), że

$$(\exists! e' \in E(q^*) : q(e') = 2/1) \wedge (\exists! e'' \in E(q^*) : q(e'') = 1/0) \wedge (\varphi_1(q^*) \leq 3).$$

Ponieważ liczebność grupy węzłowej, dowolnego grafu ze zbioru $\bar{G}^*(1, 1; r^*, 3)$, nie jest większa od dwóch, to

$$\begin{aligned} & \| \mathbb{S}_2^B(4 + \| q^* \| | \varphi(q^*), q^*, G) \| = \\ & = \sum_{r^*=1}^{\varphi(q^*)} \sum_{\lambda \in \Lambda^*(\varphi(q^*))} C(\lambda) \cdot [\| \bar{G}^*(1, 1; r^*, \varphi(q^*)) \| - 2^{-1} \cdot \| \bar{G}^*(1, 1; r^*, \varphi(q^*) | 2) \|], \end{aligned} \quad (5)$$

bowiem liczba ciągów, które można utworzyć z etykiet węzłów będących śladami warstwy q^* , jest równa sumie ciągów $C(\lambda)$, jakie można utworzyć z elementów każdego multizbioru o ciągu krotności równym λ . Dla przykładu $\| \mathbb{S}_2^B(8 | \bullet, \{2/1, 1/1, 1/1, 1/0\}, G_1) \| = 1 \cdot 6 + 3 \cdot 18 + 3! \cdot (6-1)$.



Rys. 6. Przykłady warstw nadgrafów

Rozpatrzmy warstwę $\{2/1, 1/2, 1/0, 1/0\}$ (rys. 6b). Zauważmy, że

$$\begin{aligned} & \| \mathbb{S}_2^B(8 | \varphi(q), \{2/1, 2/2, 1/0, 1/0\}, G) \| = \\ & = \| \bar{G}^*(1, 1; 1, 3) \| + 3 \cdot \| \bar{G}^*(1, 1; 2, 3) \| + 2 \cdot \| \bar{G}^*(1, 1; 3, 3) \|, \end{aligned} \quad (6)$$

bowiem jeżeli węzły e' i e'' nie mają wspólnego śladu, to indukowane są po dwa (zarówno dla przypadku, gdy $r^* = 2$, jak i dla przypadku, gdy $r^* = 3$) nadgrafy – zależnie od tego, który z tych węzłów jest następnikiem węzła e^* .

Zauważmy (rys. 6c), że

$$\begin{aligned} & \| \mathbb{S}_2^B(8 | \varphi(q), \{2/2, 1/1, 1/0, 1/0\}, G) \| = \\ & = \| \bar{G}^*(1, 1; 1, 3) \| + 7 \cdot \| \bar{G}^*(1, 1; 2, 2) \| - \| \bar{G}^*(1, 1; 2, 2 | 2) \|, \end{aligned} \quad (7)$$

bowiem jeżeli $r^\bullet = 1$, to liczba generowanych nadgrafów jest równa liczebności zbioru $\bar{G}^\bullet(1,1;1,3)$, natomiast jeżeli $r^\bullet = 2$, to w każdym z trzech przypadków (gdy węzły $e'ie''$; $e'ie'''$ albo $e''ie'''$ mają wspólny ślad) generowanych jest $\|\bar{G}^\bullet(1,1;2,2)\|$ nadgrafów, a w przypadku, gdy $r^\bullet = 3$, liczba generowanych nadgrafów równa się $(4-2) \cdot 2 \cdot \|\bar{G}^\bullet(1,1;2,2)\| - \|\bar{G}^\bullet(1,1;2,2|2)\|$.

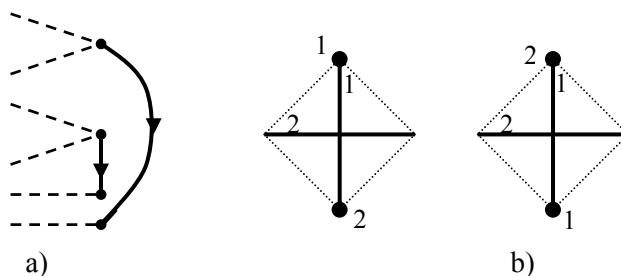
Łatwo zauważyć (rys. 6d), że

$$\|\mathbb{S}_2^B(5 + \varphi_1 | \bullet, \{2/\varphi_1, 1/0, \dots, 1/0\}, G)\| = \sum_{r^\bullet=1}^{\varphi_1} \|\bar{G}^\bullet(1,1; r^\bullet, \varphi_1)\| \quad (8)$$

Przypiszmy śladom warstwy $\{2/1, 2/1, 1/0, 1/0\}$ (rys. 7a) zarówno wagi, jak i barwy w taki sposób, że ślady przyległych węzłów warstwy, mają taką samą barwę. Teraz staje się oczywiste, że (tylko dla grafu G_1) istnieją (dokładnie) dwa ślady podobne (rys. 7b), a więc

$$\begin{aligned} & \|\mathbb{S}_2^B(8 | \varphi(q), \{2/1, 2/1, 1/0, 1/0\}, G)\| = \\ & = \|\bar{G}^\bullet(1,2;2,2)\| + \|\bar{G}^\bullet(1,2;1,2)\| + \|\bar{G}^\bullet(2,2;1,2)\| + \\ & \quad + 2 \cdot \|\bar{G}^\bullet(2,2;2,2)\| - \partial(G) \end{aligned} \quad (9)$$

przy czym $\partial(G_1) = 1$ oraz $\partial(G_2) = 0$.



Rys. 7. a)-warstwa $\{2/1, 2/1, 1/0, 1/0\}$; b)-ślady warstwy w grafie G_1 (jednakowe etykiety oznaczają jednakową barwę)

Zauważmy, że jeżeli $1 \leq \|q^2(q)\| < \|q\|$, gdzie $q^2(q) = \{q' \in q : q' = 2/0\}$, to

$$\begin{aligned} & \|S_2^B(4+\|q\| \mid \varphi(q), q, G)\| = \\ & = \sum_{p=1}^{q^2(q)} \binom{6}{p} \cdot \|S_2^B(4+\|q \setminus q^2(q)\| \mid \bullet, q \setminus q^2(q), G)\| \end{aligned} \quad (10)$$

Dla przykładu

$$\|S_2^B(8 \mid \varphi(q), \{2/0, 2/0, 2/1, 1/0\}, G)\| = \sum_{p=1}^2 \binom{6}{p} \cdot \|S_2^B(6 \mid (1,1), \{2/1, 1/0\}, G)\|.$$

Do osiągnięcia wyznaczonego celu pozostaje jeszcze określenie sposobu generowania nadgrafów, które mają przedłużenia ($\Psi_2(q, k-4) \neq \emptyset$).

Zauważmy, że przedłużenia ψ' i ψ'' indukują nadgrafy podobne wtedy i tylko wtedy, gdy ich korzenie (ślady w warstwie) są węzłami podobnymi lub mają węzeł wspólny, a pozostałe (dwa) korzenie są węzłami podobnymi.

Tak więc:

$$\|S_2^B(7 \mid (0,2), \bullet, G)\| = \|S_2^B(6 \mid (0,2), \bullet, G)\|, \quad (11)$$

$$\|S_2^B(7 \mid (1,1), \bullet, G)\| = \|S_2^B(6 \mid (1,1), \bullet, G)\|, \quad (12)$$

$$\|S_2^B(8 \mid (1,1), \bullet, G)\| = \|\Psi(\{2/1, 1/0\}, 2)\| \cdot \|S_2^B(6 \mid (1,1), \bullet, G)\|, \quad (13)$$

bowiem $\mathbb{Q}((1,1)) = \{2/1, 1/0\}$, a dla warstwy o charakterystyce $\{2/1, 1/0\}$, nie istnieją węzły podobne.

Zauważmy, że przedłużenie $\psi' \in \Psi_2(\{2/2, 1/0, 1/0\}, 1)$ (rys. 3a) generuje tyle nadgrafów, ile jest grafów G o ważonej gałęzi i co najwyżej dwóch węzłach oznaczonych różnymi barwami (węzeł może być oznaczony dwoma barwami). Barwa węzła rozróżnia ślady węzłów przedłużenia ψ' o charakterystykach 1/1 i 1/0 (w przypadku, gdy węzły te nie mają wspólnego śladu). Z formalnego punktu widzenia jednoznaczne przyporządkowanie barw węzłom można uważać za opisanie pewnej funkcji $h: A \rightarrow H$, gdzie A jest zbiorem węzłów grafu, a H – pewnym zbiorem elementów zwanych „barwami”, przy czym funkcję h można opisać, nie abstrahując od jej jakościowej „barwnej” interpretacji, co jest istotne przy rozstrzygnięciu podobieństwa grafów pokolorowanych.

Tak więc

$$\begin{aligned} & \| \mathbb{S}_2^B(8 | \bullet, \{2/2, 1/0, 1/0\}, G_1) \| = \\ & = 4^2 \cdot (1 + 2^{-1}) + \| \bar{G}_1^\bullet(1, 1; 1, 2) \| + \| \bar{G}_1^\bullet(1, 1; 2, 2) \|, \end{aligned} \quad (14)$$

bowiem liczba takich nadgrafów (grafu G_1), generowanych przez przedłużenia ψ_1 oraz ψ_2 (rys. 3a), wynosi odpowiednio

$$4^2 \cdot \sum_{s=1}^4 s^{-1} \cdot \| \bar{G}_1(1, 1 | s) \| = 4^2 \cdot (1 + 2^{-1}) \text{ oraz } \| \bar{G}_1^\bullet(1, 1; 1, 2) \| + \| \bar{G}_1^\bullet(1, 1; 2, 2) \|,$$

natomiast

$$\begin{aligned} & \| \mathbb{S}_2^B(8 | \bullet, \{2/2, 1/0, 1/0\}, G_2) \| = \\ & = 2 \cdot \| \bar{G}_2^\bullet(1, 1; 1, 2) \| + \sum_{w^*=2}^3 \| \bar{G}_2^\bullet(1, 1; 2, w^*) \|, \end{aligned} \quad (15)$$

bowiem liczba grafów G o ważonej gałęzi i dokładnie dwóch węzłach, oznaczonych różnymi barwami jest równa $\| \bar{G}^\bullet(1, 1; 2, 3) \|$.

W analogiczny sposób otrzymujemy:

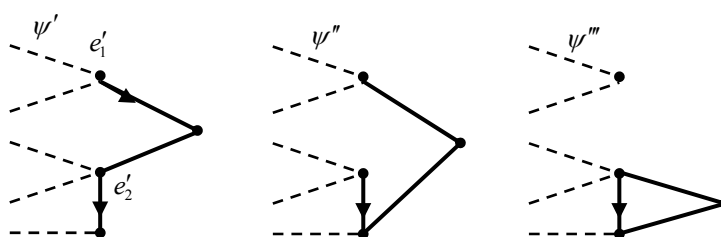
$$\begin{aligned} & \| \mathbb{S}_2^B(8 | \bullet, \{2/1, 1/1, 1/0\}, G) \| = \\ & = \| \Psi_2(\{2/1, 1/1, 1/0\}, 1) \| \cdot (\| \bar{G}^\bullet(1, 1; 1, 2) \| + \| \bar{G}^\bullet(1, 1; 2, 3) \|) \end{aligned} \quad (16)$$

$$\| \mathbb{S}_2^B(8 | (0, 3), \bullet, G) \| = \| \bar{G}(1, 3) \| + 2 \cdot \| \bar{G}(2, 3) \| + 3 \cdot \| \bar{G}(3, 3) \| \quad (17)$$

oraz

$$\begin{aligned} & \| \mathbb{S}_2^B(8 | (1, 2), \bullet, G) \| = \\ & = \| \Psi_2(\{2/0, 2/1, 1/0\}, 1) \| \cdot \| \mathbb{S}_2^B(7 | (1, 2), \bullet, G) \| - \| \bar{G}^\bullet(1, 2; 1, 1) \|, \end{aligned} \quad (18)$$

bowiem nadgrafy, indukowane przez przedłużenia ψ'' i ψ''' (rys.8), są podobne wtedy i tylko wtedy, gdy węzły e' i e'' , mają wspólny ślad.

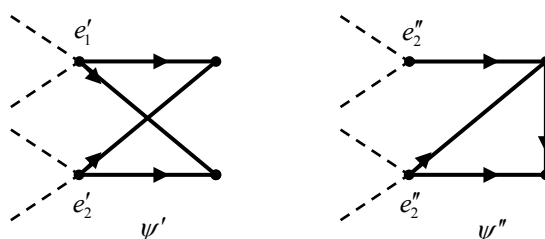


Rys. 8. Przedłużenia zbioru $\Psi_2(q(1,2),1)$

Rozpatrzmy (w końcu) przypadek, gdy $k - (\|q\| + 4) > 1$ oraz warstwa ma węzły o jednakowej charakterystyce.

Zbiór $\Psi_2(q(0,2),2)$ zawiera dwa przedłużenia (rys. 9). Śladem każdego przedłużenia może być gałąź o wadze równej dwa lub dwie gałęzie o sumie wag równej dwa, przy czym węzeł e_1'' (albo e_2'' , $\mu^+(e_1'') \neq \mu^+(e_2'')$) przedłużenia ψ'' należy przypisać gałęzi, która jest jego śladem, co jest równoważne zwiększeniu o jeden wagi tej gałęzi. Tak więc

$$\|\mathbb{S}_2^B(8|(0,2), \bullet, G)\| = 2 \cdot \|\bar{G}(1,2)\| + \|\bar{G}(2,2)\| + \|\bar{G}(2,3)\|. \quad (19)$$



Rys. 9. Przedłużenia zbioru $\Psi_2(q(0,2),2)$

Po wykonaniu obliczeń okazuje się, że szeregi przeliczające, 2-optimalne struktury OD typu BGM, których składową silnej spójności jest struktura $G \in \{G_1, G_2\}$ (rys. 1) mają postać

$$\mathbb{S}_2^B(x|G_1) = x^4 + 2x^5 + 13x^6 + 105x^7 + 1031x^8 + \dots \quad (20)$$

oraz

$$S_2^B(x|G_2) = x^4 + 6x^5 + 45x^6 + 407x^7 + 4041x^8 + \dots, \quad (21)$$

a więc szereg przeliczający 2-optymalne struktury OD typu BGM, których składowa silnej spójności jest rzędu czwartego, ma postać

$$S_2^B(x) = 2x^4 + 8x^5 + 58x^6 + 512x^7 + 5072x^8 + \dots. \quad (22)$$

4. Podsumowanie

Spójna m -optymalna struktura OD (zarówno typu BGM jak i PMC) ma dokładnie jedną składową silnej spójności (która jest strukturą m -optymalną, określonego typu), w której węzłach zagnieżdżone są korzenie (źródła) takiego digrafu acyklicznego, że każdy podgraf, utworzony przez usunięcie węzła bez następników, jest również strukturą m -optymalną danego typu.

Tak więc struktura 1-optymalna jest cyklem zorientowanym (rzędu co najmniej trzeciego), w którego węzłach zagnieżdżone są korzenie dendrytów. Struktury 1-optymalne można przeliczać korzystając z szeregu przeliczającego drzewa z korzeniem, podziałów liczb oraz ciągów liczb cyklicznie różnych [6].

Wiadomo [6], że szereg przeliczający struktury 1-optymalne ma postać

$$S_1(x) = x^3 + 2x^4 + 5x^5 + 15x^6 + 40x^7 + 118x^8 + 341x^9 + 970x^{10} + 2792x^{11} + \\ + 7927x^{12} + 22540x^{13} + \dots$$

Przeliczanie struktur więcej niż 1-optymalnych napotyka na dwie zasadnicze przeszkody. Pierwszą z nich jest konieczność wyznaczenia zbioru składowych silnej spójności, które mogą indukować strukturę określonego rzędu i typu oraz zbadanie przekształceń automorficznych każdej z takich składowych. Zauważmy, że wykonanie tego zadania jest łatwiejsze dla struktur typu BGM niż PMC. Drugą przeszkodą (chyba większą niż pierwsza) jest określenie związków między podobieństwem nadgrafów a ich śladami w składowej silnej spójności (tych nadgrafów).

Z powyższego wynika, że przeliczanie 2-optymalnych struktur OD typu BGM jest zadaniem stosunkowo łatwym (w porównaniu z przeliczaniem 2-optymalnych struktur typu PMC lub struktur więcej niż 2-optymalnych).

W niniejszym artykule zaproponowano metodę określania związków między podobieństwem nadgrafów, a ich śladami za pomocą grafów ważonych i kolorowanych. Zamiast określania przekształceń automorficznych określonej

składowej silnej spójności (o nietrywialnej grupie węzłowej), generowane są dla niej grafy o określonej liczbie (oraz sumie wag) gałęzi i węzłów ważonych. Działania na takich grafach pozwalają rozstrzygać o podobieństwie indukowanych nadgrafów.

Trudności w przeliczeniu 2- optymalnych niesilnie spójnych struktur OD typu BGM (i to tylko do rzędu ósmego) charakteryzują trudności, które trzeba by przezwyciężyć, aby przeliczyć inne struktury OD (typu BGM lub PMC, o wyższej krotności diagnostycznej lub (i) wyższego rzędu).

Zauważmy, że (w rozpatrzonym przypadku) wszystkie 2- optymalne struktury OD typu BGM są indukowane tylko przez jedną z dwóch silnie spójnych struktur rzędu czwartego, przy czym jedna z nich jest strukturą o trywialnej grupie węzłowej. Z pracy [9] wiadomo natomiast, że liczby $\|\tilde{G}_m^B(k')\|$ oraz $\|\tilde{G}_m^P(k')\|$ kanonicznych reprezentantów klas podobieństwa, silnie spójnych, m -optymalnych, gdzie $2 \leq m \leq 4$, struktur OD (odpowiednio typu BGM oraz PMC) rzędu k' , które indukują struktury rzędu ósmego, są następujące:

$$\begin{aligned} \|\tilde{G}_3^B(5)\| &= \|\tilde{G}_3^B(6)\| = 5; \|\tilde{G}_4^B(6)\| = 14; \|\tilde{G}_4^B(7)\| = 59; \|\tilde{G}_4^B(8)\| = 11; \\ \|\tilde{G}_2^P(5)\| &= 8; \|\tilde{G}_2^P(6)\| = 12; \|\tilde{G}_2^P(7)\| = 16; \|\tilde{G}_2^P(8)\| = 23; \|\tilde{G}_3^P(7)\| = 153; \\ \|\tilde{G}_3^P(8)\| &= 440. \end{aligned}$$

Próba generowania (niektórych) zbiorów $\tilde{S}_m^B(k')$ oraz $\tilde{S}_m^P(k')$, silnie spójnych, m -optymalnych, gdzie $2 \leq m \leq 4$, struktur OD (odpowiednio typu BGM oraz PMC) rzędu k' , które indukują struktury rzędu ósmego, dała następujące rezultaty: $\|\tilde{S}_3^B(5)\| = 5$; $\|\tilde{S}_3^B(6)\| = 30$; $\|\tilde{S}_4^B(6)\| = 16$; $\|\tilde{S}_2^P(5)\| = 26$; $\|\tilde{S}_2^P(6)\| = 517$. Wyników tych nie można (jeszcze) traktować jako pewne.

Literatura

- [1] Barsi F., Grandoni F., Maestrini P.: *A Theory of Diagnosability of Digital Systems*, IEEE Trans. On Comput. 6, 1976, s.585-593.
- [2] Harary F., Palmer E.: *Graphical Enumeration*, New York and London, Academic Press, 1973.
- [3] Krawczyk H.: *Analiza i synteza samodiagnozowalnych systemów komputerowych* Zeszyty Naukowe Politechniki Gdańskiej, Elektronika nr 64, Gdańsk, 1987.
- [4] Kulesza R.: *Niektóre własności grafów opiniowania diagnostycznego*, Krajowy Kongres Metrologii, Gdańsk'98, 1998, tom 5, s.81-88.

- [5] Kulesza R.: *Podstawy diagnostyki sieci logicznych i komputerowych*, Instytut Automatyki i Robotyki, Wydział Cybernetyki Wojskowej Akademii Technicznej, Warszawa, 2000, s.222.
- [6] Kulesza R.: *Metoda przeliczania 1- optymalnych struktur opiniowania diagnostycznego*, Biuletyn Instytutu Automatyki i Robotyki, Wojskowa Akademia Techniczna, Warszawa, 2001, nr 16, s.19-34.
- [7] Kulesza R.: *Niektóre własności 1-diagnostowalnych struktur typu PMC*, Biuletyn Instytutu Automatyki i Robotyki, Wojskowa Akademia Techniczna, Warszawa, 2003, nr 18, s.3-18.
- [8] Kulesza R.: *Struktury samodiagnostowalne w technice cyfrowej*, diag'2003: V Krajowa Konferencja „Diagnostyka Techniczna Urządzeń i Systemów”, 13-17 października 2003, Ustroń, s.165-173.
- [9] Kulesza R.: *Problemy przeliczania optymalnych struktur opiniowania diagnostycznego*, Biuletyn Instytutu Automatyki i Robotyki, Wojskowa Akademia Techniczna, Warszawa, 2004, nr 20.
- [10] Zieliński Z.: *Komputerowo wspomagane wyznaczenie najtańszych 2-diagnostowalnych struktur typu PMC*, Biuletyn Instytutu Automatyki i Robotyki, Wojskowa Akademia Techniczna, Warszawa, 2003, nr 18, s.33-44.

Recenzent: prof. dr hab. inż. Stanisław Paszkowski

Praca wpłynęła do redakcji: 12.10.2004