



Konstrukcja dynamicznego wykresu naprężenie-odkształcenie (σ - ε) na podstawie trwałych odkształceń pręta obciążonego udarowo

EDWARD WŁODARCZYK, JACEK JANISZEWSKI

Wojskowa Akademia Techniczna, Wydział Mechatroniki,
00-908 Warszawa, ul. S. Kaliskiego 2

Streszczenie. Opracowana przez G. I. Taylora, Th. Karmana i Ch. A. Rachmatulina teoria propagacji fal sprężysto-plastycznych w ośrodkach ciągłych wymaga stosowania dynamicznego związku naprężenie-odkształcenie (σ - ε). Związek ten różni się istotnie od statycznego wykresu σ - ε . W związku z tym opracowano wiele metod otrzymywania dynamicznej zależności σ - ε . W niniejszym artykule dokonano przeglądu niektórych metod konstrukcji dynamicznej zależności σ - ε , opartych na trwałych odkształceniach cylindrycznego pręta metalowego uderzającego prostopadłe z odpowiednią prędkością w nieodkształcalną przegrodę. W metodach tych wykorzystuje się analityczne rozwiązanie problemu oddziaływania centrowanej fali obciążenia (fali Reimanna) z odbitą od swobodnego końca pręta falą odciążenia silnej nieciągłości. Taki układ fal generowany jest w metalowym pręcie podczas zderzenia z nieodkształcalną przegrodą. Okazuje się, że trwałe (plastyczne) odkształcenia pręta, powstałe podczas procesu zderzenia, pozwalają skonstruować dynamiczny wykres σ - ε dla materiału, z którego jest on wykonany.

Słowa kluczowe: dynamiczna wytrzymałość metali, obciążenia udarowe, dynamiczna granica plastyczności, dynamiczny wykres naprężenie-odkształcenie

Symbol UKD: 669.018.2

1. Wstęp

Poczynając od drugiej połowy ubiegłego wieku, ciągle rośnie zainteresowanie dynamicznymi zagadnieniami teorii plastyczności i efektami rozprzestrzeniania się fal naprężeń w ośrodkach ciągłych. Już w 1953 roku problematyka ta pojawiła się w monografii poświęconej falom naprężenia [1], a następnie stała się przedmiotem rozważań zamieszczonych w wielu opracowaniach monograficznych [2-11]. Po-

trzeba prowadzenia takich badań wynika z zapewnienia niezawodności działania różnych części maszyn i obiektów specjalnego przeznaczenia, narażonych na dynamiczne obciążenia w warunkach ekstremalnych.

Wysiłki badaczy rozpatrujących te zagadnienia skoncentrowały się w dużej mierze na opracowaniu związków konstytutywnych w oparciu o zjawiska towarzyszące propagacji fal plastycznych w ośrodkach stałych, np. w metalach. W licznych eksperymentach przeprowadzonych przez wielu badaczy wykazano, że w niektórych metalach obciążonych udarowo stan plastyczny osiągany jest przy znacznie większych naprężeniach niż dla obciążenia statycznego. Zjawisko to zauważone zostało po raz pierwszy przez J. Hopkinsona [12] i jego syna, B. Hopkinsona [13]. Autorzy tych prac wykazali, że dynamiczna granica plastyczności dla stali jest prawie dwa razy większa od granicy statycznej.

W pracach poświęconych dynamicznym właściwościom materiałów przedstawiono różne propozycje równań konstytutywnych. Dla prostego stanu naprężenia (na przykład jednoosiowe rozciąganie lub ściskanie długich cylindrycznych próbek) związek między naprężeniem podłużnym σ a względnym odkształceniem ε można przedstawić w postaci funkcjonału:

$$f[\tau, \sigma(\tau), \varepsilon(\tau), T(\tau)] \Big|_{\tau=0}^t = 0, \quad (1.1)$$

gdzie T oznacza temperaturę, a t — czas.

Dla wielu procesów związek (1.1) udaje się rozwickłać względem naprężenia σ lub odkształcenia ε . I tak na przykład dla procesu izotermicznego otrzymuje się:

$$\sigma(t) = F[\tau, \varepsilon(\tau)] \Big|_{\tau=0}^t. \quad (1.2)$$

W ogólnym przypadku funkcjonał (1.2) ma strukturę nieliniową. Konkretną jego postać ustala się na podstawie teoretyczno-eksperymentalnych analiz. Jak się okazuje, istnieje dość szeroka klasa procesów $\varepsilon(t)$, dla których zależność (1.2) można przedstawić w postaci funkcji na przykład następującego typu:

$$\sigma = \Phi(\varepsilon, \dot{\varepsilon}, \ddot{\varepsilon}, \dots, \varepsilon^{(k)}), \quad (1.3)$$

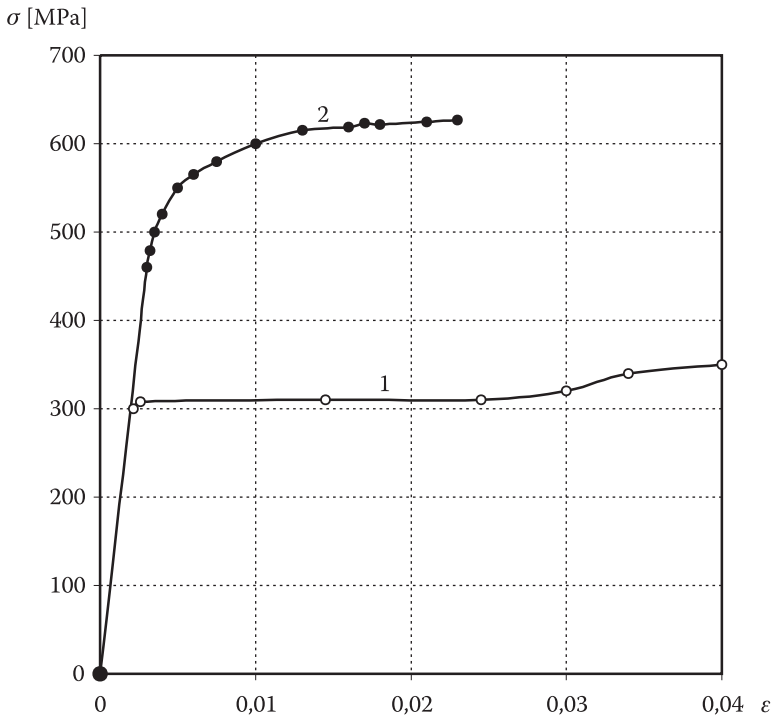
gdzie kropkami oznaczono różniczkowanie względem czasu do k -tego rzędu włącznie.

W teorii rozprzestrzeniania się sprężysto-plastycznych fal naprężenia, opracowanej przez G. I. Taylora [14], Th. Karmana [15] i Ch. A. Rachmatulina [16], zastosowano uproszczony związek (1.3) w postaci:

$$\sigma = \Phi(\epsilon). \quad (1.4)$$

Z góry wiadomo, że zależność (1.4) odnosi się do ograniczonej klasy procesów, w których zmiana szybkości odkształceń jest niewielka lub $\dot{\epsilon}(t) = d\epsilon/dt$ zmienia się w szerokim przedziale wartości, ale historia procesu $\epsilon(t)$ jest taka, że wpływ pochodnych $\dot{\epsilon}, \ddot{\epsilon}, \dots, \epsilon^k$ można pominąć.

Na podstawie teorii rozprzestrzeniania się fal sprężysto-plastycznych opracowano szereg metod określania dynamicznej zależności (1.4) [9, 10, 17-22]. Dynamiczny związek σ - ϵ różni się w sposób istotny od charakterystyki statycznej. Dla przykładu na rysunku 1 pokazano charakterystyki: dynamiczną i statyczną dla miękkiej stali [22]. W tym przypadku dynamiczna granica plastyczności jest około 1,6 razy większa od statycznej.



Rys. 1. Charakterystyka σ - ϵ dla miękkiej stali: 1 — statyczna; 2 — dynamiczna [22]

Różnicę między statycznym i dynamicznym wykresem σ - ϵ można objaśnić fizycznie tym, że pierwszy uzyskuje się podczas izotermicznego, a drugi — podczas adiabatycznego procesu obciążania. Obszerny materiał doświadczalny dotyczący dynamicznych właściwości metali zawarty jest w pracach [23, 24].

W niniejszym opracowaniu o charakterze przeglądowym skupimy uwagę na prostych, eksperymentalno-teoretycznych metodach określania dynamicznej zależności σ – ε za pomocą trwałych odkształceń pręta płasko zakończonego po uderzeniu nim w płaską nieodkształcalną płytę (tarczę).

2. Prostopadle zderzenie sprężysto-plastycznego pręta z nieodkształcalną płytą

2.1. Rozwiązanie dla krzywoliniowego związku σ – ε

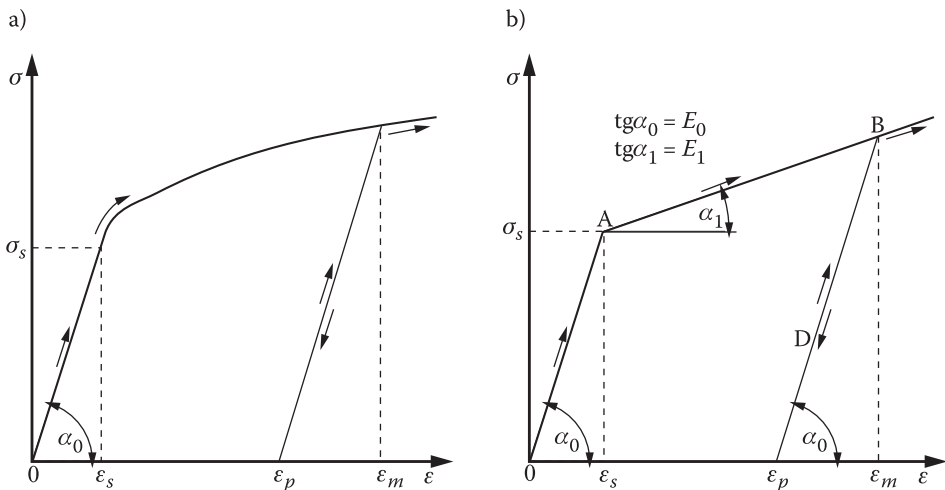
Niech w nieruchomą idealnie sztywną płytę uderza prostopadle z prędkością U płasko zakończony pręt o początkowej długości L . Poprzeczny przekrój pręta przed uderzeniem jest stały — $A_0 = \text{const}$. Właściwości mechaniczne materiału pręta opisane są krzywą σ – ε pokazaną na rysunku 2a. Wykres ten charakteryzuje się następującymi właściwościami:

$$\begin{aligned} \sigma &= E_0 \varepsilon & \text{dla } |\varepsilon| \leq \varepsilon_s, \quad \varepsilon_s > 0, \\ \frac{d^2 \sigma}{d\varepsilon^2} < 0 & & \text{dla } |\varepsilon| > \varepsilon_s, \end{aligned} \quad (2.1)$$

— na odcinku obciążenia oraz

$$\sigma_0 - \sigma = E_0 (\varepsilon_0 - \varepsilon) \quad (2.2)$$

— na odcinku odciążenia,



Rys. 2. Zależność σ – ε dla ośrodków sprężysto-plastycznych: a) nieliniowe wzmocnienie; b) liniowe wzmocnienie (model Prandtla)

gdzie σ_0 i ε_0 są wartościami naprężenia i odkształcenia na odcinku obciążenia (rys. 2a), ε_s jest odkształceniem odpowiadającym dynamicznej granicy plastyczności σ_s , natomiast E_0 oznacza moduł Younga materiału pręta.

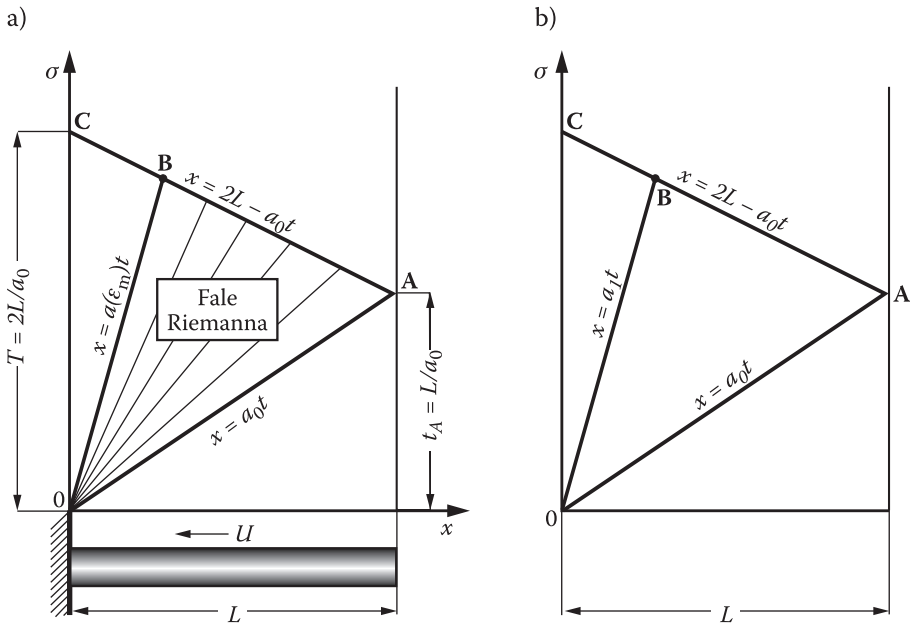
Rozwiązanie tak sformułowanego zagadnienia granicznego we współrzędnych Lagrange'a zamieszczone jest w monografii [9]. Przytoczymy go w skrócie.

Obraz falowy rozwiązania problemu przedstawiony jest na rysunku 3a. W pręcie podczas uderzenia generowana jest centrowana prosta fala obciążenia (fala Riemanna — obszar 0AB). Pęk fal Riemanna ograniczony jest charakterystykami:

$$\text{przednią} \quad x = a_0 t, \quad a_0 = \sqrt{E_0 / \rho} \quad (2.3)$$

$$\text{oraz tylną} \quad x = a(\varepsilon_m) t, \quad a(\varepsilon_m) = \sqrt{(d\sigma/d\varepsilon)_{\varepsilon=\varepsilon_m} / \rho}, \quad (2.4)$$

gdzie a_0 i a są prędkościami propagacji fali sprężystej i fal plastycznych w pęku fali obciążenia Riemanna; pozostałe symbole ε_m , ρ , x i t oznaczają odpowiednio: maksymalne odkształcenie w pręcie, gęstość materiału pręta, współrzędną Lagrange'a i czas.



Rys. 3. Obraz falowy w pręcie podczas uderzenia w nieodkształcalną płytę: a) nieliniowe wzmocnienie; b) liniowe wzmocnienie (model Prandtl'a)

Czoło fali Riemanna $x = a_0 t$ jest falą silnej nieciągłości, na której parametry stanu naprężenia i odkształcenia odpowiadają dynamicznej granicy plastyczności, tj. $\sigma = \sigma_s$ i $\varepsilon = \varepsilon_s$. Fala ta po osiągnięciu swobodnego końca pręta odbija się od niego i ulega przekształceniu w falę odciążenia silnej nieciągłości, która propaguje się w kierunku płyty. Wykażemy, że prędkość propagacji tej fali jest a_0 . W tym celu wykorzystamy warunki ciągłości kinematycznej

$$v_2 - v_1 = b(\varepsilon_2 - \varepsilon_1) \quad (2.5)$$

i ciągłości dynamicznej

$$\sigma_2 - \sigma_1 = \rho b(v_2 - v_1) = \rho b^2(\varepsilon_2 - \varepsilon_1) \quad (2.6)$$

oraz relację σ - ε na odcinku odciążenia w postaci

$$\sigma_1 - \sigma_2 = E_0(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) = \rho a_0^2(\varepsilon_1 - \varepsilon_2), \quad (2.7)$$

gdzie indeksami 1 i 2 oznaczono parametry odpowiednio przed i za czołem fali odciążenia silnej nieciągłości. Symbole b i v oznaczają odpowiednio prędkość propagacji fali odciążenia i prędkość masową elementów pręta.

Ze związków (2.6) i (2.7) bezpośrednio wynika, że $b = a_0$ i równanie fali odciążenia ma postać (rys. 3a):

$$x = 2l - a_0 t. \quad (2.8)$$

Rozwiązanie problemu w obszarze 0AB (rys. 3a), zgodnie z właściwościami fali Riemanna, można zapisać w następujący sposób:

$$\begin{aligned} a(\varepsilon) &= \frac{x}{t}, & a(\varepsilon) &= \sqrt{(d\sigma/d\varepsilon)/\rho}, \\ v &= \int_0^\varepsilon a(e)de + const, & \sigma &= \rho a(\varepsilon)v. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Z tyłu (od strony płyty) pęk fal Riemanna ogranicza charakterystyka

$$x = a(\varepsilon_m) t, \quad (2.10)$$

wzdłuż której rozprzestrzenia się maksymalne odkształcenie ε_m , zdeterminowane przez prędkość uderzenia, a mianowicie:

$$U = \int_0^{\varepsilon_m} a(\varepsilon) d\varepsilon. \quad (2.11)$$

Za pękiem fal Riemanna, w obszarze 0BC parametry problemu zachowują stałe wartości, tj.:

$$v = U, \quad \varepsilon = \varepsilon_m, \quad \sigma = \sigma_m = \rho a(\varepsilon_m) U. \quad (2.12)$$

Z analizy przedstawionego rozwiązania wynika, że podczas procesu uderzenia w pręcie nastąpiła wzdłuż jego długości zmiana granicy plastyczności. Określimy charakter tej zmiany. Z zależności (2.8) i (2.9)₁ otrzymuje się:

$$\begin{aligned} a(\varepsilon_0^0) &= \frac{a_0 x}{2L - x} \\ \text{lub} \\ \varepsilon_0^0(x) &= a^{-1}\left(\frac{a_0 x}{2L - x}\right), \end{aligned} \quad (2.13)$$

gdzie ε_0^0 jest wartością odkształcenia na fali odciążenia od strony fali Riemanna, natomiast $a^{-1}\left(\frac{a_0 x}{2L - x}\right)$ oznacza funkcję odwrotną do $a(\varepsilon_0^0)$.

Jeśli wykorzystamy liniowe prawo odciążenia, łatwo jest określić zmianę dynamicznej granicy plastyczności $\sigma_s(x)$ wzdłuż pręta po pierwszym uderzeniu, a mianowicie:

$$\sigma_s(x) = \sigma[\varepsilon_0^0(x)] = \sigma\left[a^{-1}\left(\frac{a_0 x}{2L - x}\right)\right]. \quad (2.14)$$

Jak już zaznaczono wcześniej, w obszarze 0BC odkształcenie pręta zachowuje stałą maksymalną wartość (2.11). Po odciążeniu pręta w tej strefie, odkształcenie trwale ma zatem również stałą wartość i określone jest wzorem:

$$\varepsilon_p = \varepsilon_m - \frac{\sigma(\varepsilon_m)}{E_0}. \quad (2.15)$$

Charakter zmiany plastycznego (trwałego) odkształcenia ε_p wzdłuż pręta z nieliniowym wzmocnieniem przedstawiono schematycznie na rysunku 4a.

Obecnie przejdziemy do konstrukcji rozwiązania dla zlinearyzowanego wykresu σ - ε .

2.2. Rozwiązanie dla materiału pręta z liniowym wzmocnieniem

Przyjmijmy, że właściwości mechaniczne materiału pręta opisane są modelem Prandtla (rys. 2b), tj.:

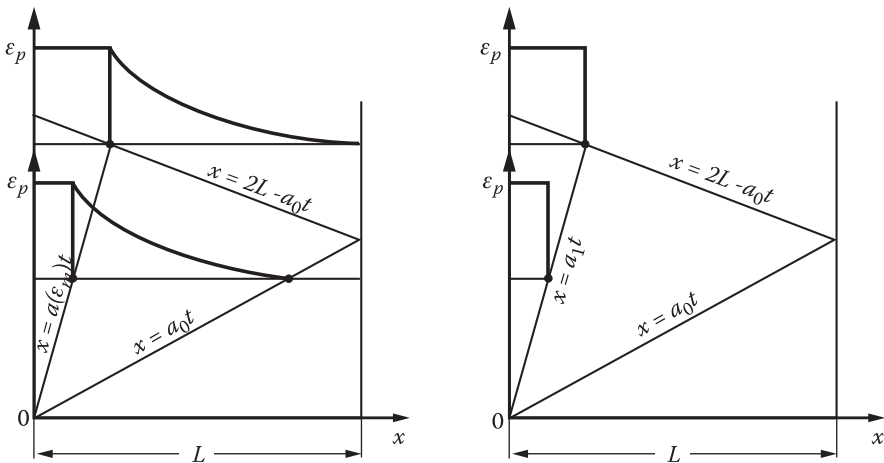
$$\begin{aligned} \sigma &= E_0 \varepsilon \quad \text{dla} \quad |\varepsilon| \leq \varepsilon_s, \\ \sigma &= E_0 \varepsilon_s + E_1 (\varepsilon - \varepsilon_s) \quad \text{dla} \quad |\varepsilon| \geq \varepsilon_s, \end{aligned} \quad (2.16)$$

gdzie E_0 i E_1 oznaczają dynamiczne moduły, odpowiednio: Younga i wzmocnienia.

Jeden z możliwych falowych obrazów rozwiązania problemu w tym przypadku ma postać pokazaną na rysunkach 3b i 4b. Pęk fal Riemanna (rys. 3a) dla modelu Prandtla (2.16), przy nagłym obciążeniu (udar) pręta, redukuje się do plastycznej fali obciążenia silnej nieciągłości (rys. 3b), która propaguje się w kierunku jego swobodnego końca zgodnie z równaniem:

$$x = a_1 t, \quad a_1 = \sqrt{E_1 / \rho}. \quad (2.17)$$

Falę plastyczną wyprzedza fala sprężysta $x = a_0 t$, która po odbiciu się od swobodnego końca pręta, podobnie jak poprzednio, przekształca się w falę odciążenia



Rys. 4. Rozkłady trwałych odkształceń w pręcie po uderzeniu w nieodkształcalną płytę: a) nieliniowe wzmocnienie; b) liniowe wzmocnienie (model Prandtla)

silnej nieciągłości. Fala ta interferuje z falą plastyczną i o zmienionej intensywności odbija się od płyty. Jeśli prędkość uderzenia U zawarta jest w przedziale [25]:

$$a_0 \varepsilon_s < U < 2a_0 \varepsilon_s, \quad (2.18)$$

to w chwili odbicia się fali odciążenia ($T = 2L/a_0$) pręt odskakuje od płyty i kończy się proces odkształceń plastycznych pręta.

W przypadku modelu Prandtla, wzór (2.11) po podstawieniu (2.16)₂ i scałkowaniu ma postać:

$$U = a_0 \varepsilon_s + a_1 (\varepsilon_m - \varepsilon_s). \quad (2.19)$$

Z kolei ze wzorów (2.15) i (2.16)₂, po przekształceniach otrzymuje się:

$$\left(1 - \frac{E_1}{E_0}\right) \epsilon_m = \epsilon_p + \left(1 - \frac{E_1}{E_0}\right) \epsilon_s. \quad (2.20)$$

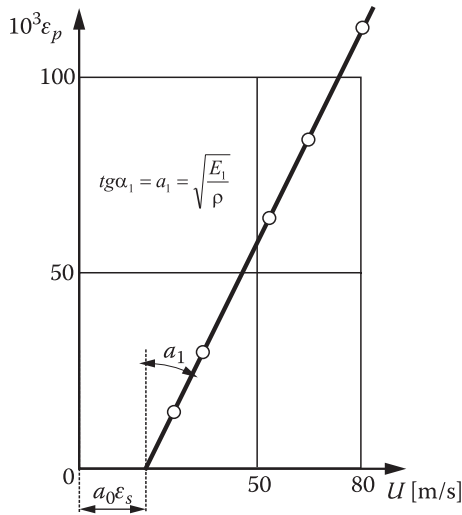
Dla większości metali (E_1/E_0) $\ll 1$ i wyrażenie (2.20) można aproksymować wzorem:

$$\epsilon_m \approx \epsilon_p + \epsilon_s. \quad (2.21)$$

Po podstawieniu (2.21) do (2.19) mamy:

$$U = a_0 \epsilon_s + a_1 \epsilon_p. \quad (2.22)$$

W ten sposób wykazaliśmy, że prędkość uderzenia U jest liniową funkcją trwałych odkształceń końca pręta. Zależność ta została potwierdzona eksperymentalnie (rys. 5).



Rys. 5. Zależność ϵ_p w funkcji U [26]: o — eksperyment, — teoria; próbka — pręt aluminiowy; $L = 0,5$ m, $d = 0,02$ m

3. Konstrukcja dynamicznego wykresu σ - ε oparta na eksperymentalnej funkcji $\varepsilon_p(x)$

3.1. Metoda Ch. A. Rachmatulina [26]

Jako pierwszą w kolejności rozpatrzmy metodę Ch. A. Rachmatulina, przy założeniu, że dynamiczny wykres σ - ε można aproksymować modelem Prandtla.

Z rezultatów eksperymentów przedstawionych w monografii [9] wynika, że dynamiczność obciążenia próbki praktycznie nie ma wpływu na wykres σ - ε w zakresie odkształceń sprężystych. Oznacza to, że dynamiczny i statyczny moduł Younga są takie same. Prędkość propagacji fal sprężystych w próbce obciążonej udarowo określana jest zatem wzorem:

$$a_0 = \sqrt{E_0/\rho}. \quad (3.1)$$

Mając to na uwadze, w wyrażeniu (2.22) należy określić eksperymentalnie dwie wielkości: ε_s i $a_1 = \sqrt{E_1/\rho}$. Parametry te zdeterminowane są doświadczalnym wykresem $\varepsilon_p = \varepsilon_p(U)$ (rys. 5). Po przedłużeniu prostoliniowego odcinka krzywej $\varepsilon_p - U$ do przecięcia się z osią OU otrzymuje się wartość iloczynu $a_0\varepsilon_s = U_s$, czyli:

$$\varepsilon_s = U_s/a_0. \quad (3.2)$$

Ostatecznie dynamiczną granicę plastyczności określa się z wzoru:

$$\sigma_s = E_0\varepsilon_s = \rho a_0 U_s. \quad (3.3)$$

Dynamiczny moduł liniowego wzmocnienia E_1 zdeterminowany jest przez kąt nachylenia α_1 prostoliniowego odcinka wykresu $\varepsilon_p - U$ do osi $O\varepsilon_p$ (rys. 5). Ze wzoru (2.22) i z wykresu $\varepsilon_p - U$ (rys. 5) wynika, że:

$$a_1 = \frac{dU}{d\varepsilon_p} = \operatorname{tg}\alpha_1 = \sqrt{\frac{E_1}{\rho}}. \quad (3.4)$$

Podczas aproksymacji dyskretnych wyników eksperymentalnych może okazać się, że wykres $\varepsilon_p - U$ jest linią prostą w całym zakresie zmian wartości badanych parametrów (rys. 5). W rzeczywistości w otoczeniu punktu $U_s = a_0\varepsilon_s$ występuje zakrzywienie linii $\varepsilon_p - U$. Rozbieżność ta wynika z aproksymacji nieliniowego wzmocnienia — wzmocnieniem liniowym (model Prandtla). Największe odchyłki w aproksymacji wykresu rzeczywistego σ - ε modelem Prandtla występują w otoczeniu granicy plastyczności. Dlatego wartość dynamicznej granicy plastyczności określona wzorem (3.3) jest nieco zawyżona.

Za pomocą określonej eksperymentalnie zależności $U = U(\varepsilon_p)$ można również skonstruować rzeczywisty krzywoliniowy dynamiczny wykres σ - ε . W tym celu należy zróżniczkować względem ε_p wyrażenie

$$U(\varepsilon_p) = \int_0^{\varepsilon_m} a(\varepsilon) d\varepsilon,$$

pamiętając, że

$$\varepsilon_p - \varepsilon_m = -\frac{\sigma(\varepsilon_m)}{E_0}.$$

Po wykonaniu tej czynności otrzymuje się:

$$\frac{dU}{d\varepsilon_p} \left[1 - \frac{1}{E_0} \frac{d\sigma(\varepsilon_m)}{d\varepsilon_m} \right] = \sqrt{\frac{1}{\rho_0} \frac{d\sigma(\varepsilon)}{d\varepsilon}} \Bigg|_{\varepsilon=\varepsilon_m}. \quad (3.5)$$

Ponieważ $dU/d\varepsilon_p$ jest znaną z eksperymentu funkcją wielkości $\varepsilon_m - \sigma(\varepsilon_m)/E_0$, wyrażenie (3.5) jest równaniem różniczkowym dla określenia dynamicznego wykresu σ - ε .

Ze szczegółami przedstawionej metody można się zapoznać w pracy [26]. Wadą tej metody jest konieczność stosowania serii jednakowych próbek do eksperymentalnego określania funkcji $U(\varepsilon_p)$. W praktyce laboratoryjnej jest to czynnik zwiększający pracochłonność i koszty badań.

3.2. Metoda W. S. Lenskiego [21]

Za pomocą metody W. S. Lenskiego, jeśli ma się określone trwale odkształcenia wzdłuż skończonego pręta, uzyskane podczas prostopadłego uderzenia nim w nieodkształcalną płaską płytę, można skonstruować dynamiczny wykres σ - ε dla danego materiału. Aby rozwiązanie problemu było jednoznaczne, zakłada się, że proces udaru jest skończony w chwili odbicia się fali odciążenia od płyty, tj. dla $t = T = 2L/a_0$. Warunek ten nakłada ograniczenie na wartość prędkości uderzenia. W przypadku modelu Prandtla założenie to jest spełnione, jeśli wartość prędkości uderzenia zawarta jest w przedziale $a_0\varepsilon_s \leq U \leq 2a_0\varepsilon_s$. W takich warunkach w przecię nie pojawiają się nowe fale plastyczne poza pękiem fal Riemanna (rys. 3a).

3.2.1. Konstrukcja dynamicznego wykresu σ - ε

Za czołem fali odciążenia, zgodnie z wykresem σ - ε , zawierającym krzywoliniowy odcinek wzmocnienia (rys. 2a), mamy:

$$\sigma = \sigma_0(x) - E_0[\varepsilon_0(x) - \varepsilon(x)], \quad \sigma_0 = \sigma[\varepsilon_0(x)], \quad (3.6)$$

gdzie ε_0 i σ_0 oznaczają odkształcenie i naprężenie na fali odciążenia od strony fali Riemanna (rys. 3a). Dla $\sigma = 0$ jest $\varepsilon = \varepsilon_p$ i z wyrażenia (3.6) otrzymuje się wzór na trwałe odkształcenie, a mianowicie:

$$\varepsilon_p(x) = \varepsilon_0(x) - \frac{\sigma_0(x)}{E_0}. \quad (3.7)$$

Dalej, z równań fali odciążenia $x = 2L - a_0 t$ i fali Riemanna $x = a(\varepsilon_0) t$, po wyeliminowaniu czasu t , otrzymuje się:

$$\frac{a[\varepsilon_0(x)]}{a_0} = \frac{x}{2L - x}. \quad (3.8)$$

Po zróżniczkowaniu wyrażenia (3.7) względem zmiennej Lagrange'a x i wykorzystaniu (3.8), mamy:

$$\frac{d\varepsilon_0(x)}{dx} = \frac{d\varepsilon_p(x)}{dx} \left/ \left[1 - \left(\frac{x}{2L - x} \right)^2 \right] \right. \quad (3.9)$$

Z kolei, po scałkowaniu wyrażenia (3.9) w przedziale $0-x$ jest:

$$\varepsilon_0(x) = \int_0^x \left\{ \frac{d\varepsilon_p(\xi)}{d\xi} \left/ \left[1 - \left(\frac{\xi}{2L - \xi} \right)^2 \right] \right. \right\} d\xi + C. \quad (3.10)$$

Ponieważ dla $x = L$, $\varepsilon_0(L) = \varepsilon_s$, zatem stała całkowania

$$C = \varepsilon_s - \int_0^L \left\{ \frac{d\varepsilon_p(\xi)}{d\xi} \left/ \left[1 - \left(\frac{\xi}{2L - \xi} \right)^2 \right] \right. \right\} d\xi$$

i wyrażenie (3.10) można przekształcić do postaci:

$$\varepsilon_0(x) = \varepsilon_s - \int_x^L \left\{ \frac{d\varepsilon_p(\xi)}{d\xi} \left/ \left[1 - \left(\frac{\xi}{2L - \xi} \right)^2 \right] \right. \right\} d\xi \quad (3.11)$$

lub

$$\varepsilon_0(x) = \varepsilon_s + \varepsilon_p(x) \left/ \left[1 - \left(\frac{x}{2L - x} \right)^2 \right] \right. + \int_x^L \frac{\xi(2L - \xi)\varepsilon_p(\xi)}{4L(L - \xi)^2} d\xi.$$

Dynamiczną wartość odkształcenia ε_s określa się ze wzoru:

$$v_1 = a_0 \varepsilon_s, \quad (3.12)$$

gdzie v_1 jest najmniejszą wartością prędkości uderzenia, dla której uzyskuje się małe trwałe odkształcenie pręta, np. rzędu 0,2%.

Podczas wyprowadzania wyrażenia (3.11) wykorzystano warunek $d\varepsilon_p/dx|_{x=L} = 0$, który jest rezultatem stycznego przejścia funkcji $\varepsilon_p(x)$ w odcinek sprężysty pręta.

Z wyrażen (3.7) i (3.11) wynika, że naprężenie jest określone wzorem:

$$\sigma_0(x) = \sigma_s + E_0 \varepsilon_p(x) \frac{x^2}{4L(L-x)} + E_0 \int_x^L \frac{\xi(2L-\xi)\varepsilon_p(\xi)}{4L(L-\xi)^2} d\xi. \quad (3.13)$$

Zależności (3.11) i (3.12) można rozpatrywać jako parametryczne równanie (parametrem jest zmienna Lagrange'a x) dla określenia dynamicznego wykresu σ - ε .

3.2.2. Określenie szybkości odkształcenia

Znajomość funkcji $\varepsilon_p(x)$ pozwala również oszacować średnią wartość szybkości odkształcenia w poszczególnych przekrojach pręta, a mianowicie:

$$\dot{\varepsilon}_{sr} = \frac{\Delta\varepsilon}{\Delta t} = \frac{\varepsilon_0(x) - \varepsilon_s}{\Delta t(x)} = \frac{\varepsilon_0(x) - \varepsilon_s}{t_0(x) - t_s(x)}, \quad (3.14)$$

gdzie t_0 jest chwilą, w której fala odciążenia $x = 2L - a_0 t_0$ przecina się z charakterystyką $x = a(\varepsilon_0) t_0$. Z zależności tych otrzymuje się:

$$t_0(x) = \frac{2L}{a_0 + a[\varepsilon_0(x)]}. \quad (3.15)$$

Dalej z równania czoła fali sprężystej mamy:

$$t_s(x) = \frac{x}{a_0}. \quad (3.16)$$

Po wykorzystaniu wyrażenia (3.8), z relacji (3.15) i (3.16) dostaje się:

$$t_0(x) - t_s(x) = 2 \frac{L-x}{a_0}, \quad (3.17)$$

natomiast z (3.11) otrzymuje się:

$$\varepsilon_0(x) - \varepsilon_s = \frac{(2L-x)^2 \varepsilon_p(x)}{4L(L-x)} + \int_x^L \frac{\xi(2L-\xi)\varepsilon_p(\xi)}{4L(L-\xi)^2} d\xi. \quad (3.18)$$

Ostatecznie, ze wzorów (3.14), (3.17) i (3.18) wynika, że

$$\dot{\varepsilon}_{sr} = \frac{a_0}{L} \left[\frac{(2-x/L)^2 \varepsilon_p(x)}{8(1-x/L)^2} + \frac{1}{2(1-x/L)} \int_x^L \frac{\xi(2L-\xi)\varepsilon_p(\xi)}{4L(L-\xi)^2} d\xi \right]. \quad (3.19)$$

Tym samym określono analitycznie średnią wartość szybkości odkształcenia w danym przekroju pręta na podstawie znajomości funkcji trwałych odkształceń pręta, powstałych podczas procesu jego prostopadłego zderzenia z nieodkształcalną płytą.

4. Przykład

Zakładamy, że funkcja charakteryzująca zmianę trwałych odkształceń wzdłuż pręta po akcie uderzenia w nieodkształcalną płytę ma postać:

$$\varepsilon_p(x) = \begin{cases} \varepsilon_{p0} = \text{const} & \text{dla } 0 \leq x \leq x_0, \\ \varepsilon_{p0} \left(\frac{L-x}{L-x_0} \right)^2 & \text{dla } x_0 \leq x \leq L, \end{cases} \quad (4.1)$$

gdzie x_0 jest współrzędną punktu B na rysunku 3.

Po podstawieniu funkcji (4.1) do wzoru (3.11) oraz scałkowaniu otrzymuje się:

$$\varepsilon_0(x) = \varepsilon_s + \frac{\varepsilon_{p0}}{4 \left(1 - \frac{x_0}{L}\right)^2} \left\{ 4 \left(1 - \frac{x_0}{L}\right)^2 + \frac{2}{3} \left[1 - \left(\frac{x_0}{L}\right)^3 \right] \right\} = \text{const} \quad (4.2)$$

dla $0 \leq x \leq x_0$ oraz

$$\varepsilon_0(x) = \varepsilon_s + \frac{\varepsilon_{p0}}{4 \left(1 - \frac{x_0}{L}\right)^2} \left\{ 4 \left(1 - \frac{x}{L}\right)^2 + \frac{2}{3} \left[1 - \left(\frac{x}{L}\right)^3 \right] \right\} \quad (4.3)$$

dla $x_0 \leq x \leq L$.

Zgodnie z wyrażeniami (3.7) i (4.1), naprężenie $\sigma_0(x)$ określa się z następujących wzorów:

$$\sigma_0(x) \equiv E_0 \left[\varepsilon_0(x) - \varepsilon_{p0} \right] \quad (4.4)$$

dla $0 \leq x \leq x_0$ oraz

$$\sigma_0(x) \equiv E_0 \left[\varepsilon_0(x) - \varepsilon_{p0} \left(\frac{L-x}{L-x_0} \right)^2 \right] \quad (4.5)$$

dla $x_0 \leq x \leq L$.

Średnią szybkość odkształcenia, zgodnie z wyrażeniami (3.14) i (3.17), określamy za pomocą wzoru:

$$\dot{\varepsilon}_{sr} = \frac{\varepsilon_0(x) - \varepsilon_s}{t_0(x) - t_s(x)} = \frac{a_0}{2(L-x)} [\varepsilon_0(x) - \varepsilon_s]. \quad (4.6)$$

Dla ułatwienia konstrukcji reprezentacji graficznych określonych wyżej funkcji, wprowadzono następujące wielkości bezwymiarowe:

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{x}{L}, & \xi_0 &= \frac{x_0}{L}, & e_0(\xi) &= \frac{\varepsilon_0(\xi)}{\varepsilon_s}, & e_p(\xi) &= \frac{\varepsilon_p(\xi)}{\varepsilon_s}, & e_{p0} &= \frac{\varepsilon_{p0}}{\varepsilon_s}, \\ \dot{\varepsilon}_{sr}(\xi) &= \frac{L}{a_0 \varepsilon_s} \dot{\varepsilon}_{sr}(\xi), & S_0(\xi) &= \frac{\sigma_0(\xi)}{\sigma_s}. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Wzory (4.2)-(4.6), wyrażone w wielkościach (4.7) mają postać:

$$e_0(\xi) = 1 + \frac{e_{p0}}{4(1-\xi_0)^2} \left[4(1-\xi)^2 + \frac{2}{3}(1-\xi^3) \right] = \text{const} \quad (4.8)$$

$$S_0(\xi) = e_0(\xi) - e_{p0} \quad (4.9)$$

$$\dot{\varepsilon}_{sr}(\xi) = \frac{1}{2(1-\xi)} [e_0(\xi) - 1] \quad (4.10)$$

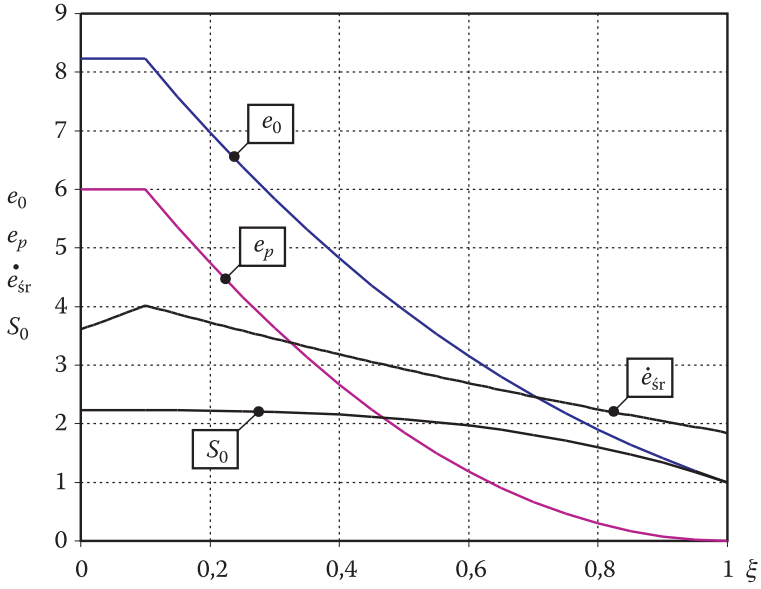
dla $0 \leq \xi \leq \xi_0$ oraz

$$e_0(\xi) = 1 + \frac{e_{p0}}{4(1-\xi_0)^2} \left[4(1-\xi)^2 + \frac{2}{3}(1-\xi^3) \right] \quad (4.11)$$

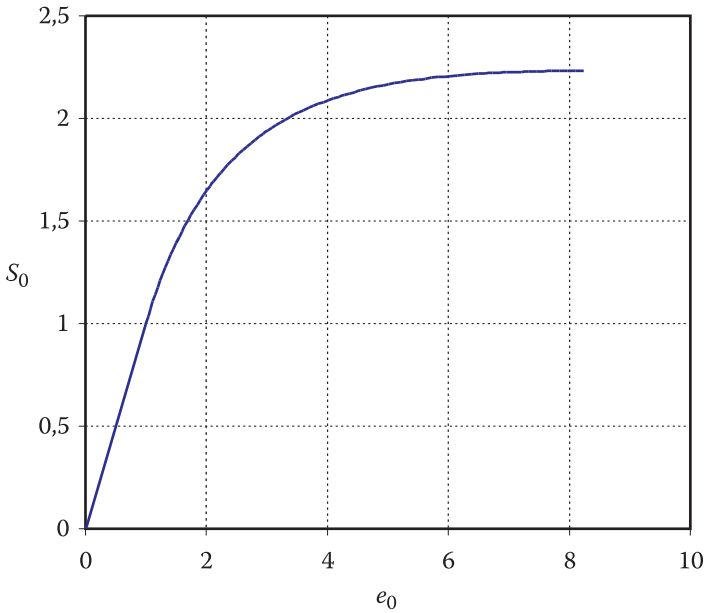
$$S_0(\xi) = e_0(\xi) - \left(\frac{1-\xi}{1-\xi_0} \right)^2 e_{p0} \quad (4.12)$$

$$\dot{\varepsilon}_{sr}(\xi) = \frac{1}{2(1-\xi)} [e_0(\xi) - 1] \quad (4.13)$$

dla $\xi_0 \leq \xi \leq 1$.



Rys. 6. Zmiana funkcji ε_0 , ε_p , ε_{sr} i S_0 wzdłuż pręta na fali odciążenia



Rys. 7. Charakterystyka dynamiczna S_0-e_0

Charakterystyki zmian funkcji $e_p(\xi)$, $e_0(\xi)$, $S_0(\xi)$ i $\dot{\varepsilon}_{sr}(\xi)$ na fali odciążenia wzdłuż pręta dla $\xi_0 = 0,1$ i $e_{p0} = 6$ pokazane są na rysunku 6. Z kolei na rysunku 7 zaprezentowano związek S_0-e_0 dla przyjętych wyżej wartości ξ_0 i e_{p0} .

Z przytoczonego przykładu wynika, że na podstawie trwałych odkształceń pręta, powstałych w procesie prostopadłego zderzenia z nieodkształcalną płytą można skonstruować dynamiczny wykres σ - ε i określić średnią szybkość zmiany wartości odkształcenia w poszczególnych przekrojach poprzecznych pręta.

Przedstawione w artykule wyniki stanowią część pracy naukowej finansowanej ze środków Ministerstwa Nauki i Szkolnictwa Wyższego w latach 2004-2006 jako projekt badawczy nr 0 T00C 008 27.

Artykuł wpłynął do redakcji 29.03.2006 r. Zweryfikowaną wersję po recenzji otrzymano w październiku 2006 r.

LITERATURA

- [1] H. KOLSKY, *Stress waves in solids*, Clarendon Press, Oxford, 1953.
- [2] N. CRISTESCU, *Dynamic plasticity*, North-Holland, Amsterdam, 1967.
- [3] R. KINSLOW, *High-velocity impact phenomena*, Academic Press, New York, 1970.
- [4] J. Henrych, *The dynamics of explosion and its use*, Academia, Praga, 1979.
- [5] J. A. ZUKAS, *Impact dynamics*, Wiley-Interscience, New York, 1962.
- [6] K. NOWACKI, *Zagadnienia falowe w teorii plastyczności*, PWN, Warszawa, 1974.
- [7] P. PERZYNA, *Teoria lepkoplastyczności*, PWN, Warszawa, 1966.
- [8] S. KALISKI, Z. DŻYGADŁO, L. SOLARZ, E. WŁODARCZYK, *Drgania i fale*, PWN, Warszawa, 1966.
- [9] X. A. РАХМАТУЛИН, Ю. А. ДЕМЬЯНОВ, *Прочность при интенсивных кратковременных нагрузках*, Физ. Мат. Лит., Москва, 1961.
- [10] Г. С. ШАПИРО, *Проблемы динамики упруго-пластических сред*, Механика, т. 5, И. Ю. ИШЛИНСКИЙ, Г. Г. ЧЕРНЫЙ (ред), Мир, Москва, 1975.
- [11] U. S. LINDHOLM (ed), *Mechanical behaviour of materials under dynamic loads*, Springer, New York, 1968.
- [12] J. HOPKINSON, *On the rupture of iron wire by a blow*, Proc. Man. Lit. Phil., 11, 40, 1972 oraz *Futher experiments on the rupture of iron wire*, Proc. Man. Lit. Phil., 11, 15, 1972.
- [13] B. HOPKINSON, *The effects of momentary stress in metals*, Proc. Roy. Soc. A 74, 498, 1905.
- [14] G. I. TAYLOR, *The plastic wave in a wire extended by on impact load*; G. I. TAYLOR, *Scientific Papers*, Cambridge, 1942.
- [15] T. KARMAN, P. DUWEZ, *The propagation of plastic deformation in solids*, J. Appl. Phys., 21, 1950.
- [16] X. A. РАХМАТУЛИН, *О распространении волны разгрузки*, PMM, т. IX, 1, 1945.
- [17] G. I. TAYLOR, *The use of flat-ended projectiles for determining dynamic yield stress, I. Theoretical considerations*, Proc. R. Soc. Load. A, 1948.
- [18] A. C. WHIFFIN, *The use of flat-ended projectiles for determining dynamic yield stress, II. Tests on various metallic materials*, Proc. R. Soc. Load. A, 1948.
- [19] H. KOLSKY, L. S. DOUCH, *Experimental studies in plastic wave propagation*, J. Mech. Phys. Solids, vol. 10, 1962, 195-223.

- [20] J. KLEPACZKO, *Doświadczalne badania sprężysto-plastycznych procesów falowych w metalach*, Część I. Prace IPPT PAN, 61, Warszawa, 1970.
- [21] В. С. ЛЕНСКИЙ, *Метод построения динамической зависимости между напряжениями и деформациями*, Вестник МГУ, 10, 1953.
- [22] Р. И. НАДЕЕВА, *Об определении динамической зависимости между напряжениями и деформациями*, Вестник МГУ, 10, 1953.
- [23] D. S. CLARK, *The behaviour of metals under dynamic loading*, Trans. Amer. Soc. Metals, 46, 1954; Metal Progress, 64(5), 1953.
- [24] D. CLARK, D. WOOD, *The properties of some metals and alloys on tensile impact*, Transactions of American Society of Metals, 42, 1950.
- [25] E. WŁODARCZYK, *Balistyka końcowa pocisków amunicji strzeleckiej*, t. I, WAT, Warszawa, 2006.
- [26] X. А. РАХМАТУЛИН, *К проблеме распространения волн в упруго-пластической среде*, Сборник Института Механики АН СССР, 1949.

E. WŁODARCZYK, J. JANISZEWSKI

Construction of a dynamical stress-strain plot on a basis of plastic strain of impact loaded bar

Abstract. The theory of Taylor, Karman's, and Rakhmatulin's on elastic-plastic waves propagation in continuous media requires application of dynamical stress-strain relation. In fact, this relation is different from static stress-strain curve. Therefore, some methods for the dynamic stress-strain plot performance were elaborated. The survey of the construction methods of the dynamical stress-strain plot on the basis of plastic strain of the impact loaded bar has been presented here. Analytical solution of the problem of interaction of the centered Riemann's wave with an unloading wave of strong discontinuity, reflected from free end of the bar, was used. Such waves system is generated in the metal bar during its striking with a rigid target. It turned out, that plastic strain of the bar, produced during the impact, allows for constructing the dynamic stress-strain curve for bar material.

Keywords: dynamic metal strength, impact loading, dynamic yield strength, dynamic stress-strain curve

Universal Decimal Classification: 669.018.2