

Metoda przeliczania 1-optimalnych struktur opiniowania diagnostycznego

Roman KULESZA

Zakład Automatyki, Instytut Automatyki i Robotyki WAT, ul. Kaliskiego 2, 00-908 Warszawa

1. Wprowadzenie.

Identyfikowanie (lokalizowanie) niezdatnych elementów systemu (na przykład komputerów sieci komputerowej) za pomocą metody opiniowania diagnostycznego, polega na wyciąganiu wniosku w oparciu o wszystkie opinie (wyniki testowań), wyrażone przez określone elementy systemu, o stanach niezawodnościowych innych (określonych) elementów systemu ([4],[9],[12]).

Digraf (unigraf zorientowany) bez pętli $G(G = \langle E, U \rangle, \langle e', e'' \rangle \notin U, e' \in E)$, w którym łuk $\langle e', e'' \rangle$ oznacza, że element e' systemu opiniuje (testuje) stan niezawodnościowy elementu e'' , nazywamy grafem opiniowania diagnostycznego.

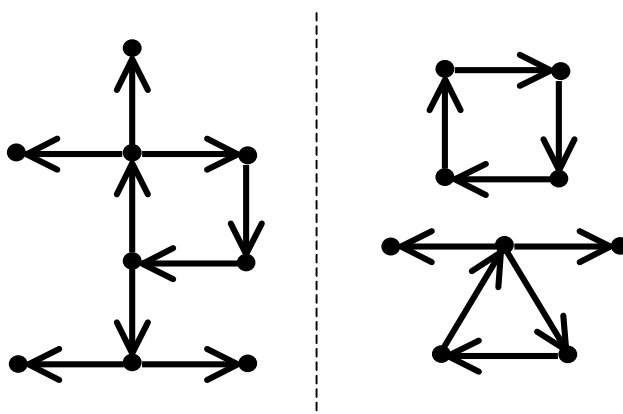
Opinia o elemencie opiniowanym zależy (w określony sposób) zarówno od jego stanu niezawodnościowego, jak i od stanu niezawodnościowego elementu opiniującego. Zależnie od charakteru tej zależności rozróżniamy model PMC (Preparata F.P.; Metzger G.; Chien R.T.-[15]) oraz model BGM (Barsi F.; Grandoni F.; Maestrini P.-[2]).

Mówiąc m -diagnozowalny graf opiniowania diagnostycznego (odpowiednio dla modelu PMC lub BGM) mamy na myśli taką strukturę opiniowania diagnostycznego (opisaną przez ten graf i model opiniowania), która umożliwi zidentyfikowanie (zlokalizowanie) wszystkich niezdatnych elementów systemu pod warunkiem, że nie jest ich więcej niż m . Graf częściowy m -diagnozowalnego grafu opiniowania diagnostycznego G nazywamy nieredukowalnym grafem m -diagnozowalnym względem grafu G , jeżeli jest on grafem m -diagnozowalnym oraz żaden z jego grafów częściowych

nie jest grafem m -diagnozowalnym. Mówimy, że nieredukowalny graf m -diagnozowalny względem grafu pełnego o liczbie węzłów równej $|E|$, jest nieredukowalnym grafem m -diagnozowalnym rzędu $|E|$, a nieredukowalny graf m -diagnozowalny rzędu $|E|$ o minimalnej liczbie łuków - grafem m -optymalnym rzędu $|E|$.

Warunki konieczne i wystarczające ([12]) dla istnienia 1-optymalnych struktur opiniowania diagnostycznego są proste i jednakowe dla modelu PMC i BGM. Polegają one na tym, że każdy element systemu musi być opiniowany (testowany) dokładnie przez jeden inny element systemu (stopień wejściowy każdego węzła grafu opiniowania diagnostycznego musi być równy jeden), a każda składowa spójności grafu opiniowania diagnostycznego (systemu) musi zawierać co najmniej trzy węzły (patrz rys.1). Oczywiście, w takim przypadku, co najwyżej dwa przyległe elementy mogą wyrazić opinię, że ich następnik jest niezdatny, a wówczas rację ma ten z nich, który jest poprzednikiem drugiego. Struktury takie są często stosowane przy projektowaniu sposobu diagnozowania systemu, w stosunku do którego nie stawia się zbyt wysokich wymagań odnośnie zachowania zdolności do poprawnego funkcjonowania pomimo zaistniałych w systemie awarii.

Znajomość liczby 1-optymalnych struktur opiniowania diagnostycznego określonego rzędu ma znaczenie w diagnostyce systemów oraz w teorii grafów, a także w innych działach nauki i techniki, które posługują się analogicznymi strukturami.



Rys.1. Przykłady 1-optymalnych struktur opiniowania diagnostycznego rzędu dziewiątego
(a- struktura spójna; b- struktura o dwóch składowych spójności)

W publikacji przedstawiona jest analityczna metoda przeliczania (zliczania) 1-optymalnych struktur opiniowania diagnostycznego oraz określone

są zależności dające możliwość efektywnego przeliczenia takich struktur do rzędu dwudziestego trzeciego. Przedstawiona metoda ma charakter ogólny i pozwala wyznaczyć zależności umożliwiające przeliczenie takich struktur dowolnego rzędu. Metoda polega na przeliczaniu (w pierwszej kolejności) spójnych 1- optymalnych struktur opiniowania diagnostycznego (w oparciu o charakterystykę niepodobieństwa takich struktur oraz znajomość ([3]) szeregu tworzącego klasy niezaetykietowanych i niezorientowanych drzew z korzeniem), a następnie na przeliczaniu 1- optymalnych struktur opiniowania diagnostycznego (w oparciu o znajomość szeregu tworzącego spójnych 1- optymalnych struktur opiniowania diagnostycznego).

Na podstawie wyznaczonych zależności określono pierwszych trzynaście wyrazów zarówno szeregu tworzącego spójnych 1- optymalnych struktur opiniowania diagnostycznego (zależność (20)) jak i dowolnych (niekoniecznie spójnych) 1- optymalnych struktur opiniowania diagnostycznego (zależność (24)).

2. Przeliczanie spójnych struktur 1- optymalnych.

Cyklem zorientowanym rzędu c ($c \geq 2$) nazywamy spójny digraf, w którym stopień wejściowy i stopień wyjściowy każdego z węzłów jest równy jeden, a dendrytem rzędu v ($v \geq 1$) - spójny digraf, w którym istnieje dokładnie jeden węzeł o stopniu wejściowym równym zero (nazywany korzeniem dendrytu) oraz $v-1$ węzłów o stopniu wejściowym równym jeden.

Oczywiście, cykl zorientowany rzędu k ($k \geq 3$) jest 1- optymalnym grafem opiniowania diagnostycznego rzędu k . Zauważmy, że w zbiorze podgrafów częściowych spójnego 1- optymalnego grafu opiniowania diagnostycznego rzędu k ($k \geq 3$) istnieje dokładnie jeden cykl zorientowany rzędu c ($c \leq 3 \leq k$), bowiem w przeciwnym razie istniałby w tym grafie węzeł, którego stopień wejściowy byłby większy niż jeden, co przeczy założeniu, że graf ten jest grafem 1- optymalnym.

Wiadomo również ([9], [12]), że jeżeli podgraf $\langle E \setminus \{e'\}, U' \rangle$ grafu G ($G = \langle E, U \rangle$) jest grafem 1- optymalnym oraz stopień wejściowy węzła e' jest równy jeden, to graf G jest również grafem 1- optymalnym. Tak więc, spójny 1- optymalny graf opiniowania diagnostycznego rzędu k ($k \geq 3$) jest cyklem zorientowanym rzędu c ($3 \leq c \leq k$), w którego węzłach są zagnieżdżone korzenie dendrytów takich rzędów v_1, \dots, v_c , że $v_1 + \dots + v_c = k$. Ponieważ liczba dendrytów określonego rzędu równa się liczbie drzew niezorientowanych z korzeniem tego samego rzędu, to problem sprowadza się

do przeliczania klasy takich spójnych grafów mieszanych zawierających dokładnie jeden cykl zorientowany rzędu c ($3 \leq c \leq k$), w którego węzłach są zagnieżdżone korzenie drzew niezorientowanych takich rzędów v_1, \dots, v_c , że $v_1 + \dots + v_c = k$.

Ponieważ przeliczanie grafów generowanych przez zagnieżdżanie korzeni drzew niezorientowanych w węzłach cyklu zorientowanego za pomocą metod bazujących na określaniu indeksu cykli grup permutacji (indukowanego przez odpowiednią grupę symetrii) jest utrudnione (przez istnienie cyklu zorientowanego), to rozwiązania problemu będziemy poszukiwać za pomocą takich działań na multizbiorach, które wykluczają generowanie grafów podobnych.

Powoduje to odmienne (w porównaniu z teorią permutacji) pojmowanie niektórych używanych wielkości, a głównie - rozkładu liczby naturalnej na składniki (czynniki) proste, z wszystkimi wynikającymi stąd konsekwencjami ([1], [3], [5],[13]).

Mówimy, że dwa grafy nie są podobne, jeżeli nie istnieje odwzorowanie automorficzne przekształcające jeden z nich w drugi.

Ponieważ dowolne dwa rozważane grafy o różnych rzędach cyklu zorientowanego lub o takich samych rzędach cyklu zorientowanego lecz zagnieżdżone drzewami niezorientowanymi o rzędach tworzących inne multizbiory, nie są grafami podobnymi, to liczbę spójnych niezaetykietowanych 1- optymalnych struktur opiniowania diagnostycznego rzędu k ($k \geq 3$) można wyznaczyć z zależności:

$$S(k) = \sum_{c=3}^k \sum_{\lambda \in \Lambda^c(k)} S(\lambda), \quad (1)$$

gdzie $\Lambda^c(k)$ oznacza zbiór takich rozkładów λ ($\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_c)$) liczby naturalnej k ($k \geq c$) na c składników prostych, że $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_c \geq 1$, a $S(\lambda)$ – liczbę niezaetykietowanych unigrafów o jednym cyklu zorientowanym rzędu c , w którego węzłach zagnieżdżone są korzenie drzew niezorientowanych o rzędach wyczerpujących poszczególne składniki wektora λ ($\lambda \in \Lambda^c(k)$).

Niech $M(\lambda)$ ($\lambda \in \Lambda^c(k)$) oznacza macierz charakterystyczną rozkładu λ , to jest taką macierz wymiaru $(2 \times r(\lambda))$ ($r(\lambda)$ – liczba różnych wartości składników rozkładu λ), że $m_{1,1}(\lambda), \dots, m_{1,r(\lambda)}(\lambda)$ jest malejącym ciągiem wartości jakie przyjmują składniki rozkładu λ , a $m_{2,j}(\lambda)$ ($1 \leq j \leq r(\lambda)$) - liczbą składników rozkładu λ o wartości $m_{1,j}(\lambda)$.

Oczywiście $m_{2,1}(\lambda) + L + m_{2,r}(\lambda) = c$

oraz $m_{1,1}(\lambda) \cdot m_{2,1}(\lambda) + L + m_{1,r}(\lambda) \cdot m_{2,r}(\lambda) = k$.

Dla przykładu

$$M((4, 2, 2, 2, 1, 1)) = \begin{bmatrix} 4, & 2, & 1 \\ 1, & 3, & 2 \end{bmatrix}, (\lambda \in \Lambda^6(12)).$$

Niech $\mu(\lambda)$ oznacza niemalejący ciąg krotności występowania różnych (co do wartości) składników w rozkładzie λ .

Dla przykładu $\mu((4, 2, 2, 2, 1, 1)) = (1, 2, 3)$.

Mówimy, że ciąg $(a_2, a_3, \dots, a_c, a_1)$ liczb (nie identycznych) jest 1- pozycyjnym przesunięciem w prawo ciągu (a_1, \dots, a_c) , a kombinacja $(a_{i_1}, \dots, a_{i_c})$ składowych ciągu (a_1, \dots, a_c) - cyklicznie różna od tego ciągu, jeżeli ciąg otrzymany po dowolnej liczbie takich kolejnych jej przesunięć różni się od ciągu (a_1, \dots, a_c) , przy czym ciąg (a_1, \dots, a_c) uważa się (z założenia) za ciąg cyklicznie różny względem siebie.

Analogicznie określamy 1-pozycyjne przesunięcie w lewo ciągu (a_1, \dots, a_c) .

Oczywiście, stwierdzenie czy określona kombinacja ciągu jest cyklicznie różna od tego ciągu (czy też nie) może być dokonane zarówno za pomocą kolejnych 1-pozycyjnych jej przesunięć w prawo albo w lewo.

Jest rzeczą zrozumiałą, że dwa sposoby zagnieżdżenia n ($1 \leq n < c$) korzeni drzew rzędu v , ($v > 1$) w cyklu zorientowanym rzędu c ($c \geq 3$) są różne, jeżeli ciągi liczb odpowiadających długościom łańcuchów między kolejnymi korzeniami drzew (w obu sposobach zagnieżdżenia n korzeni), są cyklicznie różne.

Jeżeli więc przez $f(c, n)$ oznaczymy funkcję wyznaczającą liczbę różnych sposobów zagnieżdżenia n korzeni drzew rzędu v , ($v > 1$) w cyklu zorientowanym rzędu c , to

$$f(c, n) = \sum_{\lambda \in \Lambda^n(c)} P(\mu(\lambda)), \quad (2)$$

gdzie $P(\mu(\lambda))$ oznacza liczbę cyklicznie różnych ciągów utworzonych z kombinacji składowych rozkładu λ , która zależy tylko od krotności $\mu(\lambda)$ występowania różnych (co do wartości) składników w rozkładzie λ .

Jest rzeczą oczywistą, że

$$\begin{aligned} f(c, n) &= f(c, c-n), \\ f(c, 1) &= f(c, c-1) = 1, \\ f(c, 2) &= f(c, n-2) = |\Lambda^2(c)| = \left\lfloor \frac{c}{2} \right\rfloor. \end{aligned}$$

Problem wyznaczenia wartości funkcji $f(c, n)$ ($c \geq 6, 3 \leq n \leq \left\lfloor \frac{c}{2} \right\rfloor$) sprowadza się więc praktycznie do problemu wyznaczenia wartości $P(\mu)$ ($\mu_1 + \dots + \mu_r = n$), bowiem wyznaczenie zbioru $\Lambda^n(c)$ jest zadaniem trywialnym.

Z kombinatoryki matematycznej wiadomo, że liczba $P^*(\mu)$ kombinacji ciągu n liczb o ciągu krotkości ich występowania równym μ ($\mu = (\mu_1, \dots, \mu_r), r \leq n$), wynosi

$$P^*((\mu_1, \dots, \mu_r)) = (\mu_1 + \dots + \mu_r)! \cdot (\mu_1! \cdot \dots \cdot \mu_r!)^{-1}. \quad (3)$$

Ponieważ zbiór ciągów liczb cyklicznie różnych jest (dla dowolnej wartości μ) podzbiorem zbioru takich kombinacji, które zaczynają się od takiej samej liczby, to z zależności (3) otrzymujemy natychmiast

$$P((1, \mu_2, \dots, \mu_r)) = P^*((\mu_2, \dots, \mu_r)) = (n-1)! \cdot \left(\prod_{i=2}^r \mu_i! \right)^{-1} \quad (4)$$

bowiem (w tym przypadku) żaden z ciągów rozpoczynających się od liczby o krotkości μ_1 nie kończy się liczbą taką samą, od której się zaczyna.

Oczywiście, w przypadku gdy $\mu_1 = \dots = \mu_n = 1$, zależność (4) przyjmuje postać

$$P((\mu)) = (n-1)! \quad (\mu_1 = \dots = \mu_n = 1). \quad (4')$$

Niech $P^*(\mu_1, \dots, \mu_r | \xi_1, \dots)$, $P^*(\mu_1, \dots, \mu_r | \dots, \xi_1)$ oraz $P^*(\mu_1, \dots, \mu_r | \xi_1, \dots, \xi_1)$ ($\mu_1 \geq 2$) oznaczają (odpowiednio) liczby kombinacji ciągów, które zaczynają się, kończą się oraz zaczynają i kończą się liczbami o krotkości μ_1 .

Jest rzeczą zrozumiałą, że

$$P^*(\mu_1, \dots, \mu_r | \xi_1, \dots) = P^*(\mu_1, \dots, \mu_r | \dots, \xi_1) = P^*(\mu_1 - 1, \mu_2, \dots, \mu_r)$$

oraz

$$P^*(\mu_1, \dots, \mu_r | \xi_1, \dots, \xi_1) = P^*(\mu_1 - 1, \mu_2, \dots, \mu_r | \xi_1, \dots) = P^*(\mu_1 - 2, \mu_2, \dots, \mu_r).$$

Tak więc

$$P(\mu_1, \dots, \mu_r) = P^*(\mu_1 - 1, \mu_2, \dots, \mu_r) - P^*(\mu_1 - 2, \mu_2, \dots, \mu_r) \quad (\mu_1 \geq 2). \quad (5)$$

Korzystając z zależności (3) i po formalnych przekształceniach zależności (5), otrzymujemy

$$P^*(\mu_1, \dots, \mu_r) = \left[\frac{(n-1)!}{(\mu_1-1)!} - \frac{(n-2)!}{(\mu_1-2)!} \right] \cdot \left(\prod_{i=2}^r \mu_i! \right)^{-1} \quad (\mu_1 \geq 2). \quad (6)$$

Z zależności (6) otrzymujemy

$$P^*(2, \mu_2, \dots, \mu_r) = (n-2) \cdot (n-2)! \cdot \left(\prod_{i=2}^r \mu_i! \right)^{-1} \quad (7)$$

oraz

$$P(\mu_1, \mu_2) = (n-2)! \cdot \mu_2 \cdot ((\mu_1-1)! \cdot \mu_2!)^{-1} \quad (\mu_1 \geq 2). \quad (7')$$

Zależności (2), (4), (7) i (7') pozwalają na wyznaczenie wartości funkcji $f(c, n)$ dla $c \leq 17$, co z punktu widzenia potrzeb niniejszej publikacji jest wystarczające.

W tabelicy 1 podano wartości funkcji $f(c, n)$ dla $4 \leq c \leq 15$ ($1 \leq n \leq \lfloor \frac{c}{2} \rfloor$).

Tablica 1

n/c	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	3	3	4	4	5	5	6	6	7	7
3	1	2	4	5	7	10	12	15	19	22	26	31
4	-	1	3	5	9	14	22	30	43	55	70	88
5	-	-	1	3	7	10	26	43	67	101	138	197
6	-	-	-	1	4	4	22	43	91	122	228	328
7	-	-	-	-	1	1	12	30	67	122	266	461

Wyrazy szeregu tworzącego $D(x)$ klasy (niezaetykietowanych) drzew niezorientowanych z korzeniem rzędu $k \leq 26$ (przytoczone w [3]) wyznaczył J. Riordan ze znanej ([3], [14]) zależności funkcjonalnej

$$D(x) = x \cdot \exp\left[\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \cdot D(x^k) \right].$$

Szereg $D(x)$ dla pierwszych trzynastu wyrazów ma postać

$$D(x) = x + x^2 + 2x^3 + 4x^4 + 9x^5 + 20x^6 + 48x^7 + 115x^8 + 286x^9 + 719x^{10} + 1842x^{11} + 4766x^{12} + 12486x^{13} + \dots \quad (8)$$

Dla przykładu, liczba $D(8)$ drzew niezorientowanych z korzeniem rzędu ósmego równa się 115.

Z [3] wiadomo, że A.J. Schwenk, metodą komputerowego generowania grafów, wyznaczył wyrazy szeregu $D(x)$ do rzędu $k = 39$.

Takie rozmieszczenie korzeni drzew w cyklu zorientowanym (indukowane przez rozkład λ ($r(\lambda) > 1$)), że odległości (długości łańcuchów) między węzłami, które są najbliższymi korzeniami drzew tego samego rzędu v ($v \geq 2$), są takie same, nazywamy rozmieszczeniem symetrycznym.

Zrozumiałe jest, że tylko symetryczne rozmieszczenia korzeni drzew mogą generować grafy podobne.

Ponieważ $D(2)=1$ i $D(3)>1$ (patrz zależność (8)), to rozkład λ generuje grafy podobne wtedy i tylko wtedy, gdy

$$(m_{1,1}(\lambda) \geq 3) \wedge [((m_{1,r(\lambda)}(\lambda) > 1) \rightarrow (m_{2,1}(\lambda) = \lfloor \frac{m_{1,r(\lambda)}(\lambda)}{2} = m_{2,r(\lambda)}(\lambda) \geq 2)) \vee (m_{1,r(\lambda)}(\lambda) = 1) \rightarrow ((m_{2,1}(\lambda) = \lfloor \frac{m_{1,r(\lambda)}(\lambda)-1}{2} = m_{2,r(\lambda)-1}(\lambda) \geq 2) \wedge (m_{2,r(\lambda)}(\lambda) = a(\lambda) \cdot m_{2,1}(\lambda), a(\lambda) \geq 1))]. \quad (9)$$

Dla przykładu następujące rozkłady λ ($\lambda \in \Lambda^c(k)$) spełniają zależność (9):

- dla $k \leq 7$: - ;
- dla $k = 8$: (3,3,1,1) ;
- dla $k = 9$: (3,3,3) ;
- dla $k = 10$: (3,3,2,2) ; (4,4,1,1) ; (3,3,1,1,1,1) ;
- dla $k = 11$: - ;
- dla $k = 12$: (4,4,4) ; (3,3,3,3) ; (5,5,1,1) ; (4,4,2,2) ; (3,3,1,1,1,1,1) ; (4,4,1,1,1,1) ; (3,3,3,1,1,1) ; (3,3,2,2,1,1) ;
- dla $k = 13$: - .

Niech $Z(\lambda)$ oznacza liczbę rozmieszczeń korzeni drzew indukowanych przez rozkład λ , a $Z^*(\lambda)$ oraz $S^*(\lambda)$ - liczbę rozmieszczeń (korzeni drzew) spełniających zależność (9) oraz liczbę różnych (niepodobnych) grafów generowanych przez rozkład spełniający zależność (9).

Tak więc, jeżeli rozkład λ spełnia zależność (9), to

$$S(\lambda) = (Z(\lambda) - Z^*(\lambda)) \cdot \prod_{j=1}^{r(\lambda)} (D(m_{1,j}(\lambda))^{m_{2,j}(\lambda)} + Z^*(\lambda) \cdot S^*(\lambda)), \quad (10)$$

a jeżeli nie spełnia zależności (9), to

$$S(\lambda) = Z(\lambda) \cdot \prod_{j=1}^{r(\lambda)} (D(m_{1,j}(\lambda))^{m_{2,j}(\lambda)}). \quad (11)$$

Oczywiście:

$$\text{jeżeli } r(\lambda) = 1, \text{ to } Z(\lambda) = 1; \quad (12)$$

$$\text{jeżeli } r(\lambda) = 2, \text{ to } Z(\lambda) = f(c, m_{2,1}(\lambda)); \quad (13)$$

jeżeli $r(\lambda) \geq 3$, to

$$Z(\lambda) = f(c, m_{2,1}(\lambda)) \cdot \prod_{j=2}^{r(\lambda)-1} \left(\frac{c - (m_{2,1}(\lambda) + \dots + m_{2,j-1}(\lambda))}{m_{2,j}(\lambda)} \right). \quad (14)$$

Zauważmy, że jeżeli $r(\lambda) \geq 3$ oraz $m_{2,1}(\lambda) = \dots = m_{2,p(\lambda)}(\lambda) = 1$,
($p(\lambda) \geq r(\lambda) - 1$) to zależność (14) przyjmuje postać

$$Z(\lambda) = (c-1) \cdot \dots \cdot (c - (r(\lambda) - 2)). \quad (14')$$

Łatwo zauważyć, że:

$$\text{jeżeli } r(\lambda) \leq 2, \text{ to } Z^*(\lambda) = 1; \quad (15)$$

$$\text{jeżeli } r(\lambda) \geq 3 \text{ i } m_{1,r(\lambda)}(\lambda) > 1, \text{ to } Z^*(\lambda) = (r(\lambda) - 1)!; \quad (16)$$

jeżeli $r(\lambda) \geq 3$ i $m_{1,r(\lambda)}(\lambda) = 1$, to

$$Z^*(\lambda) = \prod_{j=0}^{r(\lambda)-3} (r(\lambda) - 2 + a(\lambda) - j), \quad (17)$$

bowiem w najkrótszym łańcuchu łączącym węzły cyklu zorientowanego, które są zagnieżdżone drzewami najwyższego rzędu, jest $\frac{c}{m_{2,1}(\lambda)} - 1$ węzłów,

w których można zagnieżdżyć po jednym z pozostałych drzew rzędu $v > 1$.
W końcu wystarczy zauważyć, że jeżeli $m_{1,r(\lambda)}(\lambda) > 1$, to $c = m_{2,1}(\lambda) \cdot r(\lambda)$,

natomiast jeżeli $m_{1,r(\lambda)}(\lambda)=1$, to $c = m_{2,1}(\lambda) \cdot (r(\lambda) - 1 + a(\lambda))$. Dla $r(\lambda) \leq 2$ zależność (15) jest oczywista.

Do rozwiązania problemu pozostało więc tylko określenie sposobu wyznaczania liczby $S^*(\lambda)$ różnych (niepodobnych) grafów generowanych przez rozkład λ spełniający zależność (9).

Niech $\Lambda(b)$ oznacza zbiór rozkładów liczby naturalnej b na a ($1 \leq a \leq b$) składników prostych.

Dla przykładu $\Lambda(4) = \{(4), (3, 1), (2, 2), (2, 1, 1), (1, 1, 1, 1)\}$. Zbiór $\Lambda(b)$ traktujemy jako zbiór możliwych klas podziału zbioru o liczebności b . Tak więc, zbiór o liczebności równej cztery ma pięć klas podziału w tym (dla przykładu) dwie klasy podziałów dwudzielnych, a mianowicie $(3, 1)$ i $(2, 2)$.

Niech $S^{**}(N, b, \xi)$ oznacza liczbę różnych sposobów zaetykietowania (dopuszczających powtórzenia etykiet) b ($b \geq 2$) węzłów cyklu zorientowanego, liczbami ze zbioru $\{1, 2, \dots, N\}$ w taki sposób, aby liczby węzłów zaetykietowanych takimi samymi etykietami odpowiadały klasie podziału ξ ($\xi \in \Lambda(b)$), a $S^{**}(N, b)$ - liczbę różnych sposobów zaetykietowania b węzłów cyklu zorientowanego liczbami ze zbioru $\{1, 2, \dots, N\}$.

Zauważmy, że

$$S^{**}(N, b) = \sum_{\xi \in \Lambda(b); |\xi| \leq N} S^{**}(N, b, \xi), \quad (18)$$

gdzie $|\xi|$ oznacza dzielnosc klasy podziału ξ .

Po uwzględnieniu symetrii w cyklu zorientowanym z zależności (18) (dla przykładu) otrzymujemy:

$$S^{**}(N, 2) = \frac{1}{2} \cdot N \cdot (N + 1), \quad (N \geq 2) \quad (18')$$

$$S^{**}(N, 3) = \frac{1}{3} \cdot N \cdot (N^2 + 2), \quad (N \geq 3) \quad (18'')$$

$$S^{**}(N, 4) = \frac{1}{4} \cdot N \cdot (N \cdot (N^2 + 1) + 2), \quad (N \geq 4) \quad (18''')$$

bowiem: $S^{**}(N, b, (b)) = N$; $S^{**}(N, b, (1, \dots, 1)) = C_b^N \cdot (b - 1)!$;

$$S^{**}(N, 2, (1, 1)) = C_2^N; S^{**}(N, 3, (2, 1)) =$$

$$S^{**}(N, 4, (3, 1)) = S^{**}(N, 4, (2, 2)) = 2 \cdot C_2^N \text{ oraz } S^{**}(N, 4, (2, 1, 1)) = 3^2 \cdot C_3^N.$$

Zauważmy teraz, że jeżeli rozkład λ ($\lambda \in \Lambda^c(k)$) spełnia zależność (9) oraz $(r(\lambda) = 1) \vee ((r(\lambda) > 1) \rightarrow (m_{1,2}(\lambda) \leq 2))$, to wartość $S^*(\lambda)$ równa się wartości $S^{**}(N, b)$ po podstawieniu $N = D(m_{1,1}(\lambda))$ oraz $b = m_{2,1}(\lambda)$.

Tak więc, uzyskaliśmy możliwość przeliczenia rozważanych grafów do rzędu $k < 14$.

W celu uproszczenia obliczeń, zależność (1) dla $k \geq 6$ można przedstawić w postaci:

$$S(k) = \sum_{i=1}^{k-2} D(i) + \sum_{j=2}^{k-4} j \cdot D(k-j-1) + \left\lfloor \frac{k-2}{2} \right\rfloor + \sum_{c=3}^{k-3} \sum_{\substack{\lambda \in \Lambda^c(k): \\ \lambda_1 \leq k-c-1}} S(\lambda), \quad (k \geq 6) \quad (19)$$

bowiem: jeżeli $\lambda_1 = k - c + 1$, to $\lambda_2 = 1$, a więc (zgodnie z zależnościami (9), (11-13) i (8)):

$$\sum_{c=3}^k \sum_{\substack{\lambda \in \Lambda^c(k): \\ \lambda_1 = k-c+1}} S(\lambda) = \sum_{i=1}^{k-2} D(i)$$

oraz jeżeli $\lambda_1 = k - c$, to $\lambda_2 = 2$ i $\lambda_3 = 1$ przy czym $\lambda_1 > 2$ dla $c \leq k - 3$ oraz $\lambda_1 = 2$ dla $c = k - 2$, a więc (zgodnie z zależnościami (9), (11), (14') i (8) oraz (9), (11), (13) i (8)):

$$\sum_{c=3}^k \sum_{\substack{\lambda \in \Lambda^c(k): \\ \lambda_1 = k-c}} S(\lambda) = \sum_{j=2}^{k-4} j \cdot D(k-j-1) + \left| \Lambda^2(k-2) \right|.$$

Zauważmy również, że $\left| \Lambda^2(\omega) \right| = \left\lfloor \frac{\omega}{2} \right\rfloor$ ($\omega \geq 2$).

Niech $S(x)$ oznacza szereg tworzący spójnych 1- optymalnych struktur opiniowania diagnostycznego.

Korzystając z powyżej określonych zależności wyznaczono pierwszych trzynaście wyrazów tego szeregu:

$$\begin{aligned} S(x) = & x^3 + 2x^4 + 5x^5 + 15x^6 + 40x^7 + 118x^8 + 341x^9 + \\ & + 970x^{10} + 2792x^{11} + \\ & + 7927x^{12} + 22540x^{13} + \dots \end{aligned} \quad (20)$$

Oczywiście, analityczne wyznaczanie współczynników szeregu $S(x)$ dla $x \geq 8$, bez posłużenia się (odpowiednim) programem komputerowym, jest dosyć pracochłonne. Dla przykładu, rozkład $\lambda = (3, 3, 2, 2, 1, 1)$ ($\lambda \in \Lambda^6(12)$) spełnia zależność (9), a więc (zgodnie z zależnością (10)) $S((3, 3, 2, 2, 1, 1)) = (18 - 2) \cdot 2^2 + 2 \cdot S^{**}(2, 2) = 70$ bowiem: (zgodnie z zależnością (14)) $Z((3, 3, 2, 2, 1, 1)) = f(6, 2) \cdot C_2^4 = 3 \cdot 6$; (zgodnie z zależnością (17)) $Z^*((3, 3, 2, 2, 1, 1)) = 3 - 2 + 1$; (zgodnie z zależnością (8)), $D(3) = 2, D(2) = D(1) = 1$ oraz (zgodnie z zależnościami (18) i (18')) $S^*((3, 3, 2, 2, 1, 1)) = S^{**}(2, 2) = 3$.

Pokażemy teraz jak (wykorzystując przedstawioną metodę) można przeliczyć spójne 1-optymalne struktury opiniowania diagnostycznego do rzędu $k < 24$.

Niech $\omega(\lambda)$ oznacza taką liczbę charakteryzującą rozkład λ spełniającą zależność (9), że jeżeli $m_{1,r(\lambda)}(\lambda) \geq 3$, to $\omega(\lambda) = r(\lambda)$, a jeżeli $m_{1,r(\lambda)}(\lambda) < 3$, to $m_{1,\omega(\lambda)}(\lambda) \geq 3$ i $m_{1,\omega(\lambda)+1}(\lambda) < 3$.

Zauważmy, że jeżeli $\omega(\lambda) = m_{2,1}(\lambda) = 2$, to zagnieżdżanie węzłów (rozmieszczonych symetrycznie w cyklu zorientowanym) drzewami rzędów $m_{1,1}(\lambda)$ i $m_{1,2}(\lambda)$ nie generuje grafów podobnych wtedy i tylko wtedy, gdy węzły przypisane drzewom rzędu $m_{1,1}(\lambda)$ nie są zagnieżdżane drzewami jednoimiennymi (takimi samymi), a węzły przypisane drzewom rzędu $m_{1,2}(\lambda)$ - dowolnymi drzewami tego rzędu, albo jeżeli węzły przypisane drzewom rzędu $m_{1,1}(\lambda)$ są zagnieżdżone węzłami jednoimiennymi, a węzły przypisane drzewom rzędu $m_{1,2}(\lambda)$ są zagnieżdżane w sposób nie generujący grafów podobnych.

Tak więc, jeżeli $\omega(\lambda) = m_{2,1}(\lambda) = 2$, to

$$S^*(\lambda) = \left[S^{**}(D(m_{1,1}(\lambda)), 2) - S^{**}(D(m_{1,1}(\lambda)), 2, (2)) \right] \cdot [D(m_{1,2}(\lambda))]^2 + \\ + S^{**}(D(m_{1,1}(\lambda)), 2, (2)) \cdot S^{**}(D(m_{1,2}(\lambda)), 2).$$

Po formalnych podstawieniach i przekształceniach otrzymujemy

$$S^*(\lambda) = \binom{D(m_{1,1}(\lambda))}{2} \cdot [D(m_{1,2}(\lambda))]^2 + D(m_{1,1}(\lambda)) \cdot \left[D(m_{1,2}(\lambda)) + \binom{D(m_{1,2}(\lambda))}{2} \right] \quad (\omega(\lambda) = m_{2,1}(\lambda) = 2). \quad (21)$$

3. Przeliczenie struktur 1- optymalnych.

Pokażemy teraz jak w oparciu o znajomość wyrazów szeregu tworzącego spójnych 1- optymalnych struktur opiniowania diagnostycznego (zależność (20)) można przeliczyć 1- optymalne struktury opiniowania diagnostycznego.

Niech $\mathfrak{R}^*(N, b, \xi)$ oznacza liczbę różnych sposobów zaetykietowania b ($b \geq 2$) składowych spójności (rozważanego grafu) liczbami ze zbioru $\{1, \dots, N\}$ w taki sposób, aby liczby składowych spójności zaetykietowanych takimi samymi etykietami odpowiadały klasie podziału ξ ($\xi \in \Lambda(b)$), a $\mathfrak{R}^*(N, b)$ - liczbę różnych sposobów zaetykietowania b składowych spójności rozważanego grafu.

Zauważmy, że

$$\mathfrak{R}^*(N, b) = \sum_{\xi \in \Lambda(b); |\xi| \leq N} \mathfrak{R}^*(N, b, \xi). \quad (22)$$

Z zależności (22) otrzymujemy:

$$\mathfrak{R}^*(N, 2) = \frac{1}{2} \cdot N \cdot (N + 1) \quad (N \geq 2); \quad (22')$$

$$\mathfrak{R}^*(N, 3) = N^2 + \frac{1}{6} \cdot N \cdot (N - 1) \cdot (N - 2) \quad (N \geq 3); \quad (22'')$$

$$\mathfrak{R}^*(N, 4) = \frac{1}{24} \cdot N \cdot [N \cdot (N^2 + 6 \cdot N + 11) + 6] \quad (N \geq 4), \quad (22''')$$

bowiem:

$$\mathfrak{R}^*(N, b, (b)) = N; \quad \mathfrak{R}^*(N, b, (1, \dots, 1)) = C_b^N;$$

$$\mathfrak{R}^*(N, 3, (2, 1)) = \mathfrak{R}^*(N, 4, (3, 1)) = 2 \cdot C_2^N;$$

$$\mathfrak{R}^*(N, 4, (2, 2)) = C_2^N \text{ oraz } \mathfrak{R}^*(N, 4, (2, 1, 1)) = N \cdot C_2^{N-1}.$$

Niech $\mathfrak{R}(k)$ oznacza liczbę 1- optymalnych struktur opiniowania diagnostycznego rzędu k ($k \geq 3$).

Ponieważ każda składowa spójności 1- optymalnej struktury opiniowania diagnostycznego musi być 1- optymalną strukturą opiniowania diagnostycznego, to

$$\mathfrak{R}(k) = \sum_{\varphi=1}^{\varphi:3-\varphi \leq k} \sum_{\lambda \in \Lambda^\varphi(k): \lambda_\varphi \geq 3} M(\lambda) \quad (k \geq 3) \quad (23)$$

gdzie

$$M(\lambda) = \prod_{i:m_{2,i}(\lambda)=1} S(m_{1,i}(\lambda)) \cdot \prod_{j:m_{2,j}(\lambda)>1} \mathfrak{R}^*(S(m_{1,j}(\lambda)), m_{2,j}(\lambda)) \quad (k \geq 3)$$

przy czym

$$\text{jeżeli } \{i:m_{2,i}(\lambda)=1\} = \emptyset, \text{ to } \prod_{i:m_{2,i}(\lambda)=1} S(m_{1,i}(\lambda)) = 1$$

oraz

$$\text{jeżeli } \{j:m_{2,j}(\lambda)>1\} = \emptyset, \text{ to } \prod_{j:m_{2,j}(\lambda)>1} \mathfrak{R}^*(S(m_{1,j}(\lambda)), m_{2,j}(\lambda)) = 1.$$

Dla przykładu, macierz charakterystyczna rozkładu $\lambda = (6, 3, 3)$ ($\lambda \in \Lambda^3(12)$) ma postać $M(\lambda) = \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ a więc

$$M(6, 3, 3) = S(6) \cdot \mathfrak{R}^*(S(3), 2) = 15 \cdot \mathfrak{R}^*(1, 2) = 15 \cdot \mathfrak{R}^*(1, 2, (2)) = 15 \cdot 1.$$

Niech $\mathfrak{R}(x)$ oznacza szereg tworzący 1- optymalnych struktur opiniowania diagnostycznego

Znając pierwszych trzynaście wyrazów szeregu tworzącego spójnych 1- optymalnych struktur opiniowania diagnostycznego (zależność (20)) oraz korzystając z zależności (22) i (23), wyznaczono pierwszych trzynaście wyrazów szeregu tworzącego optymalnych struktur opiniowania diagnostycznego:

$$\begin{aligned} \mathfrak{R}(x) = & x^3 + 2x^4 + 5x^5 + 16x^6 + 42x^7 + 126x^8 + 367x^9 + 1057x^{10} + 3073x^{11} + \\ & + 9208x^{12} + 25484x^{13} + \dots \end{aligned} \quad (24)$$

4. Podsumowanie.

Pokazano, że problem przeliczania (zliczania) 1- optymalnych struktur opiniowania diagnostycznego jest równoważny problemowi przeliczania takich unigrafów mieszanych, w których każda składowa spójności zawiera dokładnie jeden cykl zorientowany rzędu co najmniej trzeciego, a grafy częściowe powstałe przez usunięcie łuków określonego cyklu zorientowanego są drzewami niezorientowanymi z korzeniem, który jest węzłem tego cyklu.

W pracy zaproponowano analityczną metodę przeliczania takich struktur do rzędu dwudziestego trzeciego.

W tabelicy 2 zestawiono (znane z literatury) liczby $D(k)$ drzew niezorientowanych z korzeniem oraz (wyznaczone metodą zaproponowaną w niniejszej pracy) liczby $S(k)$ spójnych i liczby $R(k)$ dowolnych (niekoniecznie spójnych) 1- optymalnych struktur opiniowania diagnostycznego do rzędu $k=13$.

Tablica 2

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
D(k)	1	1	2	4	9	20	48	115	286	719	1842	4766	12486
S(k)	-	-	1	2	5	15	40	118	341	970	2927	7927	22540
R(k)	-	-	1	2	5	16	42	126	367	1057	3073	9208	25484

Interesującym (otwartym) zagadnieniem jest opracowanie metody komputerowego generowania takich struktur.

Oczywiście, interesującym zagadnieniem jest opracowanie metody przeliczania oraz wyznaczania (wszystkich możliwych) m -optymalnych struktur opiniowania diagnostycznego dla $m > 1$. Dotychczas wiadomo tylko ([9], [10], [11]), że dla modelu PMC istnieje dokładnie 26 określonych struktur 2- optymalnych rzędu piątego.

Literatura:

- [1] Andrews G.E.: *The Theory of Partitions*, London, Addison-Wesley Publishing Company, 1976.
- [2] Barsi F., Grandoni F., Maestrini P.: *A Theory of Diagnosability of Digital Systems*, IEEE Trans. on Comput. 6, 1976, pp. 585-593.
- [3] Harary F., Palmer E.: *Graphical Enumeration*, New York and London, Academic Press, 1973.
- [4] Krawczyk H.: *Analiza i synteza samodiagnozowalnych systemów komputerowych*, Zeszyty Naukowe Politechniki Gdańskiej, Elektronika nr 64, Gdańsk, 1987.

- [5] Kulesza R.: *Metoda wyznaczenia liczby blokowych digrafów strukturalnych określonego rzędu*, Postępy Cybernetyki, z. 1-2, Wydawnictwo PAN, Warszawa, 1993, s. 103-115.
- [6] Kulesza R.: *Metoda wyznaczenia liczby blokowych digrafów strukturalnych określonego wymiaru*, Postępy Cybernetyki, z. 1-2, Wydawnictwo PAN, Warszawa, 1993, s. 117-128.
- [7] Kulesza R.: *Metoda wyznaczenia liczby blokowych digrafów strukturalnych określonego stopnia i rzędu*, Postępy Cybernetyki, z. 3, Wydawnictwo PAN, Warszawa, 1993, s. 57-69.
- [8] Kulesza R.: *Metoda wyznaczenia liczby blokowych digrafów strukturalnych określonego stopnia i wymiaru*, Postępy Cybernetyki, z. 3, Wydawnictwo PAN, Warszawa, 1993, s. 71-84.
- [9] Kulesza R.: *Niektóre własności grafów opiniowania diagnostycznego*, Krajowy Kongres Metrologii, Gdańsk'98, 1998, tom 5, s. 81-88.
- [10] Kulesza R., Wach A.K.: *Wyznaczanie m-diagnozowalnych grafów opiniowania diagnostycznego*, Krajowy Kongres Metrologii, Gdańsk'98, 1998, tom 5, s. 25-32.
- [11] Kulesza R., Wach A.K.: *The Determination of a 2-optimal Digraphs Set for a One-Step Diagnosis of System*, 9 IMECO TC-10, International Conference on Technical Diagnostics, 22-24 September 1999, Wrocław, Poland, pp. 153-158.
- [12] Kulesza R.: *Podstawy diagnostyki sieci logicznych i komputerowych*, Instytut Automatyki i Robotyki, Wydział Cybernetyki Wojskowej Akademii Technicznej, Warszawa, 2000, ss. 222.
- [13] Kulikowski J.L.: *Zarys teorii grafów*, PWN, Warszawa, 1986.
- [14] Pólya G.: *Kombinatorische Anzahlbestimmungen für Gruppen, Graphen und chemische Verbindungen*, Acta Math., 1937, vol. 68.
- [15] Preparata F. P., Metze G., Chien R.T.: *On the Connection Assignment Problem of Diagnosable Systems*, IEEE Trans. Comput. 6, 1967, pp. 848-854.

Recenzent: dr hab. inż. Andrzej Chojnacki

Praca wpłynęła do redakcji: 10.10.2001