Algorytm wyznaczania krotności diagnostycznej struktury opiniowania diagnostycznego typu PMC[1]

Artur ARCIUCH

Zakład Systemów Komputerowych, Instytut Teleinformatyki i Automatyki,
Wojskowa Akademia Techniczna, ul. Kaliskiego 2, 00-908 Warszawa

STRESZCZENIE: Krotnością diagnostyczną struktury opiniowania diagnostycznego nazywamy maksymalną liczbę niezdatnych węzłów tej struktury, dla której możliwa jest identyfikacja wszystkich dopuszczalnych stanów niezawodnościowych tej struktury. W artykule zaproponowano algorytm wyznaczania krotności diagnostycznej struktury opiniowania diagnostycznego wykorzystujący znane twierdzenie Amina i Hakimiego dla struktur opiniowania diagnostycznego typu PMC. Dokonano również oceny złożoności obliczeniowej zaproponowanego algorytmu i porównania jej ze złożonością obliczeniową algorytmu wykorzystującego wzorzec opinii diagnostycznych struktury diagnostycznej typu PMC.

1. Wprowadzenie

Algorytmy wyznaczania krotności diagnostycznej struktury diagnostycznej mają zastosowanie w systemach o podwyższonych wymaganiach niezawodnościowych. Podczas eksploatacji, na skutek powstawania i usuwania niezdatności, systemy te ulegają procesom degradacji, regeneracji oraz rekonfiguracji. Zaistniałe niezdatności, wynikające z uszkodzeń linii transmisyjnych pomiędzy węzłami struktury lub z uszkodzeń powstałych wewnątrz węzłów, powodują zmianę struktury opiniowania diagnostycznego i tym samym jej krotności diagnostycznej. Tak więc, krotność diagnostyczna jest wielkością zmienną, którą należy okresowo kontrolować i przedsięwziąć odpowiednie czynności w przypadku zmiany jej wartości.

[1] Referat wygłoszony na V Krajowej Konferencji Diagnostyka Techniczna Urządzeń i Systemów DIAG'2003, Ustroń 13-17.10.2003. Druk tekstu referatu za zgodą Komitetu Organizacyjnego konferencji.

W dalszej części wprowadzenia podano określenia i twierdzenia wykorzystywane w przedstawionych algorytmach. W części 2 zawarto algorytmy wyznaczania krotności diagnostycznej, a w części 3 zaproponowano sposób wyznaczenia złożoności obliczeniowej algorytmów.

Niech $d_{st} = 0$ oraz $d_{st} = 1$ oznacza, że komputer e_s opiniuje komputer e_t, (odpowiednio) jako zdatny oraz jako niezdatny, a $n(e')$ oraz $n_0(e')$ niech oznacza (odpowiednio) stan niezawodnościowy oraz stan zdatności komputera e'.

Dla modelu PMC wartość opinii d_{st} komputera e_s o komputerze e_t jest zdefiniowana następująco:

$$[n(e_s) = n_0(e_s)] \rightarrow \left[d_{st} = \begin{Bmatrix} 0 \text{ dla } n(e_t) = n_0(e_t) \\ 1 \text{ dla } n(e_t) \neq n_0(e_t) \end{Bmatrix} \right] \tag{1'}$$

oraz

$$[n(e_s) \neq n_0(e_s)] \rightarrow [d_{st} = x] \; (x \in \{0,1\}) \tag{1''}$$

Niech k-wymiarowy $(k = |E|)$ wektor binarny n, $(n = (n_1, n_2, ..., n_k))$ oznacza taki stan niezawodnościowy zbioru E komputerów sieci komputerowej, że jeżeli $n_s = 0$ $(1 \leq s \leq k)$, to komputer e_s jest zdatny oraz jeśli $n_s = 1$, to komputer e_s jest niezdatny, a N - zbiór wszystkich możliwych takich stanów niezawodnościowych. Dla ustalonego G $(G = < E, U >)$ oraz określonego n $(n \in N)$ zgodnie z zależnością (1) po ustalonym uporządkowaniu zmiennych d_{st} otrzymamy określony podsześcian $d(n)$, $|U|$-wymiarowego hipersześcianu binarnego [1], natomiast po identycznym uporządkowaniu opinii (wydanych przez wszystkie komputery, które testują inne komputery), otrzymamy $|U|$-wymiarowy wektor binarny d, nazywany *opinią globalną* komputerów sieci komputerowej.

Zbiór $\{d(n) : n \in N'\}, (N' \subseteq N)$, nazywamy *wzorcem opinii diagnostycznych* sieci dla zbioru stanów niezawodnościowych N'. Porównanie opinii globalnej ze wzorcem jest podstawą do wnioskowania o stanie niezawodnościowym sieci komputerowej.

Niech $N^m, (1 \leq m \leq |E|)$ oznacza zbiór takich stanów niezawodnościowych sieci komputerowej, w których liczba niezdatnych komputerów nie jest większa niż m, a $D(G, N^m)$ – zbiór opinii globalnych (komputerów sieci) możliwych dla grafu (opiniowania diagnostycznego) G, w przypadku gdy stan niezawodnościowy sieci należy do zbioru N^m.

Oznaczmy $N(d) = \{n \in N : d \cdot d(n) \neq \varnothing\}$.

<u>Określenie 1.</u> Mówimy, że graf opiniowania diagnostycznego G, $(G =< E,U >, |E| > 3)$ jest grafem *m-diagnozowalnym,* jeżeli każdy stan niezawodnościowy należący do zbioru N^m, jest (jednoznacznie) identyfikowany za pomocą opinii globalnej, to jest jeżeli:

$$\forall d \in D(G, N^m) : |N(d)| = 1. \tag{2}$$

<u>Własność 1.</u> Graf opiniowania diagnostycznego G, $(G =< E,U >)$ jest grafem m-diagnozowalnym, wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$\begin{aligned}&\forall n', n'' \in N^m \ \exists < e_s, e_t > \in U : (d_{st}(n') \neq x) \wedge \\ &\wedge (d_{st}(n'') \neq x) \wedge (d_{st}(n') \neq d_{st}(n'')),\end{aligned} \tag{3}$$

ponieważ zależność (2) jest spełniona wtedy i tylko wtedy, gdy podsześciany zbioru $\{d(n) : n \in N^m\}$ są (parami) rozłączne.

<u>Własność 2.</u> Jeżeli graf G, jest grafem m-diagnozowalnym dla modelu PMC, to: $|E| \geq 2 \cdot m + 1$ i $\mu^-(e) \geq m$, $(e \in E)$ gdzie $\mu^-(e)$ oznacza stopień wewnętrzny węzła e.

<u>Własność 3.</u> Jeżeli graf G jest grafem m-diagnozowalnym dla modelu PMC, to:

$$(\forall 0 \leq p \leq m-1 \ \forall E' \subset E : |E'| = |E| - 2 \cdot m + p) : |\Gamma(E')| > p. \tag{4}$$

<u>Własność 4.[4]</u> Graf G $(|E| \geq 2 \cdot m + 1,\ \mu^-(e) \geq m,\ e \in E)$ jest grafem m-diagnozowalnym dla modelu PMC wtedy i tylko wtedy, gdy spełnia zależność (4).

<u>Własność 5.</u> Jeżeli graf G jest grafem m-optymalnym dla modelu PMC, to $\mu^-(e) = m$ $(e \in E)$ oraz $|U| = m \cdot |E|$.

<u>Własność 6.</u> Jeżeli graf opiniowania diagnostycznego G $(G =< E,U >)$ jest grafem m-diagnozowalnym dla modelu PMC, to liczba węzłów wiszących w tym grafie nie jest większa niż $|E| - 2 \cdot m - 1$, to jest:

$$\left|\left\{e \in E : \mu^+(e) = 0\right\}\right| \leq |E| - 2 \cdot m - 1, \tag{5}$$

gdzie $\mu^+(e)$ $(\mu^+(e) = |\Gamma(e)|$ oznacza stopień zewnętrzny węzła e.

Niech $\Re(G)$ $(r_{i,j} \in \Re(G))$ oznacza macierz przejść grafu G $(|E| \geq 3)$, opisującego strukturę opiniowania diagnostycznego (sieci komputerowej).

Oznaczmy

$$r_{i,\bullet} = \left|\left\{ j \in I : r_{i,j} = 1 \right\}\right| \quad (i \in I); \tag{6}$$

$$r_{\bullet,j} = \left|\left\{ i \in I : r_{i,j} = 1 \right\}\right| \quad (j \in I) \tag{7}$$

gdzie $I = \left\{1,...,|E|\right\}$.

Oczywiście

$$r_{i,\bullet} = \mu^{+}(e_i) = \left|\Gamma(e_i)\right| \tag{8}$$

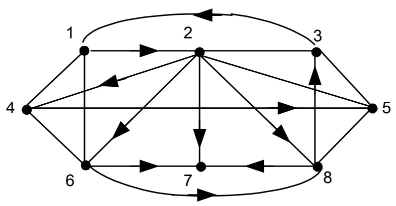
$$r_{\bullet,j} = \mu^{-}(e_j) = \left|\Gamma^{-1}(e_j)\right|. \tag{9}$$

Tak więc

$$\begin{gathered}[E' = \left\{e_{i,1},...,e_{i,p}\right\}, \left(1 < p \leq |E|\right)] \Rightarrow [e_j \in \Gamma\left(E'\right) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow ((j \in I \setminus \{i_1,...,i_p\}) \wedge (\exists i \in \{i_1,...,i_p\} : r_{i,j} = 1))]\end{gathered} \tag{10}$$

oraz (analogicznie)

$$\begin{gathered}[E'' = \left\{e_{j,1},...,e_{j,q}\right\}, \left(1 < q \leq |E|\right)] \Rightarrow [e_j \in \Gamma^{-1}\left(E''\right) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow ((i \in I \setminus \{j_1,...,j_q\}) \wedge (\exists j \in \{j_1,...,j_p\} : r_{i,j} = 1))].\end{gathered} \tag{11}$$



$$\begin{array}{rcc}
 & & r_{i,\bullet} \\
\Re(G) = & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} 3 \\ 6 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \\ 4 \\ 0 \\ 3 \end{array} \\
r_{\bullet,j} & \begin{array}{cccccccc} 3 & 3 & 3 & 3 & 4 & 3 & 3 & 3 \end{array} &
\end{array}$$

Rys. 1.Graf opiniowana diagnostycznego struktury diagnostycznej oraz macierz przejść opisująca ten graf

Inaczej mówiąc, aby określić wartość $\left|\Gamma\left(E'\right)\right|$ należy wykreślić z macierzy $\Re(G)$ kolumny o numerach odpowiadających indeksom elementów zbioru E' i policzyć te kolumny, które w wierszach o numerach odpowiadających indeksom elementów zbioru E', mają co najmniej jeden element o wartości jeden. Analogicznie, aby określić wartość $\left|\Gamma^{-1}\left(E''\right)\right|$ należy wykreślić z macierzy $\Re(G)$ wiersze o numerach odpowiadających indeksom elementów zbioru E'' i policzyć te wiersze, które w kolumnach o numerach odpowiadających indeksom elementów zbioru E'', mają co najmniej jeden element o wartości jeden.

Na rys. 1 przedstawiono graf opiniowania diagnostycznego wraz z opisującą go macierzą przejść $\Re(G)$.

2. Algorytmy wyznaczania krotności diagnostycznej struktury opiniowania diagnostycznego

2.1. Algorytm wykorzystujący twierdzenie Amina i Hakimiego

Zaproponowany algorytm wykorzystuje własności macierzy przejść $\Re(G)$, za pomocą której można opisać strukturę diagnostyczną.

Ze znanych warunków koniecznych (własności 2,6 po podstawieniu: $m = k$ $(k > 1)$ i $p = k - 1$) wiadomo, że krotność diagnostyczna k dla danego grafu G musi spełnić poniższe ograniczenia:

$$k \le \min\left\{ \left\lfloor \frac{1}{2}\cdot(|E|-1) \right\rfloor,\ \min\{\mu^{-}(e) : e \in E\},\right.$$
$$\left. \left\lfloor \frac{1}{2}\cdot\left(|E|-1-\left|\left\{e\in E : \mu^{+}(e)=0\right\}\right|\right) \right\rfloor \right\}. \tag{12}$$

Jeżeli wyznaczona w ten sposób wartość zależności (12) jest krotnością diagnostyczną, to spełnia ona warunki twierdzenia Amina i Hakimiego (zależność 4), który po podstawieniu $m = k$ $(k > 1)$ i $p = k - 1$ opisuje zależność (13):

$$(\forall E' \subset E : |E'| = |E| - k - 1) : \left|\Gamma\left(E'\right)\right| + 1 > k, \tag{13}$$

w przeciwnym przypadku należy sprawdzać czy zależność (13) ma miejsce dla $k = k - 1$. W celu wyznaczenia wartości zależności (12) należy wykorzystać zależności (8) i (10).

2.2. Algorytm wykorzystujący wzorzec opinii diagnostycznych struktury diagnostycznej typu PMC

Algorytm oparty jest na porównaniu opinii globalnych dla poszczególnych stanów niezawodnościowych struktury diagnostycznej typu PMC ze wzorcem.

Jeżeli wyznaczona na podstawie zależności (12) wartość k jest krotnością diagnostyczną struktury opiniowania diagnostycznego, spełnia ona warunek wystarczający (3). Na tej podstawie należy wyznaczyć zbiór N^k możliwych stanów niezawodnościowych struktury opiniowania diagnostycznego. Następnie dla każdego stanu niezawodnościowego $n\ (n \in N^k)$, (po uprzednim uporządkowaniu zmiennych d_{st}) należy określić (z macierzy przejść) odpowiadający mu wzorzec opinii $d(i)\ (i \in \left|N^k\right|)$, gdzie oznacza numer danego stanu niezawodnościowego n. W ten sposób otrzymamy zbiór $\{d(i) : i \in \left|N^k\right| = \binom{|E|}{k}\}$, $(N^k \subseteq N)$, czyli wzorzec opinii diagnostycznych struktury opiniowania diagnostycznego dla zbioru stanów niezawodnościowych N^k. Ponumerujmy elementy zbioru N^k i utwórzmy macierz $\Omega_{\left|N^k\right| \times |U|}$, której wiersze zawierają wzorce opinii $d(n)$ odpowiadające kolejnym stanom niezawodnościowym ze zbioru N^k. Jeżeli wszystkie opinie $d(n)$ w macierzy Ω są parami rozłączne, czyli: $\forall i, j \in \{1,...,\left|N^k\right|\},(i \neq j) : d(i) \neq d(j),$ to jest spełniona zależność (3) i liczba k jest krotnością diagnostyczną sieci komputerowej. W przeciwnym przypadku należy przeprowadzić obliczenia dla $k = k - 1$, aż do momentu spełnienia zależności (3).

Dla przykładu graf opiniowania diagnostycznego z rys. 1 nie ma krotności diagnostycznej $k = 3$, ponieważ z zależności (3) wynika, że istnieją stany niezawodnościowe $n' = (11010000)$ oraz $n'' = (11000100)$, dla których $d(n')$ i $d(n'')$ nie są rozłączne. Zależność (13) też nie jest spełniona, ponieważ dla podzbioru węzłów grafu $E' = \{3,5,7,8\}$, $\left|\Gamma(E')\right| + 1 = 3$.

3. Złożoność obliczeniowa algorytmów

Złożoność obliczeniowa określonego algorytmu jest liczbą elementarnych operacji potrzebnych do wykonania obliczeń za pomocą tego algorytmu.

Niech stopień pełności $\pi(G)$ $(0 \le \pi \le 1)$ grafu G $(|E| \ge 3)$, opisującego strukturę opiniowania diagnostycznego oznacza stosunek liczby łuków grafu częściowego G do liczby łuków grafu pełnego G:

$$\pi(G) = \frac{|< U' >_G|}{|U|_{\max}}, \ (|U|_{\max} = |E|^2 - |E|) \tag{14}$$

Rozważmy strukturę opiniowania diagnostycznego przedstawioną na rys. 1. Złożoność obliczeniową algorytmu wykorzystującego twierdzenie Amina i Hakimiego można opisać zależnością:

$$\binom{|E|}{|E| - k - 1} \cdot \left(|E| - k - 1\right) \cdot \left(k + 1\right), \tag{15}$$

bowiem liczba możliwych kombinacji podzbiorów E' zbioru węzłów grafu E wynosi: $\binom{|E|}{|E| - k - 1}$, a dla każdej kombinacji podzbioru E' należy przeszukać $\left(|E| - k - 1\right)$ wierszy macierzy $\Re(G)$, w każdym wierszu należy dokonać $\left(k+1\right)$ sprawdzeń. Złożoność obliczeniową algorytmu wykorzystującego wzorzec opinii diagnostycznych można opisać zależnością:

$$\binom{\sum_{i=0}^{k} \binom{|E|}{i}}{2} \cdot |U|_{\max} \cdot \pi(G), \tag{16}$$

ponieważ liczba możliwych stanów niezawodnościowych $|N^k|$ wynosi $\sum_{i=0}^{k} \binom{|E|}{i}$, liczba par wzorców opinii $d(i)$ wynosi $\binom{\sum_{i=0}^{k} \binom{|E|}{i}}{2}$, a dla każdej pary wzorców opinii należy dokonać $|< U' >_G|$ $(|< U' >_G| = \pi(G) \cdot |U|_{\max})$ porównań odpowiednich opinii elementarnych. Na przykład złożoność obliczeniowa algorytmu wykorzystującego twierdzenie Amina i Hakimiego dla struktury opiniowania diagnostycznego zobrazowanej na rys.1 wynosi 1120 operacji (potrzebnych do wykonania algorytmu), podczas gdy złożoność obliczeniowa algorytmu wykorzystującego wzorzec opinii diagnostycznych wynosi 106950 operacji.

4. Podsumowanie

Zaproponowany algorytm ma zdecydowanie mniejszą złożoność obliczeniową niż klasyczny algorytm wykorzystujący wzorzec opinii diagnostycznych. Autor zaimplementował algorytm w języku programowania Visual C++. Cechą charakterystyczną tej implementacji jest możliwość wprowadzania modyfikacji struktury opiniowania diagnostycznego, dzięki czemu możliwe jest obserwowanie wpływu wprowadzonych modyfikacji struktury na wartość krotności diagnostycznej tej struktury. Rezultaty takich eksperymentów mogą być wykorzystywane przy projektowaniu systemów o podwyższonej niezawodności w celu określenia fragmentów struktury, w których należy dokonać redundancji tak, aby możliwe było przeprowadzenie procesu opiniowania diagnostycznego.

Literatura

[1] Kulesza R.: *Podstawy diagnostyki sieci logicznych i komputerowych*, Instytut Automatyki i Robotyki WAT, Warszawa 2000.
[2] Papadimitriou Ch. H.: *Złożoność obliczeniowa*, WNT, Warszawa 2002.
[3] Preparata F.P., Metze G., Chien R. T.: *On the Connection Assignment Problem of Diagnosable Systems,* IEEE Trans. Comput. 6, 1967.
[4] Hakimi S. L., Amin A.T.:*Characterization of Connection Assignment of Dianosable Systems*, IEEE Trans. On Comput. 1, 1974.

Referat wygłoszony na V Krajowej Konferencji Diagnostyka Techniczna Urządzeń i Systemów DIAG'2003, Ustroń 13 – 17.10.2003r

Praca wpłynęła do redakcji: 20.10.2003r.