



Błąd kwantyzacji w interpolacyjnym liczniku czasu

RAFAŁ SZYMANOWSKI

Wojskowa Akademia Techniczna, Wydział Elektroniki, Instytut Telekomunikacji,
00-908 Warszawa, ul. S. Kaliskiego 2

Streszczenie. Jeżeli zdarzenia losowe określające mierzony odcinek czasu T są nieskorelowane, to standardowa niepewność pomiaru jest równa $q/\sqrt{6}$. Natomiast dla skorelowanych zdarzeń losowych ($T = \text{const}$) można dla każdego przedziału kwantowania w interpolatorze START określić przedział kwantowania w interpolatorze STOP. Przedstawiona w artykule analiza dotyczy błędu kwantyzacji w interpolacyjnym liczniku czasu dla tego rodzaju pomiarów.

Słowa kluczowe: metrologia odcinków czasu, interpolacyjny licznik czasu, błąd kwantyzacji

Symbolne UKD: 531.761

1. Wstęp

W celu osiągnięcia wysokiej rozdzielczości i szerokiego zakresu pomiarowego, interpolacyjne liczniki czasu konstruowane są w oparciu o metodę Nutta [1, 2], zgodnie z którą pomiar odcinka czasu T odbywa się w trzech etapach. Jako pierwszy mierzony jest w interpolatorze toru START odcinek czasu T_A pomiędzy zboczem narastającym impulsu *START* a najbliższym aktywnym zboczem sygnału zegarowego *CLK*. Następnie licznik główny zlicza liczbę N_C pełnych okresów T_o zegara wzorcowego w obrębie odcinka T . Ostatni etap to pomiar w interpolatorze toru STOP odcinka T_B pomiędzy zboczem narastającym impulsu *STOP* a najbliższym zboczem aktywnym sygnału zegara. Wynik pomiaru oblicza się jako

$$T = T_A - T_B + N_C T_o. \quad (1)$$

Ponieważ licznik główny określa całkowitą liczbę okresów zegara wzorcowego T_o w obrębie mierzonego odcinka T , źródłem błędu kwantyzacji są interpolatory.

W poniższej analizie szerokości przedziałów kwantowania interpolatorów przyjęto równe q_1 i q_2 , odpowiednio w torach START i STOP.

2. Błąd kwantyzacji

Dla idealnego interpolatora funkcja gęstości prawdopodobieństwa błędu kwantyzacji jest rozkładem równomiernym w zakresie od $-q/2$ do $q/2$, a standardowa niepewność pomiarowa jest równa $q/\sqrt{12}$ [3, 4]. Do pomiaru odcinka czasu T między dwoma zdarzeniami w liczniku czasu używane są dwa takie interpolatory.

Analizując błąd kwantyzacji, należy rozróżnić dwa charakterystyczne rodzaje mierzonych odcinków czasu:

- w badaniach fizycznych mierzone odcinki czasu T często nie mają stałej długości, lecz *długość losowo zmienną*, zazwyczaj o normalnym rozkładzie prawdopodobieństwa $f(T; m_T, \sigma_T)$. Jeśli $q \ll \sigma_T$, to zdarzenia losowe określające początek i koniec mierzzonego odcinka czasu można traktować jako nieskorelowane. Rozkład prawdopodobieństwa błędu kwantyzacji ma wtedy kształt trójkąta równoramiennego o podstawie $2q$, a standardowa niepewność pomiarowa jest równa [5]

$$S(\delta_q) = \sqrt{V^2(\delta_{Start}) + V^2(\delta_{Stop})} = \sqrt{\frac{q^2}{12} + \frac{q^2}{12}} = \frac{q}{\sqrt{6}} \approx 0,4q, \quad (2)$$

- w badaniach technicznych zazwyczaj spełniony jest warunek $q \gg \sigma_T$. Wówczas można przyjąć, że odcinek T ma *stałą długość* ($T = \text{const}$), a wtedy zdarzenia losowe wyznaczające T są skorelowane. Dla każdego przedziału kwantowania interpolatora w torze START, który zarejestrował początek odcinka T , można określić przedział kwantowania interpolatora w torze STOP, w którym zostanie zarejestrowany koniec odcinka T . Poniższa analiza błędu kwantyzacji dotyczy tego rodzaju pomiarów.

Mierzony odcinek czasu T jest równy [6]

$$T = nT_o + cT_o, \quad (3)$$

gdzie $n = \text{Int}(T/T_o)$ oznacza całkowitą liczbę okresów zegara wzorcowego w obrębie odcinka czasu T , a $c = \text{Frc}(T/T_o)$ stanowi pozostałą część odcinka T . Interpolatory mierzą zatem odcinek czasu równy

$$cT_o = T_A - T_B + (T_A < T_B)T_o. \quad (4)$$

Predykat ($T_A < T_B$) jest równy jeden, jeśli spełniona jest relacja $T_A < T_B$. W przeciwnym razie jego wartość wynosi zero.

Jeżeli współczynniki ekspansji K_1 i K_2 konwerterów czasowo-liczbowych odpowiednio w torach START i STOP zdefiniujemy następująco:

$$K_1 = T_o / q_1, \quad K_2 = T_o / q_2 \quad (5)$$

oraz przyjmiemy definicję

$$\frac{T_A}{q_1} = x = \text{Int}(x) + \text{Frc}(x), \quad (6)$$

to na podstawie wzoru (4) otrzymamy:

$$\frac{T_B}{q_2} = \frac{K_2}{K_1}x + K_2(p - c) = \text{Int}\left[\frac{K_2}{K_1}x + K_2(p - c)\right] + \text{Frc}\left[\frac{K_2}{K_1}x + K_2(p - c)\right], \quad (7)$$

gdzie $0 \leq x < K_1$ oraz $0 \leq c < 1$. Predykat p przyjmuje wartość jeden, jeśli $0 \leq x < K_1c$, natomiast dla $K_1c \leq x < K_1$ jest on równy zero.

Mierzony odcinek T czasu jest zatem równy

$$T = nT_o + q_1 \{ \text{Int}[x] + \text{Frc}[x] \} - q_2 \left\{ \text{Int}\left[\frac{K_2}{K_1}x + K_2(p - c)\right] + \text{Frc}\left[\frac{K_2}{K_1}x + K_2(p - c)\right] \right\}, \quad (8)$$

natomiast wynik pomiaru odcinka T jest jego wartością skwantowaną i równą T_q

$$T_q = nT_o + q_1 \text{Int}[x] - q_2 \text{Int}\left[\frac{K_2}{K_1}x + K_2(p - c)\right]. \quad (9)$$

Jeśli błąd kwantyzacji δ_q zdefiniujemy jako

$$\delta_q = T_q - T, \quad (10)$$

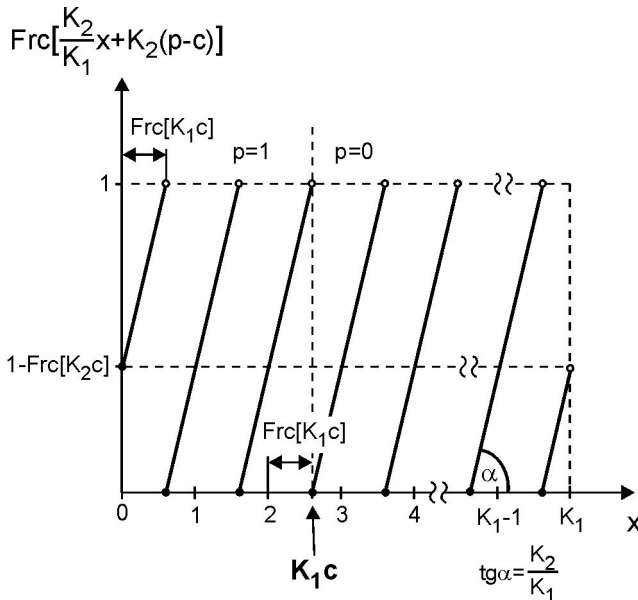
to po podstawieniu wzorów (8) i (9) otrzymujemy

$$\delta_q = q_2 \text{Frc}\left[\frac{K_2}{K_1}x + K_2(p - c)\right] - q_1 \text{Frc}[x]. \quad (11)$$

Część wzoru (11) zależną od wartości predykatu p można zapisać jako

$$\text{Frc}\left[\frac{K_2}{K_1}x + K_2(p-c)\right] = \begin{cases} \text{Frc}\left[\frac{K_2}{K_1}x + K_2(1-c)\right] & \text{dla } p=1 \\ \text{Frc}\left[\frac{K_2}{K_1}x - K_2c\right] & \text{dla } p=0. \end{cases} \quad (12)$$

Wykres funkcji opisanej zależnością (12) przedstawia rysunek 1.



Rys. 1. Wykres funkcji opisanej zależnością (12)

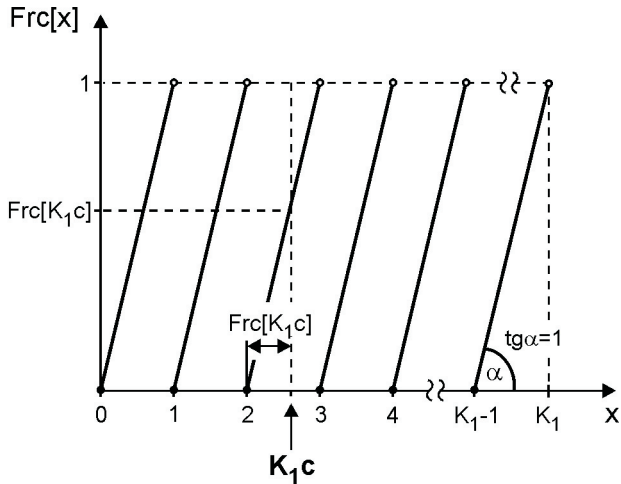
Pozostałą część wzoru (11) można zapisać jako

$$\text{Frc}[x] = x - r \quad (13)$$

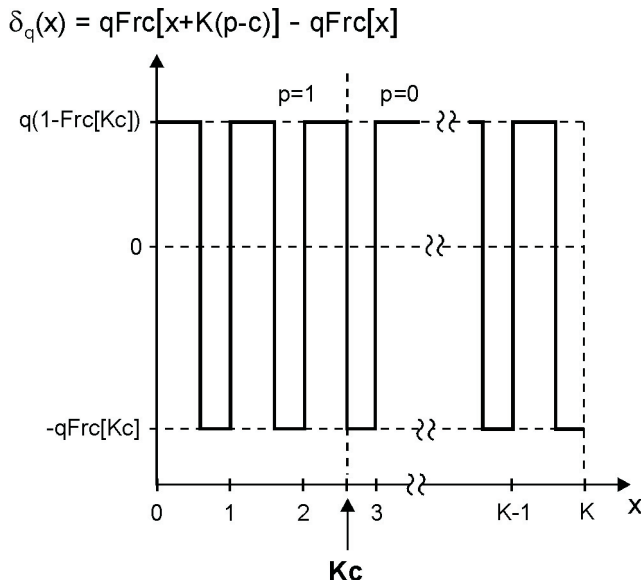
dla x w zakresie od r do $r + 1$. Parametr r przyjmuje wartości $0, 1, 2, \dots, K_1 - 1$. Wykres funkcji opisanej zależnością (13) przedstawia rysunek 2.

Wartości błędu kwantyzacji dla $K_1 = K_2 = K$ (czyli dla interpolatorów o jednakowych charakterystykach przetwarzania, $q_1 = q_2 = q$) przedstawia rysunek 3. Jak widać na rysunku 3, błąd kwantyzacji przyjmuje wartości $\delta_1 = q(1 - \text{Frc}[Kc])$ i $\delta_2 = -q \text{Frc}[Kc]$ z prawdopodobieństwami odpowiednio $p_1 = \text{Frc}[Kc]$ i $p_2 = 1 - \text{Frc}[Kc]$. Wartości: maksymalna i minimalna błędu kwantyzacji są równe

$$\begin{aligned} \delta_{q \min} &= \lim_{c \rightarrow 0} q \{1 - \text{Frc}[Kc] - \text{Frc}[Kc]\} = q \\ \delta_{q \max} &= \lim_{c \rightarrow 1} q \{1 - \text{Frc}[Kc] - \text{Frc}[Kc]\} = -q. \end{aligned} \tag{14}$$



Rys. 2. Wykres funkcji opisanej zależnością (13)



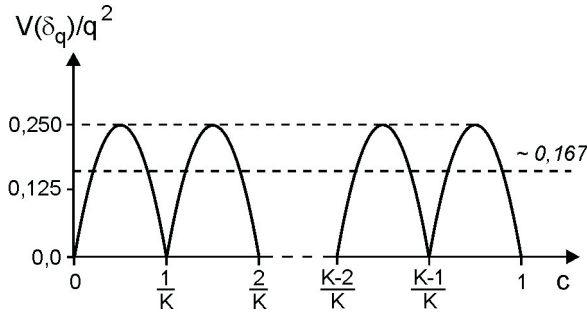
Rys. 3. Błąd kwantyzacji δ_q dla $K_1 = K_2 = K$

Dla idealnych interpolatorów wartość oczekiwana błędu kwantyzacji $E(\delta_q)$ jest równa zero. Wariancję błędu kwantyzacji $V(\delta_q)$ można obliczyć na podstawie definicji

$$V(\delta_q) = E(\delta_q^2) - [E(\delta_q)]^2 = q^2 \text{Frc}[Kc](1 - \text{Frc}[Kc]). \quad (15)$$

Przebieg wartości $V(\delta_q)/q^2$ przedstawia rysunek 4. Wartość średnia wariancji jest równa

$$\begin{aligned} V_{av} &= \int_0^1 V(\delta_q) dc = q^2 \int_0^1 \text{Frc}[Kc](1 - \text{Frc}[Kc]) dc = \\ &= q^2 K \int_0^{1/K} Kc(1 - Kc) dc = \frac{1}{6} q^2 \approx 0,167 q^2. \end{aligned} \quad (16)$$



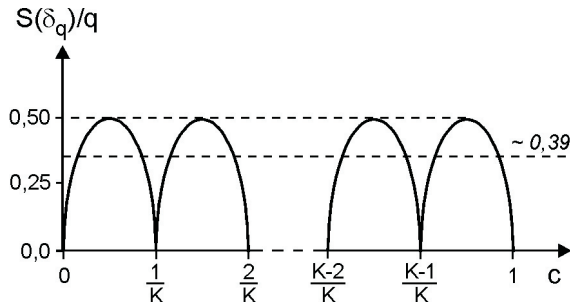
Rys. 4. Przebieg wartości $V(\delta_q)/q^2$

Odchylenie standardowe $S(\delta_q)$ można wyznaczyć na podstawie wariancji $V(\delta_q)$

$$S(\delta_q) = \sqrt{V(\delta_q)} = q \sqrt{\text{Frc}[Kc] \text{Frc}[1 - Kc]}. \quad (17)$$

Przebieg wartości $S(\delta_q)/q$ przedstawia rysunek 5. Wartość średnia odchylenia standardowego jest równa

$$\begin{aligned} S_{av} &= \int_0^1 S(\delta_q) dc = q \int_0^1 \sqrt{\text{Frc}[Kc] \text{Frc}[1 - Kc]} dc = \\ &= q K \int_0^{1/K} \sqrt{Kc(1 - Kc)} dc = q \int_0^1 \sqrt{x(1-x)} dx = \frac{\pi}{8} q \approx 0,39 q. \end{aligned} \quad (18)$$

Rys. 5. Przebieg wartości $S(\delta_q)/q$

Po podstawieniu $x = Kc$ ($dx = Kdc$) do wzoru (18), funkcja podcałkowa $\sqrt{x(1-x)}$ jest funkcją opisującą półokrąg o równaniu $y = \sqrt{0,25 - (x - 0,5)^2}$. Wartość całki oznaczonej jest zatem równa polu ograniczonemu przez ten półokrąg oraz oś odciętych, czyli $\pi/8$.

3. Podsumowanie

Spotykane w literaturze rozważania na temat niepewności pomiaru w precyzyjnej metrologii odcinków czasu dotyczą tylko pomiarów, gdy sygnały wyznaczające mierzone odcinek czasu nie są skorelowane. Przedstawiona analiza jest próbą określenia niepewności pomiaru odcinka czasu dla skorelowanych sygnałów określających ten odcinek czasu. Jak wykazano, należy rozróżnić dwa rodzaje pomiarów odcinków czasu, ponieważ wartości niepewności pomiarowej są różne.

Nieliniowość charakterystyk przetwarzania czas-liczba wynikają z istnienia różnych szerokości przedziałów kwantowania rzeczywistych interpolatorów. Powoduje to zmianę współczynników ekspansji K_1 i K_2 . Należy oczekiwać wzrostu wartości standardowej niepewności pomiarowej dla rzeczywistych interpolatorów.

Artykuł wpłynął do redakcji 19.07.2006 r. Zweryfikowaną wersję po recenzji otrzymano 22.09.2006 r.

LITERATURA

- [1] J. KALISZ, *Review of methods for time interval measurements with picosecond resolution*, Metrologia, (41), 2004, 17-32.
- [2] R. NUTT, *Digital time intervalometer*, Rev. Sci. Instrum., vol. 39, no. 9, September 1968, 1342-1345.
- [3] LeCroy, *Measurement precision of the LeCroy MTD 132A, AN-50A*, May 1992.
- [4] Texas Instruments, *Understanding Data Converter*, SLAA013, July 1995.

- [5] F. BARONTI, L. FANUCCI, D. LUNARDINI, R. RONCELLA, R. SALETTI, *On the differential nonlinearity of time-to-digital converters based on delay-locked-loop delay lines*, IEEE Trans. Nuclear Science, vol. 48, no. 6, December 2001, 2424-2431.
- [6] J. KALISZ, M. PAWŁOWSKI, R. PEŁKA, *Error analysis and design of the Nutt time-interval digitiser with picosecond resolution*, J. Phys. E: Sci. Instrum., vol. 20, 1987, 1330-1341.

R. SZYMANOWSKI

Quantization error of interpolation time counter

Abstract. If the input signals determining the period of the measured time interval T are not related then, the measurement uncertainty is equal to $q/\sqrt{6}$, where q is the interpolator resolution. For the correlated input signals ($T = \text{const}$) it is possible to determine the hit measurement channel of STOP interpolator for each channel of START interpolator. The presented analysis shows the influence of quantization error on the measurement uncertainty of time counter when input signals are correlated.

Keywords: time period measurement, interpolation time counter, quantization error

Universal Decimal Classification: 531.761