

# Wyznaczanie 3- optymalnych struktur opiniowania diagnostycznego typu PMC

**Artur ARCIUCH**

Zakład Systemów Komputerowych, Instytut Teleinformatyki i Automatyki WAT,  
ul. Kaliskiego 2, 00-908 Warszawa

**STRESZCZENIE:** Najtańszą 3-diagnozowalną strukturą, ze względu na liczbę opinii (testowań) potrzebnych na określenie stanu niezawodnościowego systemu, jest (z reguły) struktura 3-optymalna. Do wyznaczenia silnie spójnych 3-optymalnych struktur o określonych własnościach można wykorzystać rdzeń struktury. W publikacji tej autor zaproponował sposób generowania rdzeni 3-optymalnych struktur oraz wyznaczania struktury na podstawie rdzenia i określenia liczby następników dla poszczególnych węzłów struktury. Do wyznaczania struktur wykorzystano autorskie narzędzia w postaci programów komputerowych.

## 1. Wprowadzenie

W artykule przedstawiono sposób wyznaczenia 3-optymalnej silnie spójnej struktury opiniowania diagnostycznego typu PMC o określonych wymaganiach.

Sieć komputerowa (wg PN-92/T-01016/18) może posiadać następujące podstawowe struktury: liniową, gwiazdową, drzewiastą, pierścieniową oraz oczkową. Niezależnie od topologii sieci, można wyróżnić strukturę sieci komputerowej, która opisuje związki umożliwiające wymianę informacji między komputerami sieci dla zrealizowania konkretnego zadania. Dana sieć komputerowa, w zależności od wykonywanych zadań głównych i zadań pomocniczych, może więc przyjmować różne współistniejące struktury logiczne. Jedną ze struktur logicznych sieci komputerowej może być struktura wykorzystywana w procesie samodiagnozowania sieci komputerowej.

Proces samodiagnozowania sieci komputerowej wiąże się z kosztem wynikającym z okresowego generowania dodatkowego ruchu w sieci komputerowej, w celu uzyskania informacji o stanie niezawodnościowym systemu, na podstawie opinii o stanach niezawodnościowych poszczególnych komputerów sieci. W większości sieci proces samotestowania nie wpływa znacząco na zmniejszenie przepustowości linii transmisyjnych, jednak w przypadku sieci o specjalnym znaczeniu, dodatkowe obciążenie sieci może być istotne. O ile koszt wykonania zadania funkcjonalnego (testu) przez dany komputer jest porównywalny dla wszystkich komputerów w sieci, o tyle odległości między węzłami (wzajemne położenie węzłów) mają znaczący wpływ na wzrost obciążenia sieci, a tym samym na czas testowania. W przypadku ogólnym koszty opiniowania jednego komputera przez inny nie są więc jednakowe – zależą od struktury fizycznej i logicznej sieci komputerowej oraz wynikają z jej heterogeniczności.

Sieci komputerowe są systemami złożonymi z wielu elementów, rozmieszczonych na pewnym obszarze, realizujących określone zadania na rzecz użytkowników systemu oraz zadania pomocnicze na rzecz utrzymania systemu w stanie zdadności. Ze względu na duży stopień jednorodności produktów wejściowych i wyjściowych poszczególnych elementów systemu, sieci komputerowe są podatne na stosowanie metod diagnozowania, wykorzystujących wyniki wzajemnego testowania się elementów systemu. Pewną klasę takich systemów stanowią systemy *samodiagnozowalne* [6], w szczególności struktury PMC (*Preparata F. P., Metze G., Chien R. T.*) [9] i [3]. Wnioskowanie o stanie niezawodnościowym systemu jest przeprowadzane na podstawie wyników wszystkich możliwych testowań. Systemy, w których podjęcie decyzji o stanie niezawodnościowym odbywa się na podstawie wszystkich możliwych testowań, nazywamy systemami *opiniowania diagnostycznego* [2], [8].

*Struktura opiniowania diagnostycznego* (OD) jest digrafem  $G$  (gdzie graf  $G$  składa się ze zbioru węzłów  $E$  oraz zbioru łuków  $U$ ) bez pętli, w którym łuk  $\langle e', e'' \rangle \in U$  oznacza, że węzeł (komputer)  $e'$  systemu opiniuje (testuje) stan niezawodnościowy innego węzła (komputera)  $e''$ .

Strukturę OD, w której możliwe jest zidentyfikowanie wszystkich niezdatnych węzłów, pod warunkiem, że nie jest ich więcej niż  $m$ , nazywamy strukturą *m-diagnozowalną*, a strukturę *m-diagnozowalną*, posiadającą minimalną liczbę łuków – strukturą *m- optymalną*.

Własność 1. [9] Jeżeli struktura OD typu PMC jest strukturą *m-diagnozowalną*, to

$$(\|E\| \geq 2m + 1) \wedge (\forall e \in E : \mu^-(e) \geq m), \quad (1)$$

gdzie  $\|E\|$  oznacza licznosc zbioru  $E$ , a  $\mu^-(e)$  – stopień wejściowy węzła  $e$ , to jest liczbę elementów, które testują (opiniują) element  $e$ .

Własność 2. [1] Struktura OD typu PMC, która spełnia warunek (1) jest strukturą  $m$ -diagnozowalną wtedy i tylko wtedy, gdy

$$((\forall 0 \leq p \leq m-1) \wedge (\forall E' \subset E : \|E'\| = \|E\| - 2m + p)) : \|\Gamma(E')\| > p, (2)$$

gdzie  $\Gamma(E')$  oznacza zbiór następników elementów zbioru  $E'$ , które nie są elementami zbioru  $E'$ . Jeżeli  $E' = \{e\}$ , to będzie stosowane oznaczenie  $\Gamma(e)$ .

Własność 3. [8] Struktura OD typu PMC, która spełnia warunek  $\|E\| \geq 2m + 1$  jest strukturą  $m$ -diagnozowalną ( $m > 1$ ) wtedy i tylko wtedy, gdy

$$(\forall E' \subset E : 1 \leq \|E'\| \leq 2(m-1)) : \|\Gamma^{-1}(E')\| > m - \lceil 2^{-1}\|E'\| \rceil, (3)$$

gdzie  $\Gamma^{-1}(E')$  oznacza zbiór poprzedników elementów zbioru  $E'$ , które nie są elementami zbioru  $E'$ , a  $\lceil \alpha \rceil$  oznacza najmniejszą wartość całkowitą  $\alpha$  taką, że  $\lceil \alpha \rceil \geq \alpha$ . Jeżeli  $E' = \{e\}$ , to będzie stosowane oznaczenie  $\Gamma^{-1}(e)$ .

Z definicji struktury  $m$ -optymalnej i warunku (1) wynika, że  $m$ -optymalną strukturą OD typu PMC jest taka  $m$ -diagnozowalna struktura OD typu PMC, dla której

$$\forall e \in E : \mu^{-}(e) = m. (4)$$

Strukturę OD, której łukom przypisany jest uogólniony koszt opiniowania, nazywamy *ekonomiczną strukturą OD*.

Zainteresowanie metodami wyznaczania  $m$ -optymalnych struktur OD wynika, między innymi stąd, że jeżeli uogólniony koszt ekonomicznej  $m$ -diagnozowalnej struktury OD jest sumą uogólnionych kosztów poszczególnych opinii, to najtańszą ekonomiczną strukturą  $m$ -diagnozowalną jest struktura  $m$ -optymalna.

Przedstawiona w publikacji metoda wyznaczania 3-optymalnych struktur zakłada, że koszty opiniowania przypisane poszczególnym łukom struktury są jednakowe lub zbliżone.

## 2. Własności 3- optymalnych struktur OD typu PMC

Z zależności (1), (2), (3) i (4) wynika, że digraf bez pętli  $G = \langle E, U \rangle$  opisuje 3- optymalną strukturę OD typu PMC wtedy i tylko wtedy, gdy

$$(\|E\| \geq 7) \wedge (\forall e \in E : \mu^-(e) = 3) \quad (5)$$

oraz

$$((\forall 0 \leq p \leq 2) \wedge (E' \in E : \|E'\| = \|E\| - 6 + p)) : \|\Gamma(E')\| > p \quad (6)$$

i

$$(\forall E' \subset E : 1 \leq \|E'\| \leq 4) : \|\Gamma^{-1}(E')\| > 3 - \lceil 2^{-1} \|E'\| \rceil. \quad (6^*)$$

Własność 4. Zbiór składowych silnej spójności 3- optymalnej struktury OD nie jest zbiorem pustym, bo w przeciwnym razie istniałby taki węzeł  $e' \in E$ , że  $\mu^-(e) = 0$ , co przeczyłoby warunkowi (5).

Własność 5. Jeżeli podgraf  $\langle E(G) \setminus \{e'\} \rangle_G$ , gdzie  $\|E(G)\| \geq 8$ , grafu  $G$  jest 3- optymalną strukturą OD typu PMC oraz  $\forall e \in E(G) : \mu^-(e) = 3$ , to graf  $G$  również jest 3- optymalną strukturą OD typu PMC, bo z założenia zależności (5) i (6) są spełnione dla każdego takiego podzbioru  $E'$ , że  $(E' \subset E \setminus \{e'\}) \wedge (\|E'\| = (\|E\| - 1) - 6 + p)$ , a więc są również spełnione dla każdego takiego podzbioru  $E''$ , że  $(E'' \subset E) \wedge (\|E''\| = \|E\| - 6 + p) \wedge (e' \in E'')$ .

Z własności 5. wynika bezpośrednio następująca własność:

Własność 6. Spójna 3- optymalna struktura OD typu PMC ma dokładnie jedną składową silnej spójności, bo w przeciwnym razie istniałyby takie różne składowe silnej spójności  $\langle E^* \rangle_G$  i  $\langle E^{**} \rangle_G$ , że  $\Gamma(E^*) \cap E^{**} \neq \emptyset$ , a więc zgodnie z własnością 6. istniałby taki węzeł  $e' \in E^{**}$ , że  $\mu^-(e') > 3$ , co przeczyłoby założeniu, że struktura jest 3- optymalna.

Z warunku (5) i własności 4. wynika bezpośrednio następująca własność:

Własność 7. Składowa silnej spójności 3- optymalnej struktury OD typu PMC jest rzędu co najmniej siódmego.

Określenie 1. Graf częściowy 3- optymalnej struktury OD typu PMC, utworzony przez usunięcie gałęzi, które wchodzą w skład cykli skierowanych, z podgrafu powstałego przez usunięcie ze składowej silnej spójności struktury węzłów, które posiadają następniki tylko w składowej silnej spójności, nazywamy *acykliczną częścią struktury*.

Z powyższych własności wynika następująca własność:

Własność 8. Spójna 3- optymalna struktura OD typu PMC zawiera dokładnie jedną składową silnej spójności  $G'$ , gdzie  $G' = \langle E' \rangle_G$ ,  $\|E'\| \geq 7$ , która jest 3- optymalną strukturą OD typu PMC, oraz taki acykliczny digraf bez pętli  $G''$ , gdzie  $G'' = \langle E \setminus E' \rangle_G$ , że  $\forall e \in E \setminus E' : \mu_G^-(e) = 3$ .

Korzystając z własności 8., można projektowanie struktury rozłożyć na projektowanie składowej silnej spójności oraz na projektowanie acyklicznej części struktury. Zauważmy, że, zgodnie z własnością 6., acykliczną część struktury można konstruować w sposób sekwencyjny.

Niech  $M = [m_{i,j}]_{\|E\| \times \|E\|}$  oznacza macierz przejść grafu  $G$ , przy czym  $\|E\| = k \geq 7$ , opisującego strukturę OD.

Oznaczmy:

$$m_{i\bullet} = m_{i1} + \dots + m_{ij} + \dots + m_{ik} \quad (1 \leq i \leq k);$$

$$m_{\bullet j} = m_{1j} + \dots + m_{ij} + \dots + m_{kj} \quad (1 \leq j \leq k).$$

Oczywiście:  $m_{i\bullet} = \mu^+(e_i) = \|\Gamma(e_i)\|$  oraz  $m_{\bullet j} = \mu^-(e_j) = \|\Gamma^{-1}(e_j)\|$ .

Tak więc:

$$\begin{aligned} & [E' = \{e_{i_1}, \dots, e_{i_r}\} \subset E, (1 \leq r < k)] \Rightarrow \\ & \Rightarrow [(\|\Gamma(E')\| = \|\{j \in I \setminus \{i_1, \dots, i_r\} : (\exists i \in \{i_1, \dots, i_r\} : m_{i,j} = 1)\}\|) \wedge \\ & \wedge (\|\Gamma^{-1}(E')\| = \|\{i \in I \setminus \{i_1, \dots, i_r\} : (\exists j \in \{i_1, \dots, i_r\} : m_{i,j} = 1)\}\|)], \\ & \text{gdzie } I = \{1, 2, \dots, k\}. \end{aligned} \quad (7)$$

Inaczej mówiąc, aby wyznaczyć wartość  $\|\Gamma(E')\|$ , należy wykreślić z macierzy  $M$  kolumny o numerach odpowiadających indeksom elementów zbioru  $E'$  i policzyć te kolumny, które w wierszach o numerach odpowiadających indeksom elementów zbioru  $E'$ , mają co najmniej jeden element o wartości jeden. Analogicznie, aby wyznaczyć wartość  $\|\Gamma^{-1}(E')\|$ , należy wykreślić z macierzy  $M$  wiersze o numerach odpowiadających indeksom elementów zbioru  $E'$  i policzyć te wiersze, które w kolumnach o numerach odpowiadających indeksom elementów zbioru  $E'$ , mają co najmniej jeden element o wartości jeden.

Z zależności (5) i (6) wynika bezpośrednio następująca własność:

Własność 9. Macierz binarna  $M_{(k \times k)}$ , gdzie  $k \geq 7, m_{ij} \in M$ , o zerowej przekątnej, zawierająca w każdej kolumnie trzy elementy równe jeden, jest macierzą przejść 3- optymalnej struktury OD typu PMC wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\neg \exists ((\{i_1, \dots, i_{r(k,p)}\} \subset I) \wedge (\{j_1, \dots, j_{6-2p}\} \subseteq I \setminus \{i_1, \dots, i_{r(k,p)}\})): \\ : m_{i_1 j_1} = \dots = m_{i_{6-2p} j_{6-2p}} = \dots = m_{i_{r(k,p)} j_{6-2p}} = 0, \quad (8)$$

gdzie:  $(0 \leq p \leq 2), r(k, p) = k - 6 + p$  oraz  $I = \{1, \dots, k\}$ .

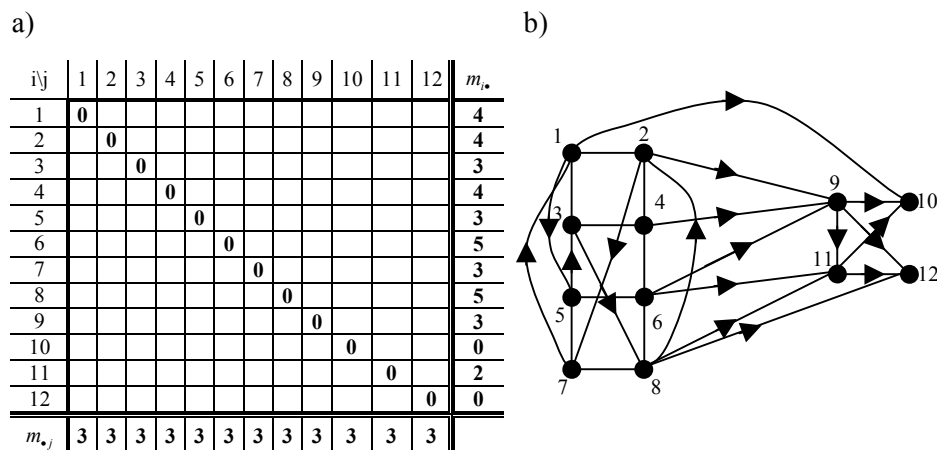
Dla przykładu, macierz  $M$  (rys. 1) nie spełnia zależności (5), ponieważ  $m_{\bullet 6} = 2$ , oraz nie spełnia zależności (6), ponieważ na podstawie zależności (7) dla  $E' = \{2, 3, 6\} \wedge p = 1$  wartość  $\|\Gamma(E')\| = 1$ , oraz nie spełnia zależności (8), ponieważ (dla  $p = 1$ ) istnieją takie wiersze 2, 3 i 6 oraz kolumny 1, 5, 7 i 8, że elementy macierzy na ich przecięciu mają wartość zero.

0	1	0	0	1	0	0	1
0	0	1	0	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0	0
1	0	1	0	1	0	1	1
0	0	1	0	0	0	1	1
0	1	0	0	0	0	0	0
1	0	0	1	1	1	0	0
1	0	0	1	0	1	1	0

**Rys. 1. Macierz przejść  $M$  niespełniająca zależności (5), (6), (7) i (8)**

Wyznaczenia struktur 3- optymalnych można dokonać, rozwiązując, częściowo określony poprzez zdefiniowane parametry  $m_{\bullet i}$  oraz  $m_{\bullet j}$  (oczywiście zgodnie z zależnością (5) –  $m_{\bullet j} = 3$ ), kwadrat łaciński. Rozwiązania tak określonego kwadratu łacińskiego muszą spełniać zależności (6) i (8). Uzyskany w ten sposób zbiór rozwiązań należy zredukować o rozwiązania izomorficzne. Dla przykładu, na rysunku 2a zamieszczono przykład kwadratu łacińskiego, którego jednym z rozwiązań jest struktura z rysunku 2b.

Oba zadania są problemami trudnymi ze względu na to, że własności struktur OD istotnie ograniczają analityczne sposoby ich wyznaczania. Dlatego autor poszukuje rozwiązania, posługując się specjalnie do tego przygotowanymi autorskimi programami komputerowymi, wykorzystującymi wybrane własności 3-diagnozowalnych struktur OD typu PMC. W dalszej części publikacji przedstawiono sposób wyznaczania silnie spójnej najtańszej 3-diagnozowalnej struktury OD typu PMC, spełniającej określone wymagania.



Rys. 2. Przykład częściowo określonego kwadratu lacińskiego (2a) oraz struktury będącej jednym z rozwiązań tego kwadratu lacińskiego (2b)

**Określenie 2.** Graf częściowy optymalnej silnie spójnej struktury opiniowania diagnostycznego, utworzony po usunięciu takich łuków  $\langle e'', e' \rangle$ , że  $(e' \in \Gamma(e'')) \Rightarrow (e'' \notin \Gamma(e'))$ , nazywamy rdzeniem tej struktury.

Rdzeń struktury jest kanonicznym reprezentantem klasy podobieństwa silnie spójnych optymalnych struktur OD określonego typu i rzędu [5]. Z zależności (5) wynika, że rdzeń 3-optymalnej struktury OD typu PMC jest grafem zwykłym stopnia nie większego niż trzeci oraz rzędu nie mniejszego niż siódmy. Rdzeń może być zarówno grafem węzłowym, jak również grafem pełnym i nie musi być grafem spójnym. Praktycznie ważną klasę struktur OD stanowią struktury, których rdzeń jest grafem spójnym.

Niech  $\check{S}_3(k), k \geq 7$ , oznacza zbiór silnie spójnych 3-optymalnych struktur OD typu PMC rzędu  $k$ . Struktura  $S \in \check{S}_3(k)$  może zawierać  $C$ , gdzie  $0 \leq C \leq 2^{-1}k(k-1)$  cykli elementarnych (krawędzi). Jeżeli jej rdzeń jest spójnym grafem zwykłym, to struktura  $S \in \check{S}_3(k)$  może zawierać  $C$ , gdzie  $k-1 \leq C \leq 2^{-1}k(k-1)$  cykli elementarnych (krawędzi).

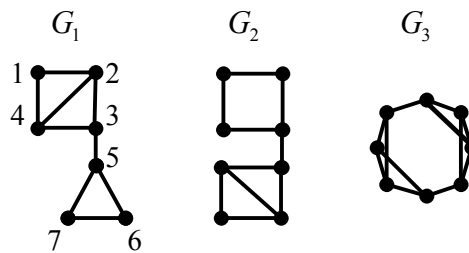
Warunkiem koniecznym, aby graf  $G$  był rdzeniem spójnym struktur zbioru  $\check{S}_3(k)$ , jest to, aby był on takim grafem stopnia nie większego niż 3, który zawiera węzeł stopnia mniejszego niż 3.

Własność 10. Graf zwykły stopnia nie większego niż 3 nie jest rdzeniem 3- optymalnej struktury OD typu PMC, jeżeli spełnia poniższą zależność:

$$(\exists E' \subset E : \|E'\| = \|E\| - 4) : \|\Gamma(E')\| + (12 - \sum_{e \in \{E \setminus E'\}} \mu(e)) < 3. \quad (9)$$

Dla przykładu, dla grafu  $G_1$  (rys. 3) zachodzi:  $\|\Gamma(\{5, 6, 7\})\| = 1$  oraz  $\mu(1) + \mu(2) + \mu(3) + \mu(4) = 11$ , a więc spełniona jest zależność (9). Analogicznie można wykazać, że grafy  $G_2$  i  $G_3$  (rys. 3) również nie są rdzeniami struktury 3- optymalnej (spełniają zależność (9)).

Rdzeń  $G = \langle E, U \rangle$  3- optymalnej struktury opiniowania diagnostycznego można opisać wektorem charakterystycznym  $\phi(E(G)) = (\phi_1, \phi_2, \phi_3)$ , gdzie  $\|\{e \in E(G) : \mu^-(e) = \mu^+(e) = p\}\| = \phi_p, 1 \leq p \leq 3$ .



**Rys. 3.** Przykłady spójnych grafów trzeciego stopnia, rzędu  $k, (k \geq 7)$ , które nie są rdzeniami struktury 3- optymalnej (spełniają zależność (9))



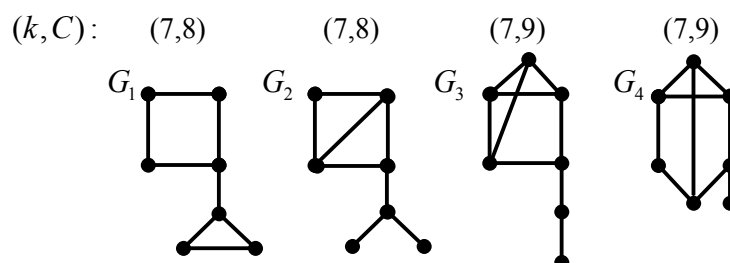
### 3. Wyznaczanie 3-optimalnej silnie spójnej struktury OD typu PMC

#### 3.1. Projektowanie rdzenia struktury

##### 3.1.1. Wprowadzenie

Projektowanie struktury OD wymaga wybrania, z dopuszczalnego zbioru struktur, struktury najkorzystniejszej (w określonym sensie technicznym, organizacyjnym lub ekonomicznym). Na przykład, struktura OD, której rdzeń jest grafem spójnym o dużej liczbie krawędzi, jest z reguły tańsza od innych struktur, ale może mieć elementy, które muszą testować zbyt wiele innych elementów systemu. Oczywiście, nie każdy graf zwykły stopnia trzeciego jest rdzeniem 3-optimalnej struktury OD typu PMC.

Niech  $G^3(k, C)$ , gdzie  $k \geq 4$ ,  $k-1 \leq C \leq k + \lfloor 2^{-1}k \rfloor$ , a  $\lfloor \alpha \rfloor$  jest największą wartością całkowitą taką, że  $\alpha \geq \lfloor \alpha \rfloor$ , oznacza zbiór spójnych grafów zwykłych stopnia trzeciego rzędu  $k$  o  $C$  krawędziach. Parę  $(k, C)$  nazywamy wymiarem grafu  $G \in G^3(k, C)$ . Dla przykładu, na rysunku 4 przedstawiono wybrane grafy stopnia trzeciego, z których grafy:  $G_2, G_3$  nie są rdzeniami 3-optimalnej struktury OD typu PMC (spełniają zależność (9)). Jeżeli  $C = k-1$ , to graf  $G \in G^3(k, C)$  jest drzewem stopnia trzeciego, a jeżeli  $C = k$ , to rdzeń może mieć postać cyklu prostego rzędu  $k'$ ,  $3 \leq k' \leq k-1$ , a węzły tego cyklu są korzeniami stopnia pierwszego drzew stopnia nie większego niż trzy o łącznej liczbie krawędzi równej  $k-k'$ , albo może on być cyklem prostym rzędu  $k$  o węzłach stopnia drugiego.



Rys. 4. Przykłady grafów zwykłych stopnia trzeciego  $((k, C)$  – wymiar grafu)

Określenie 3. Mówimy, że spójny graf jest *blokiem*, jeśli jego spójność węzłowa (minimalna liczba węzłów, których usunięcie zmienia go w graf niespójny lub zerowy) jest większa niż jeden.

Własność 11. Graf zwykły stopnia trzeciego (rdzeń stopnia trzeciego), może składać się z bloków stopnia pierwszego i drugiego oraz z drzew z korzeniem i bloków stopnia trzeciego.

Własność 12. Rdzeń 3-optymalnej struktury OD typu PMC może zawierać złącza (węzły po usunięciu, których graf staje się niespójny) stopnia drugiego – wtedy z każdym z nich incydentne są dwie krawędzie, albo stopnia trzeciego – wtedy z każdym z nich incydentne są trzy krawędzie, albo blok z krawędzią.

Określenie 4. Wektor  $\psi(G) = (\psi_1(G), \dots, \psi_{k-2}(G))$ , w którym  $\psi_i(G), 1 \leq i \leq k-2$ , oznacza liczbę cykli prostych rzędu  $i+2$  w grafie  $G$ ; nazywamy *wektorem cykli prostych grafu  $G$* .

Oczywiście, jeżeli  $\psi(G') \neq \psi(G'')$ , to grafy  $G'$  i  $G''$  nie są podobne.

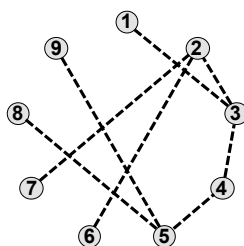
Niech  $r(G)$ , gdzie  $G \in G^3(k, C)$ , oznacza rząd najdłuższego cyklu prostego w grafie  $G$ , a  $r(u), u \in U(G)$  – rząd najdłuższego cyklu prostego (w grafie  $G$ ), który zawiera krawędź  $u$ . Wartość  $r(G)$  jest kanonicznym reprezentantem klasy podobieństwa grafu  $G \in G^3(k, C)$ , więc jest cechą, ze względu na którą można dokonywać klasyfikacji grafów. Generowania grafu  $G'$  na podstawie grafu  $G$  można dokonać przez połączenie dwóch węzłów grafu  $G$  krawędzią (operacja  *dodania krawędzi*) lub przez *zagnieżdżenie krawędzi węzłem*. Operację zagnieżdżania krawędzi  $u \in U(G)$  węzłem należy stosować tylko wtedy, gdy  $r(u) < r(G)$ , a operację dodania krawędzi do grafu  $G$  – w wyniku czego powstaje graf  $G'$  – tylko wtedy, gdy  $r(G') = r(G)$ .

W ten sposób redukcja rozwiązań podobnych (izomorficznych), obejmuje sobą tylko grupę rozwiązań tego samego wymiaru o jednakowej długości najdłuższego cyklu prostego.

Własność 13. Blok stopnia trzeciego nie zawiera cyklu Hamiltona wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją w nim łańcuchy o długości większej niż jeden, które mają wspólne węzły krańcowe, a stopnie węzłów wnętrza tych łańcuchów są równe dwa.

Własność 14. Spójny rdzeń stopnia trzeciego posiadający cykl Hamiltona jest blokiem, ponieważ graf częściowy rdzenia zawierający cykl Hamiltona składa się z węzłów o stopniu dwa i usunięcie z niego dowolnego węzła albo krawędzi nie spowoduje zwiększenia liczby składowych spójności otrzymanego grafu.

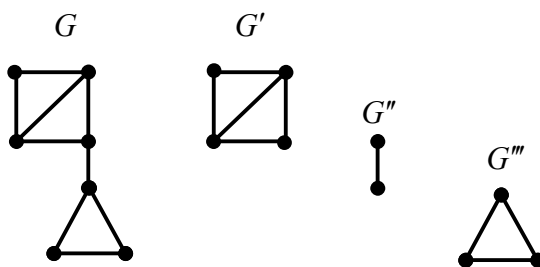
Niech  $D^{\leq 3}$  oznacza drzewo stopnia co najwyżej trzeciego. Niech  $\tau(D^{\leq 3}) = \{\tau_1, \dots, \tau_i, \dots, \tau_l\}$  oznacza zbiór unikalnych łańcuchów prostych  $\tau_i$ , gdzie  $\tau_i$  jest sekwencją wystąpień kolejnych stopni węzłów tworzących dany łańcuch prosty, przy czym pierwszy element sekwencji jest równy jeden. Oczywiście, w danym drzewie może występować więcej niż jeden łańcuch prosty o takiej samej sekwencji stopni węzłów w łańcuchu. Niech para  $(\tau_i, l_i)$  wiąże łańcuch prosty  $\tau_i$  z liczbą jego wystąpień  $l_i$  w drzewie  $D^{\leq 3}$ . Wtedy zbiór  $\{(\tau_1, l_1), (\tau_2, l_2), \dots, (\tau_N, l_N)\}$ , gdzie  $N$  oznacza licznosc tego zbioru, takich par jest reprezentantem klasy podobienstwa zbioru drzew  $D^{\leq 3}$ . Dla przykladu, na rysunku 5 przedstawiono pewne drzewo wraz z opisujacym je zbiorem  $\{(\tau_1, l_1), (\tau_2, l_2), \dots, (\tau_N, l_N)\}$ .



**Rys. 5. Drzewo opisane wektorem par**  
 $\{((1, 3, 1), 2), ((1, 3, 2, 3, 1), 2), ((1, 3, 3, 1), 2), ((1, 3, 3, 2, 3, 1), 4)\}$

Jeżeli graf zwykły nie jest blokiem (grafem o spójności węzłowej większej od jeden), to za pomocą *operacji rozdzielania względem złączy*, można go rozłożyć na takie maksymalne podgrafy, które są blokami.

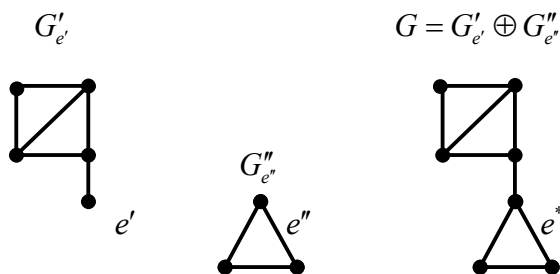
Dla przykładu, graf  $G$  (rys. 6) stopnia trzeciego rozkłada się na bloki  $G'$  (stopnia trzeciego),  $G''$  (stopnia pierwszego) oraz  $G'''$  (stopnia drugiego).



**Rys. 6. Rozłożenie grafu  $G$  na bloki  $G'$ ,  $G''$  i  $G'''$**

Oczywiście, dowolny spójny graf rzędu  $k \geq 2$  można skomponować z bloków. Interesuje nas szczególny rodzaj komponowania grafów (wystarczający do generowania grafów stopnia trzeciego), a mianowicie – przez scalanie dwóch grafów względem dwóch węzłów, wybranych po jednym z każdego grafu.

Scalaniem grafów  $G'$  i  $G''$  przez sklejenie węzłów  $e' \in E(G')$  i  $e'' \in E(G'')$  nazywamy taki graf  $G = G'_{e'} \oplus G''_{e''}$ , że  $E(G) = \{ \{E(G') \setminus e'\} \cup \{E(G'') \setminus e''\} \} \cup \{e^*\}$  oraz  $U(G) = \{U(\langle E(G') \setminus e' \rangle_{G'})\} \cup \{U(\langle E(G'') \setminus e'' \rangle_{G''})\} \cup \{U(e^* | G)\}$ , przy czym zbiór  $U(e^* | G)$  krawędzi incydentnych z węzłem  $e^*$  w grafie  $G$ , zawiera krawędzie incydentne z węzłem  $e'$  w grafie  $G'$  oraz krawędzie incydentne z węzłem  $e''$  w grafie  $G''$  (rys. 7). Mówimy również, że graf  $G'_{e'} \oplus G''_{e''}$  jest wynikiem zagnieżdżenia węzła  $e''$  grafu  $G''$ , w węzle  $e'$  grafu  $G'$ . Oczywiście, jeżeli węzły  $e'_i$  i  $e'_j$  są węzłami podobnymi (w grafie  $G'$ ) lub węzły  $e''_p$  i  $e''_q$  są węzłami podobnymi (w grafie  $G''$ ), to grafy:  $G'_{e'_i} \oplus G''_{e''_p}$ ;  $G'_{e'_j} \oplus G''_{e''_q}$ ;  $G'_{e'_i} \oplus G''_{e''_p}$  oraz  $G'_{e'_j} \oplus G''_{e''_q}$  są grafami podobnymi. Zauważmy, że jeżeli węzły  $e_i$  i  $e_j$  są węzłami podobnymi w grafie  $G$ , to transpozycja macierzy przejść  $M(G)$  grafu  $G$ , względem wierszy i kolumn o numerach  $i$  oraz  $j$ , daje taką samą macierz. Aby uniknąć indukowania grafów podobnych przez rozpatrywany rodzaj scalania grafów  $G'$  i  $G''$ , wystarczy wyznaczyć zbiory węzłów podobnych w każdym z tych grafów. Zauważmy, że istnieje prosty algorytm wyznaczania macierzy przejść grafu  $G'_{e'} \oplus G''_{e''}$  z macierzy przejść grafów  $G'$  i  $G''$  o tak ponumerowanych węzłach, że  $n(e') = \|E(G')\|$  i  $n(e'') = 1$ , gdzie  $n(e)$  oznacza numer węzła  $e$  (rys. 8).



Rys. 7. Graf  $G$  jest scaleniem grafów  $G'$  i  $G''$  przez sklejenie węzłów  $e'$  i  $e''$

0	1	0	1	0
1	0	0	1	1
0	1	0	1	1
1	1	1	0	0
0	0	1	0	0

0	1	1
1	0	1
1	1	0

0	1	0	1	0	0	0
1	0	0	1	1	0	0
0	1	0	1	1	0	0
1	1	1	0	0	0	0
0	0	1	0	0	1	1
0	0	0	0	1	0	1
0	0	0	0	1	1	0

Rys. 8. Macierz  $M(G'_{e_5} \oplus G''_{e_1})$  jest macierzą przejść grafu, który jest scaleniem grafów  $G'$  i  $G''$  przez sklejenie węzłów  $e'$  i  $e''$  (rys. 7)

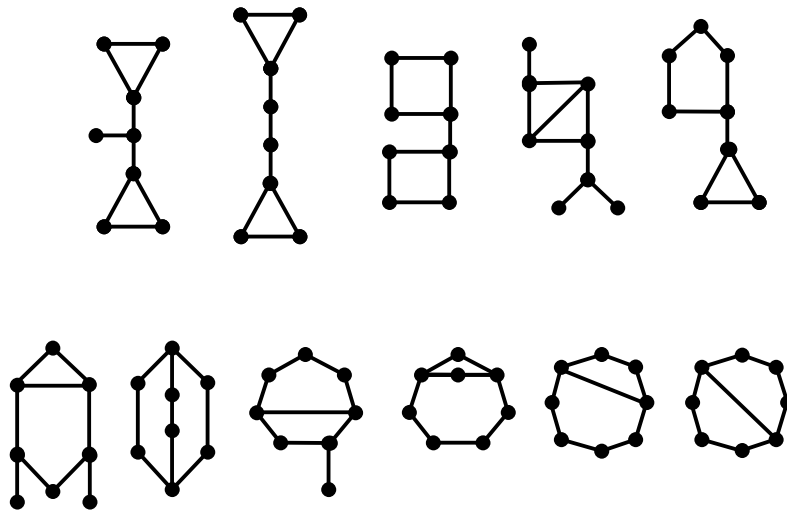
Graf ze zbioru  $G^3(k, k-1)$ , gdzie  $k \geq 4$ , jest drzewem stopnia trzeciego, a graf ze zbioru  $G^3(k, k)$ , którego węzły są korzeniami pierwszego stopnia drzew stopnia nie większego niż trzy, o liczbie krawędzi równej  $k-k'$  ma postać cyklu prostego rzędu  $k'$ , gdzie  $3 \leq k' \leq k$ . Jeżeli  $C > k$ , to dowolny graf  $G \in G^3(k, C)$  można wygenerować jako takie scalenie  $G'_e \oplus G''_e$  grafów  $G'_e$  i  $G''_e$ , że  $[G' \in G^3(k', C')] \vee [G'' \in G^3(k'', C'')] \wedge [\mu(e') + \mu(e'') \leq 3] \wedge (k = k' + k'' - 1) \wedge (C = C' + C'')$ .

Dla przykładu, na rysunku 9 przedstawiono jedenaście (z 63) grafów zbioru  $G^3(8, 9)$ , a w tabeli 1 podano liczebności zbiorów  $G^3(k, C)$  ( $k \leq 8$ ).

Z tabeli 1 wynika dodatkowo, że funkcja tworząca grafy zbioru  $G^3(k, C)$ , gdzie  $4 \leq k \leq 8$ , ma postać  $\mathbb{G}(x) = 4x^4 + 8x^5 + 27x^6 + 62x^7 + 199x^8 + \dots$ .

Tab. 1. Liczebność zbioru  $G^3(k, C)$

$k$	$C$									
	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
4	1	1	1	1	-	-	-	-	-	-
5	-	1	3	3	1	-	-	-	-	-
6	-	-	3	8	9	5	<b>2</b>	-	-	-
7	-	-	-	5	16	22	15	<b>4</b>	-	-
8	-	-	-	-	10	35	63	55	29	7



Rys. 9. Przykłady jedenastu (z 63) grafów trzeciego stopnia rzędu ósmego o dziewięciu krawędziach (przykłady grafów zbioru  $G^3(8,9)$ )

Lemat 1. Każdy graf  $G$  ze zbioru  $G^3(k, C)$ , gdzie  $k \geq 7, C \leq k$ , jest rdzeniem 3- optymalnej struktury OD typu PMC, bo z założenia, że  $C \leq k$  wynika, że dla każdego podgrafu  $G'' = \langle E'' \rangle_G, \|E''\| = 4$  zachodzi  $\|U(G'')\| \leq \|E''\| = 4$ , a ponieważ  $\sum_{e \in E''} \mu(e) = 2 \cdot \|U(G'')\| \leq 8$ , dla każdego podzbioru  $E' \subset E$  takiego, że  $\|E'\| = k - 4$ , nie jest spełniona zależność (9).

Graf  $G(k, k-1)$  jest, zgodnie z lematem 1, rdzeniem 3- optymalnej struktury OD typu PMC. Dodatkowo jest rdzeniem będącym spójnym grafem zwykłym, więc łatwo jest dla niego uzyskać macierz przejść  $M(G(k, k-1))$ . Znając rdzeń postaci  $G(k, k-1)$ , można zaproponować sekwencyjny algorytm generowania rdzeni spójnych rzędu  $k$ .

### 3.1.2. Metoda generowania rdzeni spójnych poprzez zagnieżdżanie krawędzi w węzłach rdzenia

Niech  $G(k, k-1)$ ,  $R^3$  oznaczają odpowiednio: rdzeń wymiaru  $(k, k-1)$ , zbiór rdzeni rzędu  $k$ .

- Krok 1. Do zbioru  $R^3$  dodać rdzeń  $G(k, k-1)$ . Wtedy  $R^3 = \{G(k, k-1)\}$ .  
Ustawić wartość zmiennej  $j = 2$ .
- Krok 2. Do grafu  $G(k, k+1-j)$  dodać krawędź, tak aby uzyskać graf  $G^*(k, k+j)$  i taką, aby po jej dodaniu stopnie węzłów incydentnych z tą krawędzią nie były większe niż 3.
- Krok 3. Jeżeli tak uzyskany graf  $G^*(k, k+j)$  nie spełnia zależności (9), to należy dodać go do zbioru rdzeni  $R^3 := R^3 \cup \{G^*(k, k+j)\}$ .
- Krok 4. W celu uzyskania wszystkich grafów powstałych przez dodanie krawędzi do grafu  $G(k, k+1-j)$ , należy kroki 2 i 3 powtórzyć dla każdej możliwości dodania jednej krawędzi do grafu  $G(k, k+1-j)$ .
- Krok 5. Zwiększyć o 1 wartość zmiennej  $j$ . Jeżeli  $j \leq 2^{-1}3k - k$ , to dla każdego grafu  $G(k, k+1-j) \in R^3$  wykonać kroki 2 i 3. W przeciwnym przypadku przejść do kroku 6.
- Krok 6. Koniec. Zbiór  $R^3$  zawiera rdzenie rzędu  $k$ .

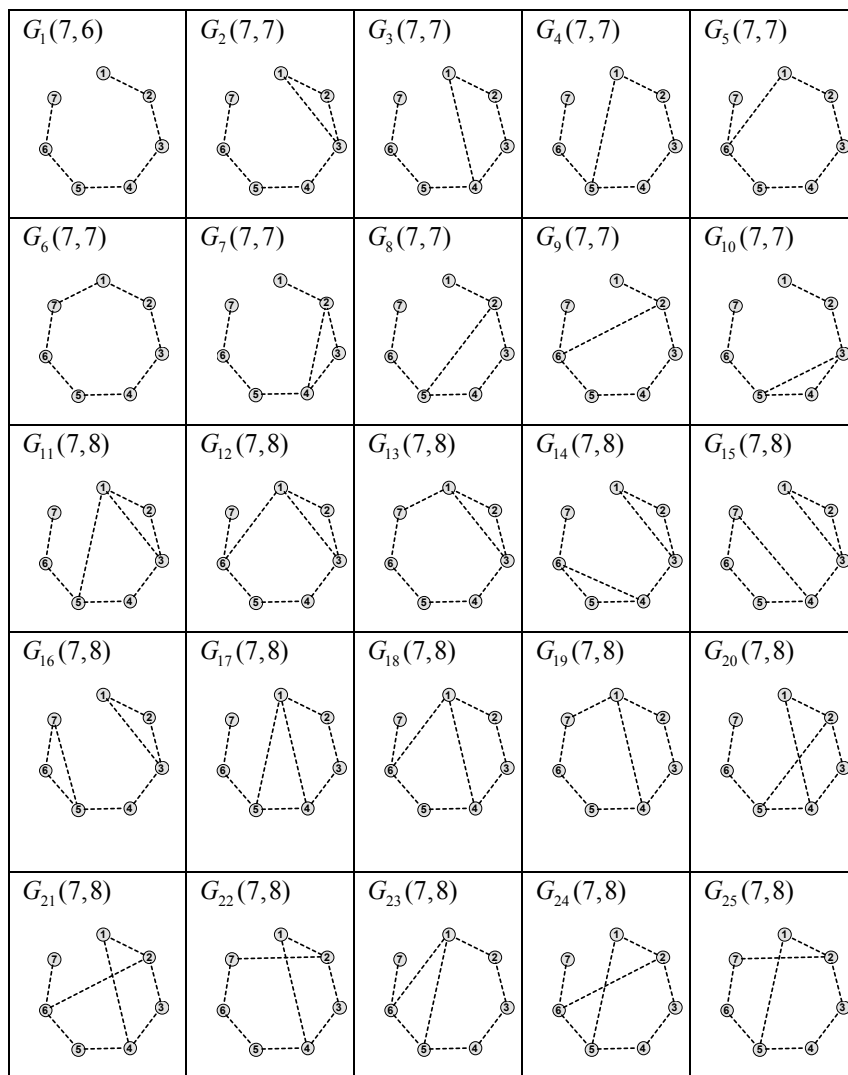
Po wykonaniu kroku 6 algorytmu należy, w podzbiorach zbioru  $R^3$  o takiej samej liczbie krawędzi, wyeliminować rozwiązania podobne. Poniżej przedstawiono sposób klasyfikacji rdzeni stopnia trzeciego, który jest pomocny przy redukowaniu ze zbioru  $R^3$  rdzeni podobnych.

Niech  $R$  oznacza spójny rdzeń 3- optymalnej struktury OD typu PMC. Rdzeń można opisać, podając jego rząd  $\|E(R)\|$ , wektor charakterystyczny rdzenia  $\phi(E(R))$  oraz liczbę krawędzi  $\|U(R)\|$ . Wiadomo, że rząd maksymalnego cyklu prostego jest kanonicznym reprezentantem klasy podobieństwa grafu, więc jest cechą ze względu na którą można dokonać klasyfikacji rdzeni. Inną taką cechą może być wektor cykli prostych rdzenia  $\psi(R)$ . Wiadomo również, że rdzeń może składać się z kompozycji bloków stopnia co najwyżej trzeciego oraz z drzew z korzeniem stopnia co najwyżej trzeciego. Każdy blok  $R^B$ , wchodzący w skład rdzenia, posiada następujące cechy: rząd  $\|E(R^B)\|$ , rząd maksymalnego cyklu prostego  $r(R^B)$  oraz wektor cykli prostych  $\psi(R^B)$ .

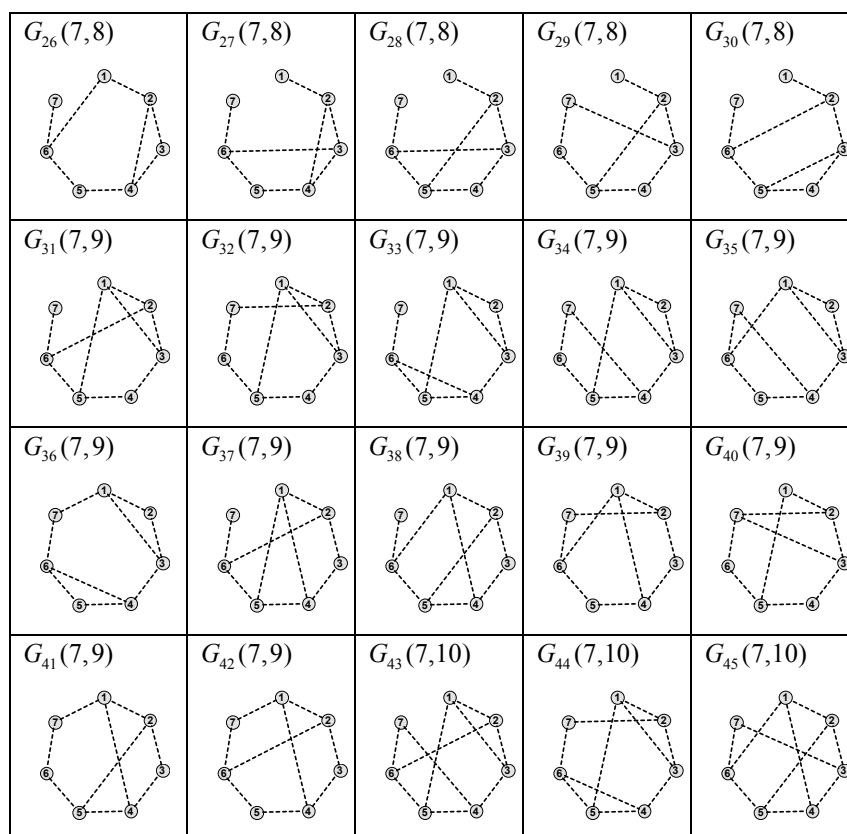
Dodatkowo, blok można opisać wektorem charakterystycznym  $\phi(E(R^B))$ . Bloki wchodzące w skład rdzenia mogą być połączone drzewami, a w ich węzłach mogą być zagnieżdżone drzewa zakończone węzłami stopnia pierwszego. Każde drzewo  $R^D$ , wchodzące w skład rdzenia, można opisać, podając jego rząd  $r(R^D)$ .

Dodatkowo, cechami drzewa mogą być: wektor charakterystyczny  $\phi(E(R^D))$  oraz zbiór  $\{(\tau_1, l_1), (\tau_2, l_2), \dots, (\tau_N, l_N)\}$ . Zakłada się, że dany rdzeń zawiera bloki rzędu co najmniej trzeciego.

W wyniku komputerowo wspomaganą realizacją metody uzyskano rdzenie wymiaru  $(7, C)$ , gdzie  $6 \leq C \leq 10$ , których postacie graficzne przedstawiono na rysunku 10 oraz następującą funkcję tworzącą dla rdzeni spójnych rzędu siódmego:  $\mathbb{R}^3(x) = x^6 + 9x^7 + 20x^8 + 12x^9 + 3x^{10}$ .







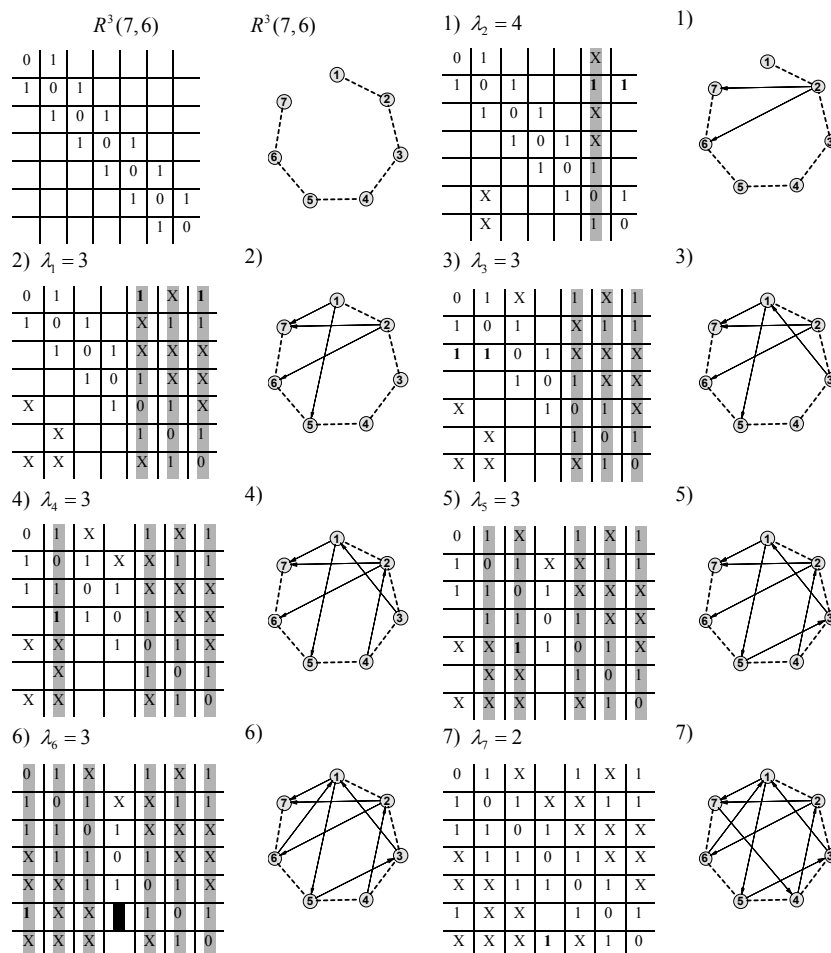
Rys. 10. Zbiór rdzeni  $G(7,C)$ , gdzie  $6 \leq C \leq 10$

### 3.2. Wyznaczanie silnie spójnej 3- optymalnej struktury na podstawie rdzenia

Przedstawiany sposób wyznaczenia struktury polega na uzupełnieniu rdzenia, wybranego ze względu na określone własności, brakującymi łukami, tak aby otrzymać 3- optymalną silnie spójną strukturę OD typu PMC, w której dla każdego jej węzła określono liczbę następników.

Niech  $R$ ,  $S(R)$ ,  $\lambda = [\lambda_1, \dots, \lambda_i, \dots, \lambda_{|E(R)|}]$ :  $\lambda_i = \mu^+(e_i)$ ,  $e_i \in E(R)$ ,  $\phi(E(R))$  oraz  $M(R)$  oznaczają odpowiednio: spójny rdzeń, zbiór 3- optymalnych struktur projektowanych dla danego rdzenia  $R$  struktury, wektor określający zakładane liczności następników danego węzła w strukturze projektowanej, wektor charakterystyczny rdzenia oraz macierz przejść rdzenia.

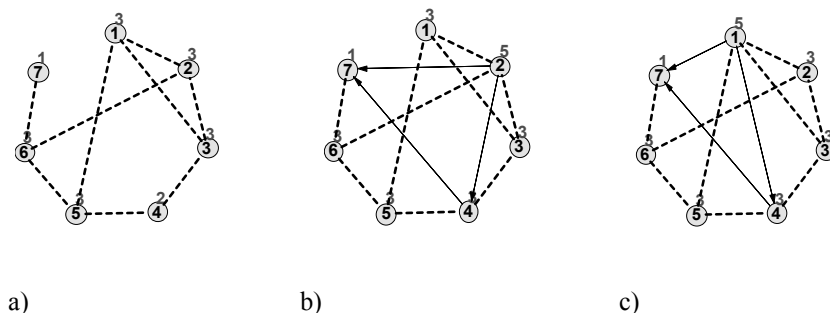
- Krok 1. Ustawić wartość początkową  $S(R) = \emptyset$ .
- Krok 2. Określić liczbę łuków, o jaką należy uzupełnić rdzeń, w następujący sposób:  $3 \cdot \|E(R)\| - \|U(R)\|$ , gdzie  $U(R)$  oznacza zbiór łuków projektowanej struktury.
- Krok 3. Wybrać  $\lambda_i : \lambda_i = \max \lambda_j, j = 1, \|E(R)\|$ .
- Krok 4. W  $i$ -tym wierszu macierzy  $M(R)$  o numerze odpowiadającym indeksowi  $i$  składowej  $\lambda_i$  wstawić  $\lambda_i - m_{i,\bullet}$  symboli „1” do komórek  $m_{i,j} = 0, 1 \leq j \leq \|E(R)\| \wedge j \neq i$ . (Oczywiście, może istnieć więcej niż jeden sposób uzupełnienia danego wiersza symbolami „1”.)  
Komórki  $m_{j,i}$  symetryczne do komórek, do których wstawiono symbole „1”, oznaczyć jako niedostępne przez wstawienie symbolu „x”.
- Krok 5. Jeżeli po wykonaniu kroku 4 w  $i$ -tej kolumnie wartość  $m_{\bullet,i} < 3, m_{i,i} = 0$  oraz pozostałe komórki mają zawartość „x”, to nie istnieje 3-optymalna składowa silnej spójności o zadanym wektorze  $\lambda$ .
- Krok 6. Jeżeli po wykonaniu kroku 4 w  $i$ -tej kolumnie wartość  $m_{\bullet,i} = 3$  i  $m_{i,i} = 0$ , to pozostałe komórki o wartości 0 oznaczamy symbolem „x”. Zmniejszyć o jeden liczbę łuków, o jaką należy uzupełnić rdzeń.
- Krok 7. Jeżeli liczba łuków, o jaką należy uzupełnić rdzeń, jest większa od zera, to należy wybrać kolejny wiersz macierzy  $M(R)$  o numerze równym indeksowi  $i$  odpowiadającym indeksowi elementu wektora  $\lambda$  o największej wartości, którego jeszcze nie rozpatrywano. Przejść do kroku 4. Jeżeli liczba łuków, o jaką należy uzupełnić rdzeń, jest równa zeru, to należy sprawdzić, czy tak uzyskana macierz  $M(R)$  spełnia zależność (6) lub (8). Jeżeli struktura dana macierzą  $M(R)$  spełnia zależność (8) lub zależność (6), to jest poszukiwaną 3-optymalną składową silnej spójności, którą należy dodać do zbioru  $S(R)$ .



Rys. 11. Zobrazowanie działania dla rdzenia  $R^3(7,6)$  i wektora  $\lambda = [3,4,3,3,3,3,2]$

Na rysunku 11 przedstawiono jedno z wielu możliwych rozwiązań zadania zaprojektowania 3-optimalnej składowej silnej spójności dla rdzenia  $R^3(7,6)$  oraz dla wektora  $\lambda = [3,4,3,3,3,3,2]$ . Na przykład, dla  $\lambda_2$  istnieją cztery warianty uzupełnienia drugiego wiersza macierzy rys. 11-1) brakującymi symbolami „1”. Istnieją również dwie możliwości realizacji metody dla sytuacji z rys. 11-6). Jedna z nich (oznaczona czarnym prostokątem) wyklucza uzupełnienie komórki  $m_{7,5}$  symbolem „1” w kolejnej iteracji metody, a tym samym zaprojektowanie składowej silnej spójności dla tego przypadku.

Powyższą metodę można zmodyfikować, tak aby umożliwiała ona wyznaczenie wszystkich 3- optymalnych składowych silnej spójności dla danego rdzenia. Niech  $R$ ,  $M(R)$  oraz  $S(R)$  oznaczają odpowiednio: spójny graf zwykły, będący rdzeniem 3- optymalnej struktury, macierz przejść rdzenia oraz zbiór 3- optymalnych składowych silnej spójności generowanych przez rdzeń  $R$ . Wyznaczenie zbioru  $S(R)$  polega na takim rozwiązaniu kwadratu łacińskiego, danego macierzą  $M(R)$ , aby macierz  $M(R)$  posiadała w każdej kolumnie dokładnie po trzy elementy oznaczone symbolem „1”. Dozwolone jest wstawienie do komórki  $m_{i,j}$  macierzy  $M(R)$  symbolu „1” w przypadku gdy są spełnione zależności:  $i \neq j \wedge m_{i,j} = 0 \wedge m_{j,i} = 0 \wedge m_{\bullet,j} < 3$ . Oczywiście, każda struktura zbioru  $S(R)$  musi spełniać zależności (5) i (6) oraz musi być unikalna. W celu redukcji rozwiązań podobnych, należy dokonać klasyfikacji uzyskanego zbioru struktur na klasy oraz podklasy o określonych cechach i w nich redukować rozwiązania podobne. Kryterium podziału zbioru  $S(R)$  na klasy może być wektor stopni wyjściowych węzłów struktury  $\lambda$ , uporządkowanych w porządku od największego do najmniejszego:  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_i, \lambda_j, \dots, \lambda_{|E(R)|}) : \lambda_i \geq \lambda_j$  szukanej struktury. W takiej klasie redukowanie struktur podobnych może polegać na sprawdzeniu liczby i długości cykli prostych lub dróg cyklicznych prostych, przechodzących przez węzły struktury, według pewnego porządku stopni wyjściowych węzłów. Niech  $v = (\alpha, \beta)$  oznacza parę wektorów, w której  $\alpha$  jest wektorem wartości stopni wyjściowych węzłów struktury, a  $\beta$  jest wektorem wystąpień łuków ( $l$ ), albo krawędzi ( $k$ ), które występują pomiędzy węzłami o danych stopniach wyjściowych. Długości wektorów  $\alpha, \beta$  są jednakowe w przypadku badania wystąpienia zadanego cyklu prostego w strukturze, natomiast długość wektora  $\beta$  jest o jeden mniejsza od długości wektora  $\alpha$  w przypadku badania wystąpienia zadanej drogi prostej w strukturze. Dla przykładu, w grafie z rysunku 12a istnieje cykl prosty o długości trzy, złożony z węzłów o stopniu wyjściowym trzy, połączonych krawędziami, co zapisano:  $v = ([3, 3, 3], [k, k, k])$ . Ponadto, istnieją dwie unikalne 3- optymalne składowe silnej spójności wygenerowane przez rdzeń z rysunku 12a, o wektorze  $\lambda = (5, 3, 3, 3, 3, 3, 1)$ , z których dla struktury z rysunku 12b nie istnieje cykl prosty przedstawiony w postaci  $v = ([5, 1, 3, 3], [l, k, k, k])$ , a dla struktury z rysunku 12c ten cykl istnieje.

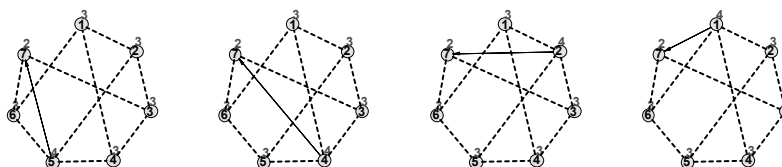


Rys. 12. Wybrane 3-optimalne składowej silnej spójności b), c) wygenerowane dla rdzenia a)

#### 4. Podsumowanie

Spójna 3-optimalna struktura OD typu PMC posiada dokładnie jedną składową silnej spójności (własność 6.) i spełnia zależności (5) oraz (6). W publikacji tej do wyznaczenia struktury spełniającej określone wymagania wykorzystano rdzenie struktur. Poprzez wybór odpowiedniego rdzenia można przyspieszyć wyznaczenie struktury. W rozdziale 2 zaproponowano sposób generowania spójnych rdzeni struktur 3-optimalnych, wyznaczono spójne rdzenie wymiaru  $(7, C)$ , gdzie  $6 \leq C \leq 10$ , i na tej podstawie uzyskano funkcję tworzącą dla tych rdzeni. W rozdziale 3 pokazano sposób dodania do rdzenia łuków, tak aby otrzymać 3-optimalną silnie spójną strukturę OD typu PMC, której węzły mają określoną liczbę następników.

Wyznaczenie wszystkich 3-optimalnych silnie spójnych struktur dla danego spójnego rdzenia jest zadaniem o dużej złożoności obliczeniowej. Należy bowiem przeanalizować wszystkie sposoby uzupełnienia rdzenia brakującymi łukami. Jest to też zadanie, które można sprowadzić do problemu rozwiązania częściowo określonego, za pomocą rdzenia struktury, kwadratu łacińskiego.



Rys. 13. Struktury 3-optimalne uzyskane dla rdzenia  $G_{45}(7,10)$

Dla przykładu na rysunku 13 przedstawiono możliwe rozwiązania dla rdzenia  $G_{45}(7,10)$  z rysunku 11. W prosty sposób można wykazać, że uzyskane rozwiązania są podobne, ponieważ węzły będące poprzednikami jedynego łuku są podobne. W związku z tym, uzyskany zbiór rozwiązań należy zredukować o trzy struktury.

## Literatura

- [1] Hakimi S. L., Amin A. T.: *Characterization of Connection Assignment of Diagnosable Systems*, IEEE Trans. On Comput. 1, 1974.
- [2] Krawczyk H.: *Analiza i synteza samodiagnozowalnych systemów komputerowych*, Zeszyty Naukowe Politechniki Gdańskiej, Elektronika, nr 64, Gdańsk, 1987.
- [3] Kreutzer S. E., Hakimi S. L.: *Distributed Diagnosis and the System User*, IEEE Trans. On Comput. 1, 1998.
- [4] Kulesza R.: *Problemy przeliczania optymalnych struktur opiniowania diagnostycznego*, Biuletyn IAIr, nr 20, WAT, Warszawa 2004.
- [5] Kulesza R.: *Metoda przeliczania 2-optymalnych struktur opiniowania diagnostycznego typu BGM*, Biuletyn IAIr, nr 21, WAT, Warszawa, 2004.
- [6] Kulesza R.: *Niektóre własności 2-optymalnych struktur opiniowania diagnostycznego typu PMC*, Biuletyn IAIr, nr 21, WAT, Warszawa, 2004.
- [7] Kulesza R.: *Struktury samodiagnozowalne w systemach cyfrowych*, Materiały Krajowej Konferencji DIAG'2003.
- [8] Kulesza R.: *Podstawy diagnostyki sieci logicznych i komputerowych*, Instytut Automatyki i Robotyki WAT, Warszawa, 2000.
- [9] Preparata F. P., Metze G., Chien R. T.: *On the Connection Assignment Problem of Diagnosable Systems*, IEEE Trans. Comput. 6, 1967.

Recenzent: dr hab. inż. Andrzej Chojnacki

Praca wpłynęła do redakcji: 10.12.2005