

Problemy przeliczania optymalnych struktur opiniowania diagnostycznego

Roman KULESZA

Zakład Automatyki, Instytut Teleinformatyki i Automatyki WAT,
ul. Kaliskiego 2, 00-908 Warszawa

STRESZCZENIE: Rozpatrzono niektóre problemy występujące przy komputerowym przeliczaniu optymalnych struktur opiniowania diagnostycznego (struktur OD). Przedstawiono sposób wybrania kanonicznych reprezentantów klas podobieństwa optymalnych struktur OD (zarówno typu PMC jak i BGM), które nie są silnie spójne oraz są silnie spójne, oraz określono liczebności zbiorów takich reprezentantów dla krotności diagnostycznej nie większej od czterech i rzędu struktury nie większego od ośmiu. Przedstawiono sposób wykrywania (redukowania) struktur podobnych (izomorficznych).

1. Wprowadzenie

Przeliczanie optymalnych struktur opiniowania diagnostycznego (struktur OD) zalicza się zarówno do problemów teorii grafów, jak i do problemów diagnostyki systemów. Właściwości struktur OD istotnie ograniczają analityczne możliwości ich przeliczania, skłaniając do poszukiwania rozwiązań, nawet tylko cząstkowych, za pomocą metod komputerowego generowania struktur. Powoduje to, że przeliczanie struktur OD rodzi problemy zaliczane do dziedziny nazywanej inteligencją obliczeniową, której obszarem zainteresowań są, pojmowane w szerokim sensie, struktury danych. Formalnie struktury OD stanowią pewną klasę unigrafów zorientowanych bez pętli.

Związek struktur OD z diagnostyką systemów, a tym samym i nazwa, wywodzi się stąd, że jeżeli struktura OD jest tak zwaną strukturą *m-diagnozowalną*, to z wyników wzajemnego testowania się elementów systemu (zgodnego z łukami grafu) można wywnioskować, które z elementów systemu są niezdatne, pod warunkiem, że nie jest ich więcej niż m . Opinia o elemencie

testowanym jest, w pewnych sytuacjach, losowa – zależy (w określony sposób) zarówno od jego stanu niezawodnościowego, jak i od stanu niezawodnościowego elementu opiniującego (testującego). Zależnie od charakteru tej zależności wyróżnia się struktury OD typu (modelu) PMC (Preparata F.P., Metze G., Chien R.T. [11]) oraz typu BGM (Barsi F., Grandoni F., Maestrini P. [2]). Strukturę OD nazywa się strukturą *m*-optymalną rzędu *k*, gdzie *k* – liczba węzłów grafu, jeżeli (wśród struktur OD rzędu *k*) jest taką strukturą *m*-diagnozowalną, która ma minimalną liczbę łuków.

Na temat struktur OD napisano wiele prac. Są dobrze znane zarówno warunki ich istnienia, jak i metody wnioskowania z wyników opiniowania, które to właściwie (począwszy od tak zwanych zagadek bizantyjskich) zapoczątkowały teoretyczne badania nad takimi strukturami. Niewiele jednak można powiedzieć o szeregach przeliczających struktury OD. Wynika to stąd, że analityczne metody, w tym przypadku, są bezsilne (z wyjątkiem struktur 1-optymalnych oraz innych, ale małego rzędu). Sytuacja ta może ulec zmianie przez komputerowe generowanie struktur OD, co z uwagi na „złośliwe” cechy takich struktur może dodatkowo przyczynić się do wzbogacenia metod komputerowego generowania innych struktur.

Do zasadniczych problemów warunkujących efektywne, komputerowe generowanie struktur o określonych własnościach należy sposób wybrania kanonicznych reprezentantów klas podobieństwa tych struktur oraz sposób redukcji rozwiązań (wyników) podobnych (izomorficznych).

Celem niniejszej pracy jest wybranie kanonicznych reprezentantów klas podobieństwa optymalnych struktur OD (zarówno typu PMC jak i BGM), które nie są silnie spójne oraz są silnie spójne, oraz określenie liczebności zbiorów takich reprezentantów dla $m \leq 4$ i $k \leq 8$.

2. Własności optymalnych struktur opiniowania diagnostycznego

W niniejszej pracy używa się pojęć i symboli stosowanych w pracach [6] – [9].

Graf $G = \langle E, U \rangle$ opisuje *m*-diagnozowalną strukturę OD typu PMC wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\forall n', n'' \in N^m \exists e' \in E^0(n', n'') : \Gamma(e') \cap \tilde{E}(n', n'') \neq \emptyset \quad (1)$$

oraz – typu BGM wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\forall n', n'' \in N^m [(\exists e' \in E^0(n', n'') : \Gamma(e') \cap \tilde{E}(n', n'') \neq \emptyset) \vee (\exists \langle e'', e''' \rangle \in U : (\{e'', e'''\} \subset E^\alpha(n')) \Rightarrow (\{e'', e'''\} \subset E^{\bar{\alpha}}(n'')))], \quad (2)$$

gdzie:

$$E^0(n', n'') = \{e \in E : [n(e|n') = n_0(e)] \wedge [n(e|n'') = n_0(e)]\},$$

$$E^1(n', n'') = \{e \in E : [n(e|n') \neq n_0(e)] \wedge [n(e|n'') \neq n_0(e)]\},$$

$$\tilde{E}(n', n'') = \{e \in E : [n(e|n') = n_0(e)] \Rightarrow [n(e|n'') \neq n_0(e)]\},$$

$$E^\alpha(n^*) = \{e \in E : n(e|n^*) = \alpha\}, \quad \alpha \in \{0, 1\},$$

$n(e|n^*)$ oznacza stan niezawodnościowy elementu e przy stanie niezawodnościowym systemu $n^* \in N^m$, gdzie N^m jest zbiorem takich stanów systemu, w których liczba niezdatnych elementów nie jest większa niż m .

Warunkiem koniecznym spełnienia zależności (1) oraz (2) jest (odpowiednio):

$$(\|E\| \geq 2 \cdot m + 1) \wedge (\mu^-(e) \geq m, e \in E) \quad (3)$$

oraz

$$(\|E\| \geq m + 2) \wedge (\mu^-(e) \geq m, e \in E), \quad (4)$$

gdzie $\mu^-(e)$ oznacza stopień wejściowy wężła e w grafie G , a więc liczbę elementów systemu, które opiniują (testują) element e .

Struktura OD jest strukturą m -optymalną rzędu $\|E\|$, jeżeli

$$\mu^-(e) = m, e \in E. \quad (5)$$

Dalej będziemy rozpatrywać spójne optymalne struktury OD.

Optymalna struktura OD ma dokładnie jedną składową silnej spójności rzędu nie mniejszego od $m + 2$ (dla modelu BGM) oraz od $2m + 1$ (dla modelu PMC).

Tak więc struktura OD jest strukturą 1-optymalną dla modelu BGM wtedy i tylko wtedy, gdy jest strukturą 1-optymalną dla modelu PMC, natomiast jeżeli $m > 1$, to struktura m -optymalna dla modelu BGM nie musi być strukturą m -optymalną dla modelu PMC (nawet wtedy, gdy $\|E\| \geq 2m + 1$), bowiem jej składowa silnej spójności może być rzędu $k' < 2m + 1$.

Dalej, mówiąc struktura m -optymalna ($m \geq 2$) typu BGM, będziemy mieć na myśli spójną m -optymalną strukturę OD, która spełnia zależności (2) oraz (5) i której składowa silnej spójności ma rząd mniejszy od $2m + 1$. Takie rozgraniczenie m -optymalnych struktur OD typu BGM i typu PMC jest konieczne z uwagi na przeliczanie struktur OD, bowiem w zbiorze silnie spójnych struktur OD typu PMC (spełniających zależność (1)) istnieje struktura, której dowolne dwa węzły są przyległe, a więc struktura, która spełnia również zależność (2).

3. Wyznaczanie kanonicznych reprezentantów klas podobieństwa optymalnych struktur opiniowania diagnostycznego, które nie są silnie spójne

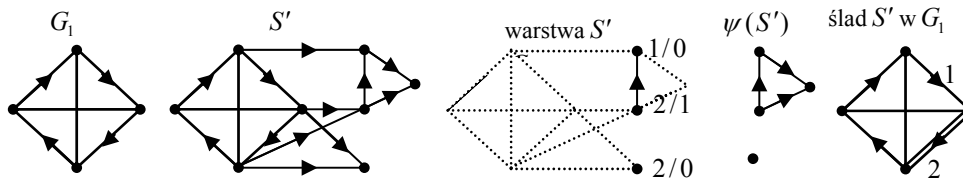
Niech $\mathbb{S}_m(k, k', S)$, gdzie $k' < k$, $S \in \check{\mathbb{S}}_m(k')$, oznacza zbiór m -optymalnych struktur OD rzędu k , których składową silnej spójności jest m -optymalna struktura S rzędu k' (typu PMC albo BGM). Struktura $S' \in \mathbb{S}_m(k, k', S)$ jest takim nadgrafem grafu S , że każdy podgraf $\langle E(S') \setminus \{e\} \rangle_{S'}$, gdzie $e \in E(S') : \Gamma_{S'}\{e\} = \emptyset$, jest m -optymalną strukturą rzędu $k - 1$ (rys. 1). Mówimy, że struktura $S \in \check{\mathbb{S}}_m(k')$ indukuje zbiór $\mathbb{S}_m(k, k', S)$. Podobieństwo struktur indukowanych przez strukturę S , zależy zarówno od jej grupy węzłowej (zbioru przekształceń automorficznych), jak i od pewnych cech nadgrafu S' , które postaramy się określić.

Graf opisany $\langle G(S'); q(S') \rangle$, gdzie $G(S') = \langle \{e' \in E(S') \setminus E(S) : \Gamma_{S'}^{-1}(e') \cap E(S) \neq \emptyset\} \rangle_{S'}$ oraz $q(S') = \{\mu_{S'}^-(e) / \mu_{G(S')}^+(e) : e \in E(G(S'))\}$, nazywamy *warstwą* nadgrafu S' , a graf opisany $\psi(S') = \langle G^*; q(S') \rangle$, gdzie $G^* = \langle E(S') \setminus E(S) \rangle_{S'}$, – jego *przedłużeniem*.

Śladem nadgrafu S' w grafie S nazywamy tak pokolorowany graf S , że każdemu podgrafowi $\langle \{\Gamma^{-1}(e)\} \rangle_{S'}$, $e \in E(G(S'))$, przypisana jest inna barwa (rys. 1).

Jako kanoniczny reprezentant klasy podobieństwa struktury S' , wybierzemy taki wektor $\varphi(S') = (\varphi_1, \dots, \varphi_m)$, gdzie $\varphi_m \geq 1$; $(m \geq 3) \wedge (\varphi_{m-1} = 0) \Rightarrow (\varphi_{m-2} \leq \varphi_m)$; $\varphi_1 + \dots + \varphi_m \leq k - (m + 2)$, że :

$$\|\{e \in E(S') \setminus E(S) : \|\Gamma_{S'}^{-1}(e) \cap E(S)\| = p\}\| = \varphi_p, 1 \leq p \leq m.$$



Rys. 1. Struktura $S' \in \mathbb{S}_2(8, 4, S)$ jest takim nadgrafem grafu $G_1 \in \tilde{\mathbb{S}}_2^B(4)$, że $\varphi(S') = (1, 2)$ oraz $q(S') = \{2/1, 2/0, 1/0\}$

Zauważmy, że przedłużenie nadgrafu S' zależy tylko od jego warstwy oraz od wartości $k - (k' + \|q\|)$ (przedłużenie rzędu $\|q\|$ jest równoważne warstwie). Zbiór $q(S')$, gdzie $\|q(S')\| = \varphi_1(S') + \dots + \varphi_m(S')$, który nazywamy *charakterystyką warstwy* pełni rolę kanonicznego reprezentanta podklasy podobieństwa struktury S' i jednoznacznie odwzorowuje graf $G(S')$. Ślad nadgrafu S' w grafie S dla $m=2$ wygodnie jest przedstawiać jako graf o ważonych (zamiast kolorowanych) gałęziach i węzłach (rys. 1).

Niech $\bar{\Lambda}^a(b)$ oznacza zbiór takich rozkładów $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_a)$ liczby naturalnej $b \geq a$ na a składników prostych, że $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_a \geq 0$, $\Omega(\lambda)$ – zbiór permutacji składników rozkładu λ , a $\Phi_m^{k-k'}$ – zbiór kanonicznych reprezentantów klasy podobieństwa nadgrafu $S' \in \mathbb{S}_m(k, k', S)$.

Z własności nadgrafu $S' \in \mathbb{S}_m(k, k', S)$ wynika, że

$$\begin{aligned} \Phi_m^{k-k'} = \{ \omega \in \Omega(\lambda) : (\lambda \in \bar{\Lambda}^m(k-k')) \wedge \\ \wedge (\forall 1 \leq p \leq m-1 : \omega_{p+1} + \dots + \omega_m \geq (m-p)) \}. \end{aligned} \quad (6)$$

Z zależności (6) dla $2 \leq m \leq 4$ oraz $1 \leq k - k' \leq 6 - m$ otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \Phi_2^1 &= \{(0, 1)\}; \\ \Phi_2^2 &= \{(0, 2), (1, 1)\}; \\ \Phi_2^3 &= \{(0, 3), (0, 2), (1, 2), (1, 1), (2, 1)\}; \\ \Phi_2^4 &= \{(0, 4), (0, 3), (0, 2), (1, 3), (1, 2), (1, 1), (2, 2), (2, 1), (3, 1)\}; \\ \Phi_3^2 &= \{(0, 0, 2), (0, 1, 1)\}; \\ \Phi_3^3 &= \{(0, 0, 3), (0, 1, 2), (1, 0, 2), (1, 1, 1), (0, 2, 1)\}; \\ \Phi_4^1 &= \{(0, 0, 0, 1)\}; \\ \Phi_4^2 &= \{(0, 0, 0, 2), (0, 0, 1, 1)\}. \end{aligned}$$

Wyznaczanie kanonicznych reprezentantów podklasy podobieństwa, nadgrafu S' , jakimi są charakterystyki warstwy $q(S')$, nie następuje kłopotów. Zbiór $\mathbb{Q}(\varphi)$ charakterystyk warstwy zależy (w prosty sposób) od wektora $\varphi \in \Phi_m^{k-k'}$.

Dla przykładu:

$$\begin{aligned}\mathbb{Q}((2,1)) &= \{ \{2/2, 1/0, 1/0\}; \{2/1, 1/1, 1/0\} \}, \\ \mathbb{Q}((1,0,2)) &= \{3/1, 3/1, 1/0\}.\end{aligned}$$

4. Wyznaczanie kanonicznych reprezentantów klas podobieństwa optymalnych, silnie spójnych struktur opiniowania diagnostycznego typu BGM

Niech $\tilde{\mathcal{S}}_m^B(k)$ oznacza zbiór silnie spójnych, m -optymalnych struktur OD typu BGM, rzędu $k \geq m+2$. Ponieważ dla każdej pary węzłów struktury $S \in \tilde{\mathcal{S}}_m^B(k)$ istnieje gałąź, to struktura S ma $C(m,k) = m \cdot k - 2^{-1}k(k-1)$ cykli elementarnych. Tak więc jako kanoniczny reprezentant klasy podobieństwa struktur zbioru $\tilde{\mathcal{S}}_m^B(k)$ możemy wybrać taki graf zwykły $G \in G(k, C(m,k))$ rzędu k o $C(m,k)$ krawędziach, stopnia nie większego niż m , dla którego istnieje taki nadgraf G' , utworzony przez dodanie do grafu G $m \cdot k - 2 \cdot C(m,k)$ łuków, że $G' \in \tilde{\mathcal{S}}_m^B(k)$. Powyższego warunku (dla $2 \leq m \leq 4$, $m+2 \leq k \leq 2m$) nie spełnia tylko taki graf zbioru $G(6,9)$, w którym dwa węzły stopnia czwartego nie są przyległe. Zauważmy, że po to, aby był spełniony warunek, o którym mowa, koniecznym jest, aby w składowej spójności rzędu $k' < k$ grafu $G \in G(k, C(m,k))$ istniał, węzeł stopnia mniejszego od m , bowiem struktura $S \in \tilde{\mathcal{S}}_m^B(k)$ jest taką strukturą silnie spójną, w której stopień każdego węzła jest równy m . Warunek taki jest spełniony, gdyż w przeciwnym razie musiałaby istnieć składowa spójności grafu G rzędu $k' = m+1$ o $2^{-1}m(m+1)$ krawędziach, co przeczy temu, że $k' < k$, bowiem $2^{-1}m(m+1) > C(m,k)$, przy czym $2 \leq m \leq 4$, $m+2 \leq k \leq 2m$.

Z analizy kombinatorycznej wiadomo (G. Pólya), że liczebność zbioru $G(k,C)$ grafów zwykłych rzędu k o C krawędziach jest równa wartości współczynnika zmiennej y^C w szeregu tworzącym $Q(S_k^{(2)}; y)$, uzyskanym z indeksu cyklu $Z(S_k^{(2)}; \xi_1, \dots, \xi_k)$, po podstawieniu $\xi_p = 1 + y^p$, $1 \leq p \leq k$,

gdzie $S_k^{(2)}$ oznacza grupę permutacji, indukowanych przez grupę symetrii S_k , w zbiorze par nieuporządkowanych. Indeksy cykli $Z(S_k^{(2)}; \xi_1, \dots, \xi_k)$, gdzie $2 \leq k \leq 10$, można znaleźć w pracy [3].

Dla przykładu mamy:

$$Z(S_4^{(2)}; \xi_1, \dots, \xi_4) = (4!)^{-1} \cdot (\xi_1^6 + 9 \cdot \xi_1^2 \xi_2^2 + 8 \cdot \xi_3^2 + 6 \cdot \xi_2 \xi_4),$$

a więc

$$Q(S_4^{(2)}; y) = (4!)^{-1} \cdot ((1+y)^6 + 9 \cdot (1+y)^2 \cdot (1+y^2)^2 + 8 \cdot (1+y^3)^2 + 6 \cdot (1+y^2) \cdot (1+y^4)) = 1 + y + 2y^2 + 3y^3 + 2y^4 + y^5 + y^6. \quad (7)$$

Ponieważ¹:

$$Z(S_5^{(2)}; \xi_1, \dots, \xi_5) = (5!)^{-1} \cdot (\xi_1^{10} + 10 \xi_1^4 \xi_2^3 + 20 \xi_1^3 \xi_3^2 + 15 \xi_1^2 \xi_2^4 + 30 \xi_2 \xi_4^2 + 20 \xi_1 \xi_3 \xi_6 + 24 \xi_5^2),$$

$$Z(S_6^{(2)}; \xi_1, \dots, \xi_6) = (6!)^{-1} \cdot (\xi_1^{15} + 15 \xi_1^7 \xi_2^4 + 40 \xi_1^3 \xi_3^4 + 45 \xi_1^3 \xi_2^6 + 90 \xi_1 \xi_2 \xi_4^3 + 120 \xi_1 \xi_2 \xi_3^2 \xi_6 + 144 \xi_5^3 + 15 \xi_1^3 \xi_2^6 + 90 \xi_1 \xi_2 \xi_4^3 + 40 \xi_3^5 + 120 \xi_3 \xi_6^2),$$

to w analogiczny sposób otrzymujemy:

$$Q(S_5^{(2)}; y) = 1 + y + 2y^2 + 4y^3 + 6y^4 + 6y^5 + 6y^6 + 4y^7 + 2y^8 + y^9 + y^{10}; \quad (8)$$

$$Q(S_6^{(2)}; y) = 1 + y + 2y^2 + 5y^3 + 9y^4 + 15y^5 + 21y^6 + 24y^7 + 24y^8 + 21y^9 + 15y^{10} + 9y^{11} + 5y^{12} + 2y^{13} + y^{14} + y^{15} \quad (9)$$

Tak więc: $\|G(4,2)\| = 2$; $\|G(5,5)\| = 6$; $\|G(6,3)\| = 5$ oraz $\|G(6,9)\| = 21$. Analogicznie otrzymujemy: $\|G(7,7)\| = 65$; $\|G(8,4)\| = 11$.

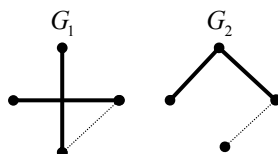
Dla potrzeb niniejszej pracy konieczna jest znajomość jawnej postaci (macierzy przyległości lub postaci graficznej) struktur zbiorów $\tilde{G}^B(4,2)$, $\tilde{G}^B(5,5)$, $\tilde{G}^B(6,3)$ oraz $\tilde{G}^B(6,9)$, gdzie $\tilde{G}^B(k, C(m,k))$ oznacza zbiór kanonicznych reprezentantów struktur zbioru $\tilde{S}_m^B(k)$.

Dla zbiorów $\tilde{G}^B(4,2)$, $\tilde{G}^B(5,5)$ i $\tilde{G}^B(6,3)$ można, w zasadzie, domyślić się, jaka jest postać graficzna struktur tych zbiorów – jednak dla zbioru

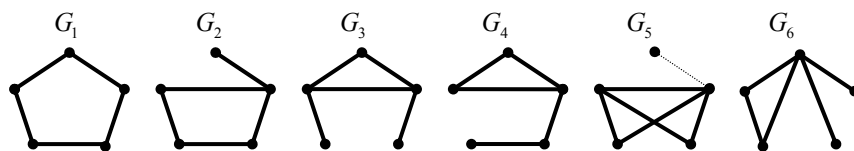
¹ Wzór drugi pracy [10] wydrukowano z błędem

$\tilde{G}^B(6,9)$ koniecznym jest wygenerowanie przez działania na macierzach lub graficznie możliwych struktur zbioru $G(6,9)$, wyeliminowanie struktur stopnia większego niż 4 i takich, których dwa węzły stopnia czwartego nie są przyległe oraz zredukowanie struktur izomorficznych.

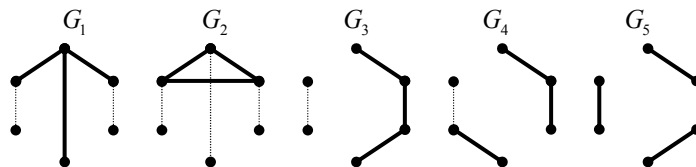
Na rysunkach 2 – 5 przedstawiono (odpowiednio) struktury zbiorów: $G(4,2)$, $G(5,5)$, $G(6,3)$ oraz $G(6,9)$, przy czym: $\tilde{G}^B(4,2)=G(4,2)$, $\tilde{G}^B(5,5)=G(5,5) \setminus G_6$, $\tilde{G}^B(6,3)=G(6,3)$ oraz $\tilde{G}^B(6,9)=G(6,9) \setminus \{G_{15}, \dots, G_{21}\}$.



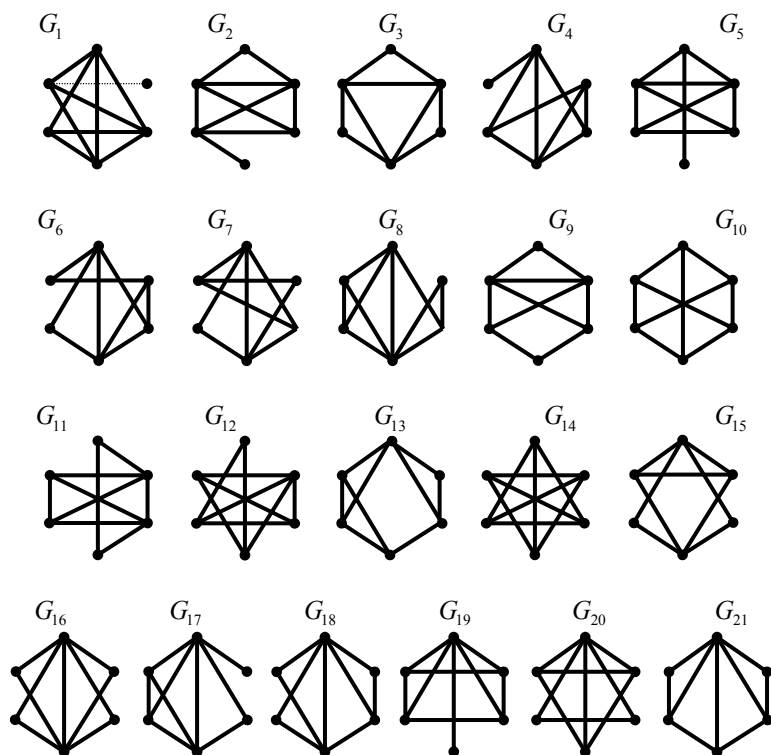
Rys. 2. Grafy zbioru $G(4,2)$, które są kanonicznymi reprezentantami struktur zbioru $\tilde{S}_2^B(4)$



Rys. 3. Grafy zbioru $G(5,5)$, które (z wyjątkiem grafu G_6) są kanonicznymi reprezentantami struktur zbioru $\tilde{S}_3^B(5)$

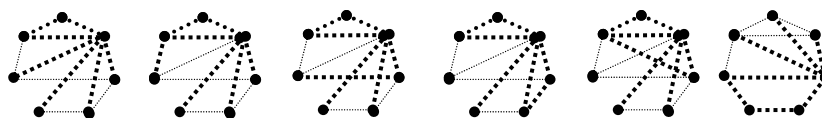


Rys. 4. Grafy zbioru $G(6,3)$, które są kanonicznymi reprezentantami struktur zbioru $\tilde{S}_3^B(6)$

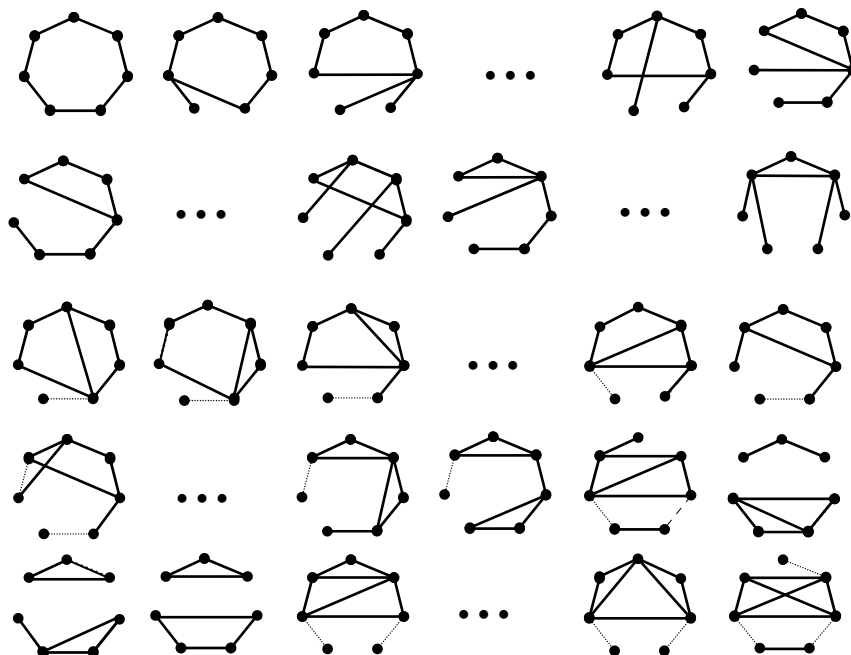


Rys. 5. Grafy zbioru $G(6,9)$, które (z wyjątkiem grafów $G_{15} - G_{21}$) są kanonicznymi reprezentantami struktur zbioru $\tilde{S}_4^B(6)$

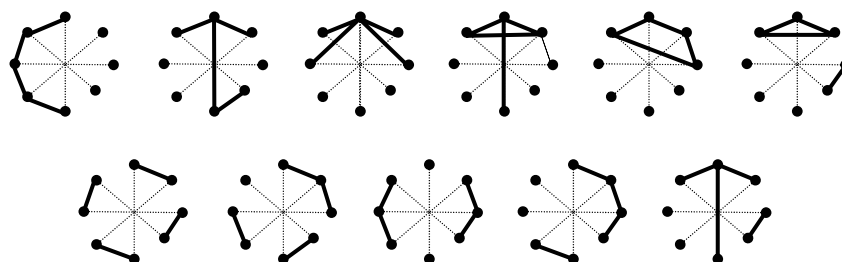
Na rys. 6a przedstawiono grafy zbioru $G(7,7)$, które nie są kanonicznymi reprezentantami struktur zbioru $\tilde{S}_4^B(7)$, a na rys. 6b – 24 wybrane (z 59) grafy, które są kanonicznymi reprezentantami struktur zbioru $\tilde{S}_4^B(7)$.



Rys. 6a. Grafy zbioru $G(7,7)$, które nie są kanonicznymi reprezentantami struktur zbioru $\tilde{S}_4^B(7)$



Rys. 6b. Przykłady grafów zbioru $G(7,7)$, które są kanonicznymi reprezentantami struktur zbioru $\tilde{\mathcal{S}}_4^B(7)$



Rys. 7. Grafy zbioru $G(8,4)$ – wszystkie są kanonicznymi reprezentantami struktur zbioru $\tilde{\mathcal{S}}_4^B(8)$

5. Wyznaczanie kanonicznych reprezentantów klas podobieństwa optymalnych, silnie spójnych struktur opiniowania diagnostycznego typu PMC

Niech $\check{S}_m^P(k)$, gdzie $m \geq 2$, $k \geq 2m + 1$, oznacza zbiór silnie spójnych m -optymalnych struktur OD typu PMC rzędu k . Ponieważ struktura $S \in \check{S}_m^P(k)$ może zawierać C , gdzie $0 \leq C \leq 2^{-1}k(k-1)$, cykli elementarnych (krawędzi), to kanonicznym reprezentantem klasy podobieństwa (*rdzeniem*) struktur zbioru $\check{S}_m^P(k)$ jest taki graf zwykły G rzędu k o C krawędziach, że $\check{S}_m^P(k|G) \neq \emptyset$, gdzie $\check{S}_m^P(k|G)$ oznacza zbiór silnie spójnych, m -optymalnych struktur (OD typu PMC) rzędu k , utworzonych przez uzupełnienie grafu G $k \cdot m - 2C$ łukami.

Warunkiem koniecznym aby graf G był rdzeniem struktur zbioru $\check{S}_m^P(k)$ jest, aby był takim grafem stopnia nie większego niż m , że każda jego składowa spójności rzędu $k' < k$ zawiera węzeł stopnia mniejszego od m . Dla $m = 2$ powyższy warunek konieczny jest zarazem warunkiem wystarczającym.

Niech $\hat{G}_m^P(k)$ oznacza zbiór grafów zwykłych rzędu k , które są kanonicznymi reprezentantami klas podobieństwa struktur zbioru $\check{S}_m^P(k)$.

Zauważmy, że

$$\|\hat{G}_2^P(k)\| = 2 + \sum_{s=2}^k \|\Lambda^s(k)\| = 1 + \|\Lambda(k)\|, \quad (11)$$

bowiem każda składowa spójności grafu $G \in \hat{G}_2^P(k)$ o s , gdzie $2 \leq s \leq k$, składowych spójności musi być drzewem stopnia nie większego niż dwa, a dla $s = 1$ zarówno cykl jak i łańcuch Hamiltona są elementami zbioru $\hat{G}_2^P(k)$.

Z zależności (11), otrzymujemy

$$\hat{G}_2^P(x) = 8x^5 + 12x^6 + 16x^7 + 23x^8 + \dots \quad (12)$$

Przedstawienie grafów zbioru $\hat{G}_2^P(k)$ nie jest zadaniem trudnym. Określenie liczebności zbiorów $\hat{G}_3^P(7)$ i $\hat{G}_3^P(8)$, a tym bardziej przedstawienie grafów tych zbiorów, jest bardziej kłopotliwe.

Wiadomo (S.L. Hakimi, A.T. Amin), że digraf bez pętli rzędu $\|E\| \geq 7$ opisuje 3-optymalną strukturę OD typu PMC wtedy i tylko wtedy, gdy

$$[\forall e \in E : \mu^-(e) = 3] \wedge [(\forall E' \subset E : \|E'\| = k - 4) : \|\Gamma(E')\| \geq 3], \quad (13)$$

a więc las zwykły (zbiór spójnych grafów zwykłych) rzędu $\|E\|$ stopnia nie większego niż trzeci nie jest elementem zbioru $\hat{G}_3^P(\|E\|)$, jeżeli

$$(\exists E' \subset E : \|E'\| = \|E\| - 4) : \|\Gamma(E')\| + (12 - \sum_{e \in \{E \setminus E'\}} \mu(e)) < 3. \quad (14)$$

Tak więc

$$\hat{G}_3^P(k) = L_{\leq 3}(k) \setminus L_3^*(k) \quad (k \geq 7), \quad (15)$$

gdzie $L_{\leq 3}(k)$ oraz $L_3^*(k)$ oznacza odpowiednio zbiór lasów (rzędu k) stopnia nie większego niż trzeci oraz zbiór lasów stopnia trzeciego spełniających zależność (14), bowiem dla lasu stopnia mniejszego niż trzeci $\sum_{e \in \{E \setminus E'\}} \mu(e) \leq 8$.

Zarówno ze względu na określenie liczebności zbioru $\hat{G}_3^P(k)$ jak i jawnej postaci jego elementów wygodnym będzie przedstawienie zależności (15) w postaci

$$\hat{G}_3^P(k) = L_{\leq 3}(k) \setminus \{\hat{L}_3^*(k) \cup \check{\mathbb{R}}_3^*(k)\}, \quad (15')$$

gdzie $\hat{L}_3^*(k)$ oraz $\check{\mathbb{R}}_3^*(k)$ oznaczają odpowiednio zbiór takich lasów (stopnia trzeciego) o liczbie składowych spójności większej niż jeden oraz zbiór takich spójnych grafów zwykłych (stopnia trzeciego), które spełniają zależność (14).

Niech $L_{\leq 2}^d(k)$ oznacza zbiór takich lasów rzędu k , których każda składowa spójności jest niezorientowanym drzewem stopnia nie większego niż dwa, a $L_{\leq 2}(k)$ – zbiór lasów stopnia nie większego niż dwa.

Ponieważ $\|L_{\leq 2}^d(k)\| = \|\Lambda(k)\|$, to szereg przeliczający zbiory $L_{\leq 2}^d(k)$ ma postać

$$L_{\leq 2}^d(x) = x + 2x^2 + 3x^3 + 5x^4 + 7x^5 + 11x^6 + 15x^7 + 21x^8 + \dots, \quad (16)$$

a szereg przeliczający zbiory $L_{\leq 2}(k)$ – postać

$$L_{\leq 2}(x) = x + 2x^2 + 4x^3 + 7x^4 + 11x^5 + 19x^6 + 29x^7 + 44x^8 + \dots, \quad (17)$$

bowiem

$$(3 < k) \Rightarrow (\|L_{\leq 2}(k)\| = \|L_{\leq 2}^d(k)\|)$$

oraz

$$\begin{aligned} \|L_{\leq 2}(k)\| = & \|L_{\leq 2}^d(k)\| + 1 + \nabla(k-4) \sum_{s=1}^{k-3} \|L_{\leq 2}^d(s)\| + \\ & + \|\Lambda_3^2(k)\| + \sum_{p=1}^2 \|\Lambda_3^2(k-p)\| \cdot \|L_{\leq 2}(p)\|, \quad 3 \leq k \leq 8, \end{aligned}$$

gdzie:

$$(a \geq 0) \Rightarrow (\nabla(a) = 1); \quad (a < 0) \Rightarrow (\nabla(a) = 0); \quad \Lambda_3^2(k) = \{\lambda \in \Lambda^2(k) : \lambda_2 \geq 3\}.$$

Niech $\check{\mathbb{R}}_3(k, C)$, gdzie $k \geq 4$, $k-1 \leq C \leq k + \lfloor 2^{-1}k \rfloor$, oznacza zbiór spójnych grafów zwykłych stopnia trzeciego rzędu k o C krawędziach, a $\mathbb{R}_3^B(k, C)$ – zbiór takich grafów zbioru $\check{\mathbb{R}}_3(k, C)$, które są blokami (grafami bez złącza).

Graf zbioru $\mathbb{R}_3^B(k, C)$ można wyznaczyć (wygenerować) dodając krawędź do cyklu rzędu k lub do grafu $G' \in \mathbb{R}_3^B(k', C')$, gdzie $k' < C' < k' + \lfloor 2^{-1}k' \rfloor$, i uzyskując w ten sposób odpowiednio graf zbioru $\mathbb{R}_3^B(k, k+1)$ oraz graf zbioru $\mathbb{R}_3^B(k', C'+1)$ lub – „zagnieżdżając” węzeł w krawędzi grafu $G'' \in \mathbb{R}_3^B(k'', C'')$, $k'' < C'' \leq k'' + \lfloor 2^{-1}k'' \rfloor$, i uzyskując w ten sposób graf $G''' \in \mathbb{R}_3^B(k''+1, C''+1)$. Natomiast graf zbioru $\check{\mathbb{R}}_3(k, C)$ można skomponować (scalić) z bloków stopnia pierwszego (krawędzi) i drugiego (cykli prostych) oraz z drzew stopnia trzeciego z korzeniem stopnia pierwszego i bloków stopnia trzeciego.

W wyniku wygenerowania grafów zbiorów $\mathbb{R}_3^B(k, C)$ oraz $\check{\mathbb{R}}_3(k, C)$ (według algorytmów, których bardziej szczegółowy opis pomijamy w niniejszym artykule) otrzymano wyniki przedstawione w tabelach 1 i 2, a więc szeregi przeliczające:

$$\mathbb{R}_3^B(x) = 2x^4 + 3x^5 + 9x^6 + 17x^7 + 57x^8 + \dots \quad (18)$$

$$\check{\mathbb{R}}_3(x) = 4x^4 + 8x^5 + 27x^6 + 62x^7 + 199x^8 + \dots \quad (19)$$

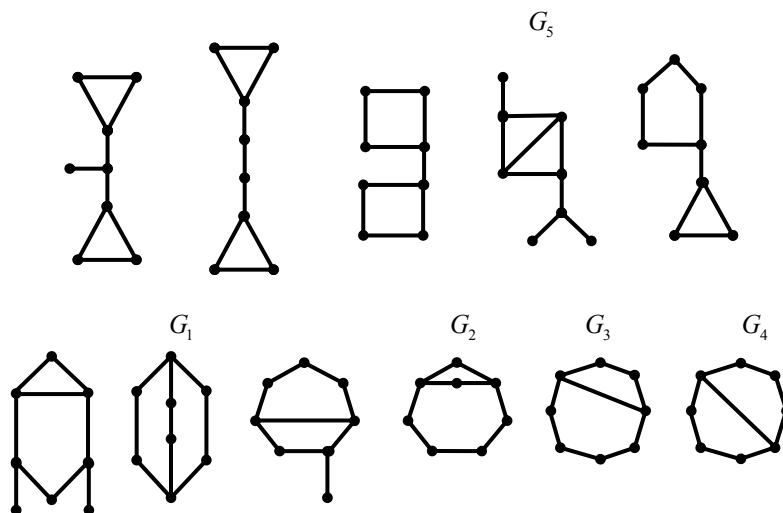
Tabela 1. Liczebność zbioru $\mathbb{R}_3^B(k, C)$ ($k \leq 8$)

k	C							
	5	6	7	8	9	10	11	12
4	1	1	-	-	-	-	-	-
5	-	2	1	-	-	-	-	-
6	-	-	3	4	2	-	-	-
7	-	-	-	4	9	4	-	-
8	-	-	-	-	6	21	23	7

Tabela 2. Liczebność zbioru $\check{\mathbb{R}}_3(k, C)$, $k \leq 8$

k	C									
	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
4	1	1	1	1	-	-	-	-	-	-
5	-	1	3	3	1	-	-	-	-	-
6	-	-	3	8	9	5	2	-	-	-
7	-	-	-	5	16	22	15	4	-	-
8	-	-	-	-	10	35	63	55	29	7

Dla przykładu na rys. 8 przedstawiono jedenastu (z 63) grafów zbioru $\check{\mathbb{R}}_3(8,9)$.



Rys. 8. Przykłady jedenastu (z 63) grafów zbioru $\check{\mathbb{R}}_3(8,9)$ (grafy $G_1 - G_4$ są blokami, a graf G_5 nie jest rdzeniem struktury 3- optymalnej)

Z zależności (17) i (19), otrzymujemy

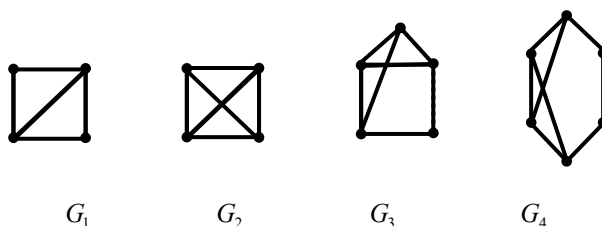
$$L_{\leq 3}(x) = x + 2x^2 + 4x^3 + 11x^4 + 23x^5 + 62x^6 + 150x^7 + 429x^8 + \dots, \quad (20)$$

gdź

$$\|L_{\leq 3}(k)\| = \|\check{\mathbb{R}}_3(k)\| + \|L_{\leq 2}(k)\| + \nabla(k-5) \sum_{s=4}^{k-1} \|\check{\mathbb{R}}_3(s)\| \cdot \|L_{\leq 2}(k-s)\| + \nabla(k-8) \cdot (1 + \dots + \|\check{\mathbb{R}}_3(4)\|), \quad k \leq 8.$$

Wyznamy liczebność zbioru $\hat{L}_3^*(7)$. Z zależności (14) wynika, że jeżeli graf $G \in L_3(7) \setminus \check{\mathbb{R}}_3(7)$ ma składową spójności G' , która jest takim blokiem (stopnia trzeciego), że $(\|E'\| = 4) \Rightarrow (\|E'_{(2)}\| \leq 2)$, $(\|E'\| = 5) \Rightarrow (\|E'_{(2)}\| = 1)$ oraz $\|E'\| = 6 \Rightarrow (\|E'_{(2)}\| = 2)$ i węzły stopnia drugiego są przyległe, gdzie $E'_{(2)}$ – zbiór węzłów stopnia drugiego w grafie G' , to $G \in \hat{L}_3^*(7)$.

Niech $\mathbb{R}_3^{B^*}(k)$, $k \geq 7$, oznacza zbiór bloków, które jeżeli są składową spójności grafu $G \in L_3(k) \setminus \check{\mathbb{R}}_3(k)$, to $G \in \hat{L}_3^*(7)$. Na rys. 9 przedstawiono bloki zbioru $\mathbb{R}_3^{B^*}(7)$.



Rys. 9. Bloki zbioru $\mathbb{R}_3^{B^*}(7)$

Zauważmy również, że jeżeli graf $G \in L_3(7) \setminus \check{\mathbb{R}}_3(7)$ ma składową spójności G'' , która jest takim spójnym nadgrafem bloku $G' \in \{G^* \in \mathbb{R}_3^{B^*}(7) : \|E(G^*)\| < 6\}$, że

$$[G' \in \mathbb{R}_3^B(k', C')] \Rightarrow [G'' \in \check{\mathbb{R}}_3(k' + s, C' + s), 1 \leq s \leq 6 - k'],$$

to $G \in \hat{L}_3^*(7)$.

Tak więc

$$\begin{aligned} \|\widehat{L}_3^*(7)\| &= \sum_{k'=4}^6 \|A(k')\| \cdot \|L_{\leq 3}(7-k')\| + \\ &+ \sum_{\substack{G' \in \mathbb{R}_3^{B^*}(7): \\ \|E(G')\| < 6}} \sum_{s=1}^{6-\|E(G')\|} \|B(G',s)\| \cdot \|L_{\leq 3}(7-\|E(G')\|-s)\| = 16, \end{aligned}$$

gdzie $A(k') = \{G^* \in \mathbb{R}_3^{B^*}(7) : \|E(G^*)\| = k'\}$, a $B(G',s)$ oznacza zbiór takich spójnych nadgrafów bloku G' , które mają $\|E(G')\| + s$ węzłów, bowiem: $\|A(4)\| = 2$; $\|A(5)\| = \|A(6)\| = 1$; $\|B(G_1,1)\| = \|B(G_3,1)\| = 1$; $\|B(G_1,2)\| = 2$; $\|B(G_2,s)\| = 0$ (rys. 9), a wartości $L_{\leq 3}(k^*)$ określone są przez szereg przeliczający (20).

W analogiczny sposób otrzymujemy: $\|\widehat{L}_3^*(8)\| = 43$; $\|\check{\mathbb{R}}_3^*(7)\| = 8$; $\|\check{\mathbb{R}}_3^*(8)\| = 23$, a więc (zgodnie z zależnościami (15') i (20)) szereg przeliczający grafy zwykłe, które są kanonicznymi reprezentantami klas podobieństwa silnie spójnych 3- optymalnych struktur opiniowania diagnostycznego typu PMC ma postać:

$$\widehat{G}_3^P(x) = 126x^7 + 363x^8 + \dots, \quad (21)$$

a dla klasy spójnych grafów zwykłych stopnia trzeciego (w której najczęściej poszukuje się struktury najkorzystniejszej) – postać:

$$\check{G}_3^P(x) = 54x^7 + 176x^8 + \dots. \quad (22)$$

6. Wykrywanie rozwiązań izomorficznych w przypadku silnie spójnych struktur opiniowania diagnostycznego

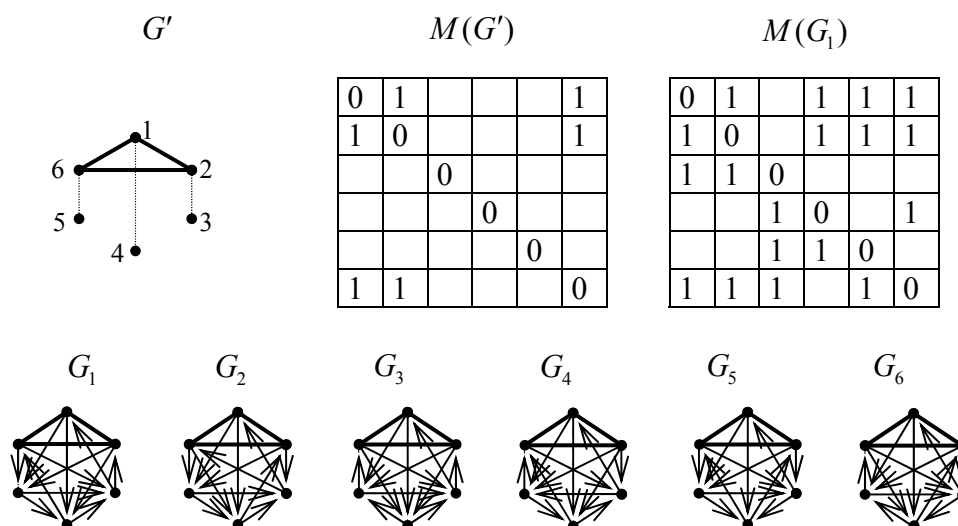
Dla każdego grafu G' , który jest kanonicznym reprezentantem klasy podobieństwa struktur zbioru $\check{\mathbb{S}}_m^x$ (x oznacza P albo B) indukowany jest zbiór możliwych rozwiązań $\mathbb{S}(G')$. Zbiór $\mathbb{S}(G')$ można wyznaczyć albo przez odpowiednie (zgodne z własnościami struktur $\check{\mathbb{S}}_m^x$) uzupełnienie jedynek w macierz przejść $M(G')$, albo łuków w grafie G' .

W zbiorze $\mathbb{S}(G')$ mogą wystąpić struktury podobne (izomorficzne), które powinny być zredukowane, w celu wyznaczenia zbioru $\check{\mathbb{S}}_m(k|G')$, gdzie $\mathbb{S}_m(k|G')$ oznacza podzbiór takich struktur zbioru $\check{\mathbb{S}}_m(k)$, których kanonicznym reprezentantem klasy podobieństwa jest graf G' .

Podstawowym narzędziem do wykrywania rozwiązań podobnych jest podstawienie (permutacja), ale narzędzie to charakteryzuje się dużą złożonością obliczeniową. Z tego powodu stosuje się podział zbioru $\mathbb{S}(G')$ na podklasy (grupy) podobieństwa.

Jednym z efektywnych kanonicznych reprezentantów podklasy podobieństwa struktur zbioru $\mathbb{S}(G')$ jest taki k -dzielny podział $\lambda \in \Lambda^k(m \cdot k)$, $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)$, $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_k \geq 1$, liczby naturalnej $m \cdot k$, że $\{\lambda_1, \dots, \lambda_k\} = \{\mu^+(e) : e \in E(S)\}$, $S \in \mathbb{S}(G')$, gdzie $\mu^+(e)$ oznacza stopień wyjściowy wężła e struktury S . Występują jednak przypadki, gdy podział taki jest bezskuteczny (nie jest testem względem rozpoznawanego zbioru struktur). W wielu przypadkach sekwencyjne wybieranie kanonicznych reprezentantów podklas podobieństwa, w procedurze rozpoznawania zbioru struktur, ma charakter heurystyczny.

Dla przykładu wyznaczmy struktury zbioru $\check{\mathbb{S}}_3^B(6|G')$, gdzie graf G' (rys. 10) jest jednym z pięciu grafów zbioru $\check{G}^B(6,3)$ (rys. 4). Zbiór $\{G_1, \dots, G_6\}$ (rys. 10) wyznaczono stosując wszystkie możliwe sposoby, takiego dodania do grafu G' dwunastu łuków, aby stopień wejściowy każdego wężła był równy trzy. Rozwiązania można również wyznaczyć przez takie przeciwsymetryczne uzupełnienie dwunastoma jedynkami macierzy $M(G')$, aby w każdej kolumnie (uzupełnionej macierzy) występowały trzy jedynki (np. macierz $M(G_1)$). Okazuje się, że w zbiorze $\{G_1, \dots, G_6\}$ istnieją tylko dwa grafy, które nie są podobne. Grafy G_1, \dots, G_6 należą do tej samej podklasy podobieństwa, której kanonicznym reprezentantem jest podział $\lambda \in \Lambda^6(18)$, odpowiadający multizbiorowi wartości stopni wyjściowych wężłów grafu, bowiem $\lambda(G_i) = (444222)$, $1 \leq i \leq 6$. Zauważmy jednak, że tylko dla G_4 i G_6 , istnieje taka droga cykliczna, która przechodzi wyłącznie przez wężły o stopniu wyjściowym równym dwa. Teraz wystarczy już tylko zauważyć, że permutacje $(1)(3)(4)(5)(26)$, $(1)(2)(3)(6)(45)$ oraz $(2)(5)(16)(34)$ przekształcają (odpowiednio) G_2, G_3 i G_5 w G_1 , a permutacja $(12)(34)(56)$ przekształca G_6 w G_4 . Tak więc $\|\check{\mathbb{S}}_3^B(6|G')\| = 2$.



Rys. 10. Ilustracja sposobu wyznaczenia struktur zbioru $\tilde{S}_3^B(6|G')$
(struktury G_1, G_2, G_3 i G_5 oraz G_4 i G_6 są izomorficzne)

7. Podsumowanie

Komputerowe indukowanie zbiorów struktur silnie spójnych (szczególnie typu BGM) dla zaproponowanego w pracy reprezentanta klasy podobieństwa struktury jest (algorytmicznie) proste. Trudnym jest wykrywanie rozwiązań podobnych (izomorficznych). Pożądanym jest dysponowanie dialogowym narzędziem komputerowym do wstępnego grupowania uzyskanych rozwiązań według wybranych cech.

Komputerowe generowanie struktur, które nie są silnie spójne jest zadaniem znacznie trudniejszym. Przy poszukiwaniu metod rozwiązania tego zadania można wykorzystać własności grafów kolorowanych (ważonych). Pożądanym jest dysponowanie komputerowym narzędziem do określania grupy węzłowej struktury, która jest składową silnej spójności struktury, nie będącej strukturą silnie spójną.

Literatura

- [1] Andrews G.E.: *The Theory of Partitions*, London, Addison-Wesley Publishing Company, 1976.
- [2] Barsi F., Grandoni F., Maestrini P.: *A Theory of Diagnosability of Digital Systems*, IEEE Trans. on Comput. 6, 1976, s.585-593.
- [3] Harary F., Palmer E.: *Graphical Enumeration*, New York and London, Academic Press, 1973.
- [4] Krawczyk H.: *Analiza i synteza samodiagnozowalnych systemów komputerowych*, Zeszyty Naukowe Politechniki Gdańskiej, Elektronika nr 64, Gdańsk, 1987.
- [5] Kulesza R.: *Metoda wyznaczenia liczby blokowych digrafów strukturalnych określonego stopnia i rzędu*, Postępy Cybernetyki, z. 3, Wydawnictwo PAN, Warszawa, 1993, s.57-69.
- [6] Kulesza R.: *Niektóre własności grafów opiniowania diagnostycznego*, Krajowy Kongres Metrologii, Gdańsk, 1998, tom 5, s.81-88.
- [7] Kulesza R.: *Podstawy diagnostyki sieci logicznych i komputerowych*, Instytut Automatyki i Robotyki, Wydział Cybernetyki Wojskowej Akademii Technicznej, Warszawa, 2000, s.222.
- [8] Kulesza R.: *Metoda przeliczania 1-optymalnych struktur opiniowania diagnostycznego*, Biuletyn Instytutu Automatyki i Robotyki, Wojskowa Akademia Techniczna, Warszawa, 2001, nr 16, s.19-34.
- [9] Kulesza R.: *Struktury samodiagnozowalne w technice cyfrowej*, Diag'2003: V Krajowa Konferencja „Diagnostyka Techniczna Urządzeń i Systemów”, 13-17 października 2003, Ustroń, s.165-173.
- [10] Kulikowski J.L.: *Zarys teorii grafów*, PWN, Warszawa, 1986.
- [11] Preparata F. P., Metze G., Chien R.T.: *On the Connection Assignment Problem of Diagnosable Systems*, IEEE Trans. Comput. 6, 1967, s.848-854.

Recenzent: prof. dr hab. inż. Stanisław Paszkowski

Praca wpłynęła do redakcji: 25.05.2004.