

Niektóre własności 1-diagnozowalnych struktur typu PMC

Roman KULESZA

Zakład Automatyki, Instytut Teleinformatyki i Automatyki WAT,
ul. Kaliskiego 2, 00-908 Warszawa

STRESZCZENIE: Niniejszy artykuł jest kontynuacją pracy [4], w której przedstawiono metody projektowania takich najtańszych, 1-diagnozowalnych struktur opiniowania diagnostycznego, które są strukturami przeciwsymetrycznymi (strukturami 1- optymalnymi określonego rzędu). W artykule rozszerzono zastosowanie tych metod, na projektowanie takich najtańszych, spójnych, 1-diagnozowalnych struktur opiniowania diagnostycznego, które nie muszą być strukturami przeciwsymetrycznymi (mogą być strukturami 1- optymalnymi lub 1-quasi- optymalnymi). Wykazano, że każda spójna, nieredukowalna struktura 1-diagnozowalna jest albo strukturą 1- optymalną, albo strukturą 1-quasi- optymalną. Przedstawiono sposób wyznaczania szeregu tworzącego, spójnych, nieetykietowanych struktur 1-quasi- optymalnych oraz określono pierwszych dziesięć wyrazów tego szeregu. Artykuł jest częściowym wynikiem badań nad automatyzowaniem procesu administrowania siecią komputerową, prowadzonych w Instytucie Teleinformatyki i Automatyki WAT.

1. Wprowadzenie

Identyfikowanie (lokalizowanie) niezdatnych elementów systemu (na przykład komputerów sieci komputerowej) za pomocą *metody opiniowania diagnostycznego* (MOD) polega na wyciągnięciu wniosku w oparciu o wszystkie opinie (wyniki testowań), wyrażone przez określone elementy systemu o stanach niezawodnościowych innych (określonych) elementów systemu.

Graf Berge'a bez pętli $G (G = \langle E, U \rangle)$, w którym łuk $\langle e', e'' \rangle$ oznacza, że element e' systemu opiniuje (testuje) stan niezawodnościowy elementu e'' , nazywamy *grafem opiniowania diagnostycznego* (grafem OD).

Opinia o elemencie opiniowanym zależy (w określony sposób) zarówno od

jego stanu niezawodnościowego, jak i od stanu niezawodnościowego elementu opiniującego. Zależnie od charakteru tej zależności, rozróżniamy [1], [2] model PMC (Preparata F.P.; Metze G.; Chien R.T.-) oraz model BGM (Barsi F.; Grandoni F.; Maestrini P.).

Mówiąc *m*-diagnostowalny graf OD (odpowiednio dla modelu PMC, lub BGM) mamy na myśli taką *strukturę opiniowania diagnostycznego* (strukturę OD), opisaną przez ten graf i model opiniowania, która umożliwia zidentyfikowanie (zlokalizowanie) wszystkich niezdatnych elementów systemu pod warunkiem, że nie jest ich więcej niż *m*. Graf częściowy określonego *m*-diagnostowalnego grafu OD, nazywamy *nieredukowalnym grafem m*-diagnostowalnym, względem tego grafu OD, jeżeli jest on takim *m*-diagnostowalnym grafem OD, którego żaden graf częściowy nie jest *m*-diagnostowalnym grafem OD. Mówimy, że graf nieredukowalny względem pełnego *m*-diagnostowalnego grafu OD o liczbie węzłów równej $|E|$ jest nieredukowalnym *m*-diagnostowalnym grafem OD rzędu $|E|$, a nieredukowalny *m*-diagnostowalny graf OD rzędu $|E|$ o minimalnej liczbie łuków - *m*-optymalnym grafem OD rzędu $|E|$. Oczywiście, struktura *m*-optymalna jest strukturą nieredukowalną, ale nie każda nieredukowalna struktura *m*-diagnostowalna względem określonej struktury określonego rzędu, jest strukturą *m*-optymalną tego rzędu. Nieredukowalną strukturę *m*-diagnostowalną określonego rzędu, która nie jest strukturą *m*-optymalną będziemy nazywać *strukturą m-quasi-optymalną* tego rzędu. Struktura *m*-quasi-optymalna określonego rzędu ma większą liczbę wymaganych sprawdzeń (testowań) aniżeli struktura *m*-optymalna tego samego rzędu. Tak, więc dla niektórych struktur *m*-diagnostowalnych określonego rzędu, nie istnieje struktura *m*-optymalna tego rzędu.

Mówimy (odpowiednio), że struktura jest *strukturą minimalną* oraz *strukturą najtańszą*, względem określonej struktury *m*-diagnostowalnej, jeżeli graf ją opisujący, jest grafem *m*-diagnostowalnym i (odpowiednio) ma najmniejszą liczbę łuków oraz jest *ekonomicznym grafem najtańszym* [4]. Oczywiście, struktura najtańsza (względem określonej struktury) jest strukturą nieredukowalną, a jej składowe spójności mogą być strukturami optymalnymi lub quasi-optymalnymi określonych rzędów. Wyznaczanie struktury najtańszej ma znaczenie praktyczne i w przypadku ogólnym ma dużą złożoność obliczeniową. Wystarczy zauważyć, że nawet w przypadku, gdy uogólnione koszty poszczególnych sprawdzeń (testowań) są jednakowe, to zadanie takie, pomimo iż sprowadza się wówczas do wyznaczenia struktury minimalnej, również nie jest łatwe.

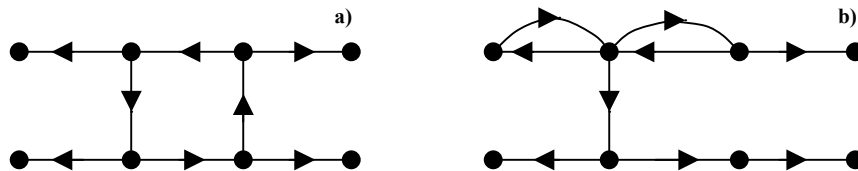
Dalsze rozważania ograniczymy do 1-diagnostowalnych struktur OD. Ponieważ warunki konieczne i wystarczające dla istnienia 1-diagnostowalnej

struktury OD są jednakowe dla modelu PMC i modelu BGM, to dalej (w skrócie) będziemy posługiwać się pojęciem *1-diagnozowalna struktura (typu PMC)*.

Wiadomo [3], że 1-optimalna struktura typu PMC jest takim grafem Berge'a bez pętli, którego każda składowa spójności jest cyklem zorientowanym rzędu co najmniej trzeciego, w którego węzłach zagnieżdżone są korzenie dendrytów (rys. 1a).

Dalej wykazemy, że 1-quasi-optimalna struktura typu PMC jest parą incydentnych cykli elementarnych w węzłach, których, zagnieżdżone są korzenie dendrytów (rys. 1b). Zauważmy, że obie struktury (przedstawione na rys 1) są tego samego rzędu (ósmego), przy czym struktura przedstawiona na rys. 1b, ma o jeden łuk (o jedno niezbędne sprawdzenie (testowanie)) więcej niż struktura przedstawiona na rys. 1a.

Tak, więc 1-diagnozowalna struktura nieredukowalna (względem określonej struktury typu PMC) nie musi być strukturą, której każda składowa spójności jest strukturą 1-optimalną określonego rzędu.



Rys. 1. Przykłady 1-diagnozowalnych struktur typu PMC rzędu ósmego (a-spójna struktura 1-optimalna; b-spójna struktura 1-quasi-optimalna)

W części drugiej publikacji, określimy podstawowe własności nieredukowalnych struktur 1-diagnozowalnych i wykazemy, że jeżeli składowa spójności 1-diagnozowalnej struktury typu PMC, jest strukturą nieredukowalną, to ma dokładnie jedną składową silnej spójności w postaci albo cyklu zorientowanego rzędu, co najmniej trzeciego albo w postaci pary incydentnych cykli elementarnych, przy czym w węzłach składowej silnej spójności zagnieżdżone są tylko korzenie dendrytów. W części trzeciej, przedstawimy metodę wyznaczania szeregu tworzącego spójnych, nieetykietowanych 1-quasi-optimalnych struktur typu PMC oraz określimy dziesięć pierwszych wyrazów tego szeregu, a w części czwartej – metody wyznaczania struktury najtańszej, w klasie spójnych struktur 1-quasi-optimalnych.

2. Podstawowe własności nieredukowalnych struktur 1-diagnozowalnych

Wiadomo [2], że przeciwwzrotny graf Berge'a $G (G = \langle E, U \rangle)$, nazywany również digrafem bez pętli, przedstawia 1-diagnozowalną strukturę typu PMC, wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$(|E| \geq 3) \wedge (|\Gamma^{-1}(e)| \geq 1, e \in E) \wedge \wedge ((\forall E' \subset E : |E'| = |E| - 2) : |\Gamma(E')| \geq 1) \quad (1)$$

gdzie: $\Gamma^{-1}(e)$ oznacza zbiór poprzedników wężła e (wartość $|\Gamma^{-1}(e)|$ jest stopniem wejściowym wężła e), a $\Gamma(E')$ - zbiór tych następników wężłów zbioru E' , które są elementami zbioru $E \setminus E'$.

Własność 1. Zbiór składowych silnej spójności, każdej składowej spójności, 1-diagnozowalnej struktury typu PMC, nie jest zbiorem pustym,

bowiem: w przeciwnym razie, w każdej składowej spójności, istniałby taki węzeł e' , że $|\Gamma^{-1}(e')| = 0$ co przeczyłoby warunkowi (1).

Własność 2. Składowa silnej spójności $\langle E^* \rangle_G$, 1-diagnozowalnej struktury G typu PMC, jest rzędu co najmniej trzeciego,

bowiem: spełnienie warunku (1) wymaga aby $|\{e \in E : \Gamma(e) = \emptyset\}| < |E| - 2$, a więc aby $|E^*| \geq 3$, gdyż $|\{e \in E : \Gamma(e) = \emptyset\}| \leq |E| - |E^*|$.

Własność 3. Silnie spójny graf Berge'a bez pętli G , rzędu, co najmniej trzeciego, jest strukturą 1-diagnozowalną typu PMC,

bowiem: $|\Gamma^{-1}(e)| \geq 1 (e \in E)$ oraz $(|E| \geq 3) \Rightarrow (|\{e \in E : \Gamma(e) = \emptyset\}| = 0 < |E| - 2)$, a więc spełniony jest warunek (1).

Własność 4. Jeżeli podgraf $\langle E \setminus \{e'\} \rangle_G$ spójnego grafu G , jest 1-diagnozowalną strukturą typu PMC oraz $|\Gamma^{-1}(e')| \geq 1$, to graf G również jest 1-diagnozowalną strukturą typu PMC,

bowiem: graf $\langle E \setminus \{e'\} \rangle_G$, na mocy własności 1 i 2, ma składową silnej spójności rzędu co najmniej trzeciego, a więc $|\{e \in E : \Gamma(e) = \emptyset\}| \leq |E| - 3$ czyli, że $(\forall E' \subset E : |E'| = |E| - 2) : |\Gamma(E')| \geq 1$ wobec czego, struktura G spełnia warunek (1).

Własność 5. Jeżeli węzeł e' nie jest elementem składowej silnej spójności, spójnej nieredukowalnej struktury 1-diagnozowalnej typu PMC, to $|\Gamma^{-1}(e')| = 1$,

bowiem: w przeciwnym razie, istniałby taki węzeł e'' ($e'' \in \Gamma^{-1}(e')$), a więc (na mocy własności 4) struktura powstała po usunięciu łuku $\langle e'', e' \rangle$ byłaby strukturą 1-diagnozowalną, co przeczy założeniu, że rozważana struktura, jest strukturą nieredukowalną.

Z własności 5 wynika (bezpośrednio) następująca własność.

Własność 6. Spójna nieredukowalna struktura 1-diagnozowalna typu PMC, ma tylko jedną składową silnej spójności w węzłach, której zagnieżdżone są korzenie dendrytów.

Własność 7. Cykl zorientowany rzędu, co najmniej trzeciego oraz para incydentnych cykli elementarnych, są nieredukowalnymi strukturami 1-diagnozowalnymi typu PMC,

bowiem: na mocy własności 3, są strukturami 1-diagnozowalnymi typu PMC, a każdy ich graf częściowy nie jest strukturą 1-diagnozowalną typu PMC.

Własność 8. Cykl zorientowany rzędu, co najmniej trzeciego oraz para incydentnych cykli elementarnych, są jedynymi, silnie spójnymi, nieredukowalnymi strukturami 1-diagnozowalnymi typu PMC,

bowiem: każda nieredukowalna struktura 1-diagnozowalna (typu PMC) rzędu trzeciego jest cyklem zorientowanym rzędu trzeciego lub parą incydentnych cykli elementarnych, natomiast dla każdej silnie spójnej struktury 1-diagnozowalnej (typu PMC) rzędu k ($k > 3$) istnieje graf częściowy, w postaci cyklu zorientowanego rzędu k (cyklu Hamiltona) lub w postaci pary incydentnych cykli elementarnych w węzłach których zagnieżdżone są korzenie dendrytów, który to (na mocy własności 6 i 7) jest nieredukowalną strukturą 1-diagnozowalną (typu PMC).

Własności 1-8 są podstawą dowodu następującego twierdzenia.

Twierdzenie 1. Jeżeli składowa spójności 1-diagnozowalnej struktury typu PMC, jest strukturą nieredukowalną, to ma dokładnie jedną składową silnej spójności w postaci albo cyklu zorientowanego rzędu, co najmniej trzeciego, albo w postaci pary incydentnych cykli elementarnych, przy czym w węzłach składowej silnej spójności zagnieżdżone są tylko korzenie dendrytów.

3. Szeregi tworzące nieredukowalnych, 1-diagnozowalnych struktur typu PMC

W pracy [3] przedstawiono metody wyznaczania szeregów tworzących 1-optimalnych struktur typu PMC. Metody te (dosyć złożone) obejmują zarówno nieetykietowane jak i etykietowane struktury spójne oraz o wielu składowych spójności.

Niech $S^*(k)$ oznacza liczbę spójnych, nieetykietowanych 1-quasi- optymalnych struktur typu PMC, rzędu k ($k \geq 3$).

Ponieważ dowolne dwa rozważane grafy (przedstawiające spójną, nieetykietowaną 1-quasi- optymalną strukturę typu PMC) o różnych rzędach lub o takich samych rzędach, lecz różniące się tym, że rzędy dendrytów, zagnieżdżonych w węzłach pary incydentnych cykli elementarnych, tworzą inne multizbiory, nie są grafami *podobnymi* (takimi, dla których istnieje odwzorowanie automorficzne przekształcające jeden z nich w drugi), to liczbę $S^*(k)$ można wyznaczyć z zależności:

$$S^*(k) = \sum_{\lambda \in \Lambda^3(k)} S^*(\lambda), \quad (2)$$

gdzie: $\Lambda^3(k)$ oznacza zbiór takich rozkładów λ ($\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$) liczby naturalnej k ($k \geq 3$) na trzy składniki proste, że $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 \geq 1$, a $S^*(\lambda)$ – liczbę nieetykietowanych grafów, utworzonych przez zagnieżdżenie w węzłach pary incydentnych cykli elementarnych, korzeni dendrytów o rzędach wyczerpujących poszczególne składniki wektora λ ($\lambda \in \Lambda^3(k)$).

Niech $r(\lambda')$ ($\lambda' \in \Lambda^3(k), 1 \leq r(\lambda') \leq 3$) oznacza liczbę grup w multizbiorze $\{\lambda'_1, \lambda'_2, \lambda'_3\}$, a $\delta^i(\lambda')$ ($i \in \{1, 2\}$) -wartość elementu tej grupy multizbioru, która ma krotność i (w przypadku, gdy $r(\lambda') = 2$). Oczywiście, jeżeli $r(\lambda') = 1$, to $\lambda'_1 = \lambda'_2 = \lambda'_3$, a jeżeli $r(\lambda') = 3$, to zbiór $\{\lambda'_1, \lambda'_2, \lambda'_3\}$ jest zbiorem liczb bez powtórzeń.

Niech $S^*(\lambda')$ oznacza liczbę nieetykietowanych, 1-quasi- optymalnych struktur rzędu k ($k \geq 3$), indukowanych przez rozkład λ' , a $D(b)$ -liczbę nieetykietowanych dendrytów rzędu b (równą, jak wiadomo [3], liczbie nieetykietowanych drzew niezorientowanych z korzeniem rzędu b). Po uwzględnieniu symetrii węzłów, pary incydentnych cykli elementarnych, otrzymujemy:

$$(r(\lambda') = 1) \Rightarrow (S^*(\lambda') = \frac{1}{2} \cdot D^2(\lambda'_1) \cdot [D(\lambda'_1) + 1]); \quad (3)$$

$$(r(\lambda') = 2) \Rightarrow (S^*(\lambda') = D(\delta^1(\lambda')) \cdot [D^2(\delta^2(\lambda')) + \frac{1}{2} \cdot D(\delta^2(\lambda')) \cdot (D(\delta^2(\lambda')) + 1)]); \quad (4)$$

$$(r(\lambda') = 3) \Rightarrow (S^*(\lambda') = 3 \cdot D(\lambda'_1) \cdot D(\lambda'_2) \cdot D(\lambda'_3)). \quad (5)$$

Wiadomo [3], że szereg $D(x)$, dla pierwszych dziesięciu wyrazów, ma postać:

$$D(x) = x + x^2 + 2x^3 + 4x^4 + 9x^5 + 20x^6 + \\ + 48x^7 + 115x^8 + 286x^9 + 719x^{10} + \dots \quad (6)$$

Z zależności (2)-(6), w prosty sposób, wyznaczamy wyrazy szeregu tworzącego $S^*(x)$.

Szereg $S^*(x)$, dla pierwszych dziesięciu wyrazów, ma postać:

$$S^*(x) = x^3 + 2x^4 + 6x^5 + 15x^6 + 41x^7 + \\ + 106x^8 + 284x^9 + 750x^{10} + \dots \quad (7)$$

Dla porównania, szereg tworzący $S(x)$ nieetykietowanych, spójnych 1- optymalnych struktur typu PMC, dla pierwszych dziesięciu wyrazów, ma postać [3]:

$$S(x) = x^3 + 2x^4 + 5x^5 + 15x^6 + 40x^7 + \\ + 118x^8 + 341x^9 + 970x^{10} + \dots \quad (8)$$

Znajomość szeregów (7) i (8) jest użyteczna, na przykład, przy ocenie złożoności obliczeniowej różnych metod wyznaczania najtańszej struktury 1-diagnozowalnej (pozwala ocenić liczebność zbioru rozwiązań dopuszczalnych).

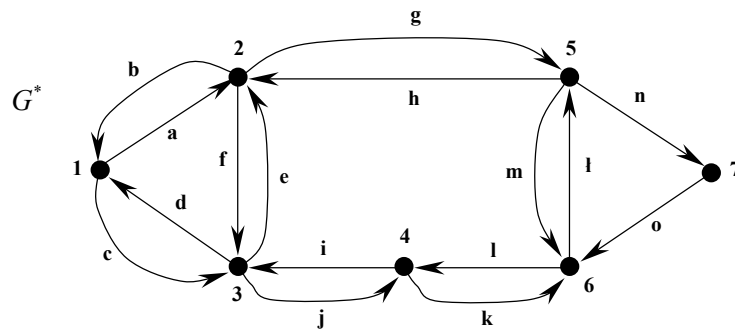
4. Wyznaczanie najtańszej, 1-diagnozowalnej struktury typu PMC

Niech $G^N(G^*)$ oznacza 1-diagnozowalną strukturę (typu PMC), najtańszą względem spójnej, ekonomicznej [4] struktury m -diagnozowalnej G^* .

Strukturę G^* będziemy przedstawiać w postaci grafu o opisanych łukach lub w postaci takiej macierzy kosztów $M(G^*)$ ($m_{i,j} \in M(G^*)$, $1 < i, j < |E|$), że $(\langle e_i, e_j \rangle \in U) \Rightarrow (m_{i,j} = K(\langle e_i, e_j \rangle))$ oraz $(\langle e_i, e_j \rangle \notin U) \Rightarrow (m_{i,j} = 0)$ (rys.2).

Będziemy poszukiwać rozwiązania w postaci spójnej struktury $G^N(G^*)$. W tym przypadku, struktura $G^N(G^*)$ może być (zgodnie z twierdzeniem 1) albo strukturą 1-optymalną albo strukturą 1-quasi-optymalną. Oczywiście, gdyby dopuszczono rozwiązanie nie koniecznie w postaci struktury spójnej, to poszczególne składowe spójności struktury najtańszej, mogłyby stanowić odpowiednią kombinację struktur 1-optymalnych lub 1-quasi-optymalnych (odpowiednich rzędów).

W publikacji [4] przedstawiono metodę wyznaczania, nie koniecznie spójnej, struktury $G^N(G^*)$ w klasie struktur 1- optymalnych (przeciwnymetrycznych).



u	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	l	m	n	o
K(u)	5	4	1	2	3	2	3	2	2	5	3	3	5	4	4	4

$$M(G^*) = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

Rys. 2. Przykład spójnej, ekonomicznej struktury 1-diagnozowalnej G^* , przedstawionej w postaci grafu opisanego (w tabeli podano wartości uogólnionych kosztów poszczególnych sprawdzeń(testowań)) oraz w postaci macierzy $M(G^*)$

Będziemy rozpatrywać silnie spójne struktury G^* , bowiem w przeciwnym razie (na mocy twierdzenia 1), wystarczy rozwiązać (powyższy) problem tylko dla tej (jedynej) składowej silnej spójności $\langle E' \rangle_{G^*}$ grafu G^* , dla której $\Gamma^{-1}(E') = \emptyset$, gdyż (w tym przypadku) wyznaczenie struktury $G^N(G^*)$

sprowadza się do oddzielnego wyznaczenia struktury $G^N(\langle E' \rangle_{G^*})$ oraz najtańszego dendrytu, którego korzeniem jest węzeł odpowiadający składowej silnej spójności $\langle E' \rangle_{G^*}$, po kondensacji grafu G^* do podgrafu $\langle E' \rangle_{G^*}$ [4].

Niech $C(G^*)$ oraz $P(G^*)$ oznacza zbiór cykli zorientowanych rzędu, co najmniej trzeciego oraz (odpowiednio) - zbiór par incydentnych cykli elementarnych, istniejących w grafie G^* .

Niech $E(c)$ oraz $U(c)$ oznacza zbiór węzłów oraz (odpowiednio) łuków cyklu c ($c \in C(G^*)$), a $E(p)$ oraz $U(p)$ -zbiór węzłów oraz (odpowiednio) łuków pary p ($p \in P(G^*)$).

Cykl c ($c \in C(G^*)$) będziemy przedstawiać jako ciąg cykliczny $c = (i_1, i_2, \dots, i_{|E(c)|})$ indeksów kolejnych węzłów cyklu, a parę p ($p \in P(G^*)$) - jako taki ciąg $p = (j_1, j_2, j_3)$ indeksów węzłów tej pary, że j_1 jest indeksem incydentnego węzła pary oraz $j_2 < j_3$. Zasadniczym narzędziem do wyznaczania struktury $G^N(G^*)$ jest operacja kondensacji grafu G^* do podgrafu $\langle E(c) \rangle_{G^*}$ ($c \in C(G^*)$) (w przypadku poszukiwania rozwiązania w klasie struktur 1-optymalnych) oraz do podgrafu $\langle E(p) \rangle_{G^*}$ ($p \in P(G^*)$) (w przypadku poszukiwania rozwiązania w klasie struktur 1-quasi-optymalnych). Kondensacja grafu G^* do podgrafu $\langle E(p) \rangle_{G^*}$ ($p \in P(G^*)$) jest operacją analogiczną do, opisaną w publikacji [4], kondensacji grafu G^* do podgrafu $\langle E(c) \rangle_{G^*}$ ($c \in C(G^*)$).

Dla formalności i ułatwienia śledzenia niniejszej publikacji, określimy ją jednak poniżej.

Kondensacją grafu G^* do podgrafu $\langle E(p) \rangle_{G^*}$ będziemy nazywać graf $G^*(p)$, utworzony z grafu G^* przez:

- zastąpienie podgrafu $\langle E(c) \rangle_{G^*}$ pojedynczym węzłem e_p ;
- usunięcie łuków należących do zbioru $\{u' \in U^* : e^k(u') \in E(p)\}$ ($e^k(u')$ - węzeł, do którego dochodzi łuk u') oraz usunięcie, poza dokładnie jednym (dowolnym) z najtańszych, łuków z każdego takiego zbioru $\{u'' \in U^* : (e^p(u'') \in E(p)) \wedge (e^k(u'') = e^*)\}$ ($e^p(u'')$ - węzeł z którego wychodzi łuk u''), że $e^* \in E \setminus E(p)$.

Macierz $M(G^*(p))$ uzyskujemy w prosty sposób przez wykreślenie

z macierzy $M(G^*)$ wierszy i kolumn o numerach odpowiadających indeksom elementów zbioru $E(p)$; uzupełnienie (tak powstałej macierzy) początkowym wierszem i początkową kolumną zerową, etykietując je symbolem (p) oraz przypisując elementom pierwszego wiersza macierzy, wartości:

$$m_{p,j} = \min \{ m_{i,j} \in M(G^*) (m_{i,j} \neq 0) : i \in I(E(p)) \} (j \notin I(E(p))),$$

gdzie: $I(E(p))$ oznacza zbiór numerów odpowiadających indeksom elementów zbioru $E(p)$.

Tak więc, jeżeli przez $G^N(p, G^*)$ oznaczymy najtańszy, spójny graf częściowy grafu G^* , który jest strukturą 1-quasi-optymalną, zawierającą parę incydujących cykli elementarnych p ($p \in P(G^*)$), a przez $D^N(G^*(p))$ - najtańszy graf częściowy grafu $G^*(p)$, który jest dendrytem ekonomicznym o korzeniu e_p , to

$$K(G^N(p, G^*)) = K(p) + K(D^N(G^*(p))), \quad (9)$$

gdzie:

$$K(p) = \sum_{u \in U(p)} K(u);$$

$$K(D^N(G^*(p))) = \sum_{u \in U(D^N(G^*(p)))} K(u) \quad (U(G^*(p)) \neq \emptyset)$$

oraz

$$(U(G^*(p)) = \emptyset) \Rightarrow (K(D^N(G^*(p))) = 0).$$

W odniesieniu do macierzy $M(G^*(p))$ (analogicznie jak w odniesieniu do macierzy $M(G^*(c))$) [4] prawdziwe jest następujące twierdzenie.

Twierdzenie 2. Każda taka, przeciwsymetryczna macierz częściowa M' macierzy $M(G^*(p))$, której każda kolumna, z wyjątkiem kolumny (p) , zawiera dokładnie jeden element niezerowy oraz graf $G(M')$ jest grafem spójnym, przedstawia *dendryt ekonomiczny* (dendryt o łukach opisanych przez uogólniony koszt), którego korzeniem jest węzeł e_p .

Wartość $K(D^N(G^*(p)))$ ($U(G^*(p)) \neq \emptyset$) określamy albo przez wyznaczenie (zgodnie z twierdzeniem 2 i za pomocą metod opisanych w publikacji [4]) takiej przeciwsymetrycznej macierzy częściowej macierzy $M(G^*(p))$, której każda kolumna zawiera dokładnie jeden element niezerowy,

a suma wartości tych elementów jest wartością minimalną i sprawdzenie czy graf opisany, odpowiadający takiej macierzy, jest grafem spójnym albo przez wybranie ze zbioru ekonomicznych karkasów grafu $G^*(p)$, najtańszego dendrytu ekonomicznego o korzeniu e_p .

Tak więc, w najgorszym przypadku, dokonując rozwiązania dla wszystkich par incydentnych cykli elementarnych ze zbioru $P(G^*)$, wyznaczamy najtańszą strukturę $G^{N,p}(G^*)$, w klasie spójnych struktur 1-quasi- optymalnych. W wielu przypadkach, zbiór par incydentnych cykli elementarnych, w którym należy poszukiwać struktury $G^{N,p}(G^*)$, można ograniczyć do zbioru P' ($P' \subset P(G^*)$).

Oczywiście

$$[(E(p') = E(p'')) \wedge (K(p') > K(p''))] \Rightarrow [p' \notin P']. \quad (10)$$

Kres dolny K_{\inf} oraz kres górny K_{\sup} kosztu dendrytu $D(G^*(p))$ można określić sumując po kolumnach macierzy $M(G^*(p))$, wartości, odpowiednio najtańszego (niezerowego) oraz najdroższego elementu w każdej kolumnie macierzy, to jest:

$$K_{\inf}(D(G^*(p))) = \sum_{j \in I(M(G^*(p)))} K_{\min,j}(M(G^*(p)));$$

$$K_{\sup}(D(G^*(p))) = \sum_{j \in I(M(G^*(p)))} K_{\max,j}(M(G^*(p)));$$

$$K_{\min,j}(M(G^*(p))) = \min\{m_{i,j} \in M(G^*(p)), m_{i,j} \neq 0 : i \in I(M(G^*(p)))\} \quad (j \in I(M(G^*(p))));$$

$$K_{\max,j}(M(G^*(p))) = \max\{m_{i,j} \in M(G^*(p)) : i \in I(M(G^*(p)))\} \quad (j \in I(M(G^*(p))),$$

a $I(M(G^*(p)))$ oznacza zbiór indeksów macierzy $M(G^*(p))$.

Oczywiście

$$[K(p') + K_{\inf}(D(G^*(p'))) > K(p'') + K_{\sup}(D(G^*(p'')))] \Rightarrow [p' \notin P']. \quad (11)$$

Dla przykładu, w tab. 1 zestawiono wartości $K(p)$ dla wszystkich par incydentnych cykli elementarnych p ($p \in P(G^*)$) grafu G^* (przedstawionego na rys. 2) oraz (odpowiadające dendrytom $D(G^*(p))$) wartości K_{\inf} i K_{\sup} .

Z tablicy 1 oraz z zależności (9), (10) i (11) wynika, że $P' = P(G^*) \setminus \{p_1, p_2\}$.

Ponieważ: $\{p' \in P(G^*) \setminus \{p_1, p_2\} : K(p') + K_{\inf}(D(p', G^*)) = \min\} = p_5$,

to wyznaczymy wartość $K(G^N(p_5, G^*))$.

Tab. 1.

i	p_i	$K(p_i)$	K_{\inf}	K_{\sup}
1	(1,2,3)	12	13	18
2	(2,1,3)	14	13	18
3	(2,1,5)	14	11	15
4	(2,3,5)	10	12	15
5	(3,1,2)	8	13	18
6	(3,1,4)	10	12	16
7	(3,2,4)	12	12	15
8	(4,3,6)	13	11	18
9	(5,2,6)	14	10	15
10	(6,4,5)	15	9	15

Z macierzy $M(D^N(G^*(p_5)))$ (rys.3) wynika, że:

$$K(D^N(G^*(p_5))) = 22,$$

a więc (tab. 1):

$$\{p' \in P(G^*) \setminus \{p_5\} : K(p') + K_{\inf}(D(p', G^*)) = 22\} = \{p_4, p_6\}.$$

Niech $\tilde{M}(G^*(p))$ oznacza macierz utworzoną z macierzy $M(G^*(p))$ przez pozostawienie w każdej jej kolumnie (z wyjątkiem kolumny (p)) dokładnie jednego elementu niezerowego o minimalnej wartości. Zauważmy, że jeżeli każda macierz $\tilde{M}(G^*(p))$ nie jest macierzą przeciwsymetryczną lub macierzą kosztów spójnego grafu ekonomicznego, to (zgodnie z twierdzeniem 2):

$$K(D^N(G^*(p))) > K_{\inf}(D^N(G^*(p))).$$

Łatwo upewnić się, że jedyne macierze $\tilde{M}(G^*(p_4))$ i $\tilde{M}(G^*(p_6))$ nie są macierzami przeciwsymetrycznymi.

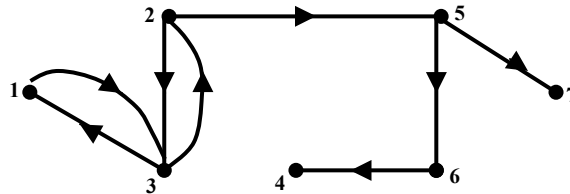
Tak więc, względem struktury przedstawionej na rysunku 1, istnieje tylko jedna struktura najtańsza w klasie spójnych struktur 1-quasi-optymalnych, której uogólniony koszt równa się 22 (rys.4).

Z publikacji [4] wiadomo, że $K(G^N(c_4, G^*)) = K(G^N(c_8, G^*)) = 21$, a więc najtańsza struktura względem struktury przedstawionej na rysunku 2, należy do klasy spójnych struktur 1-optymalnych.

$$M(G^*(p_5)) = \begin{matrix} & p_5 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ p_5 & \begin{bmatrix} 0 & 5 & 3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ 4 & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \end{bmatrix} \\ 5 & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 4 & 4 \end{bmatrix} \\ 6 & \begin{bmatrix} 0 & 3 & 5 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ 7 & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$$M(D^N(G^*(p_5))) = \begin{matrix} & p_5 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ p_5 & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ 4 & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \end{bmatrix} \\ 5 & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 4 & 4 \end{bmatrix} \\ 6 & \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ 7 & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

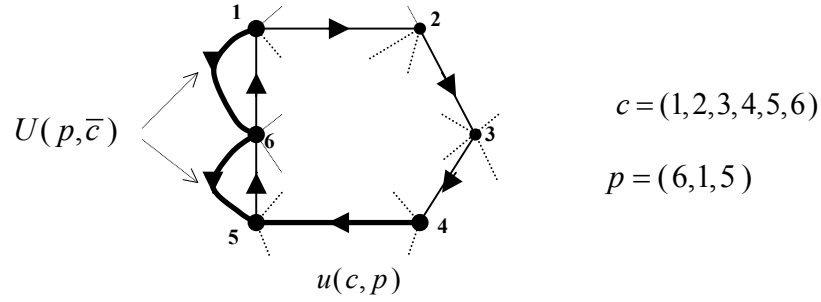
Rys. 3. Macierz $M(G^*(p_5))$ ($p_5 = (3,1,2)$) uzyskana z macierzy $M(G^*)$ (rys.2) po kondensacji grafu G^* do podgrafu $\langle E(p_5) \rangle_{G^*}$ oraz macierz $M(D^N(G^*(p_5)))$, uzyskana z macierzy $M(G^*(p_5))$, zgodnie z twierdzeniem 2



Rys. 4. Jedyna struktura najtańsza, w klasie spójnych struktur 1-quasi- optymalnych, względem struktury przedstawionej na rys. 2

Przy wyznaczaniu spójnej struktury $G^N(G^*)$ ($C(G^*) \neq \emptyset, P(G^*) \neq \emptyset$), użyteczne są metody pozwalające na jednoczesne redukowanie zbiorów $C(G^*)$ i $P(G^*)$ do podzbiorów $C'(G^*)$ i $P'(G^*)$, wśród których należy poszukiwać rozwiązania.

Rozpatrzmy przypadek, gdy: $\exists p \in P(G^*) \exists c \in C(G^*) : |E(p) \cap E(c)| = 3$.



Rys. 5. Ilustracja takiego cyklu c i takiej pary (incydentnych cykli elementarnych) p ,
że: $|E(c) \cap E(p)| = 3$

Oznaczmy:

$$U(p, \bar{c}) = \{u \in U(p) : u \notin U(c)\} (|E(p) \cap E(c)| = 3);$$

$$K(U(p, \bar{c})) = \sum_{u' \in U(p, \bar{c})} K(u'),$$

a $u(c, p)$ niech oznacza taki łuk cyklu c , że $e^k(u(c, p)) \in E(p)$.

Twierdzenie 3:

$$[K(U(p, \bar{c})) > K(u(c, p))] \Rightarrow [p \notin P'], \quad (12)$$

$$[K(U(p, \bar{c})) < K(u(c, p))] \Rightarrow [c \notin C'], \quad (13)$$

bowiem:

$$(|E(p) \cap E(c)| = 3) \Rightarrow (U(G^*(c)) \subseteq U(G^*(p))),$$

a więc:

$$K(D^N(G^*(p))) \leq K(D^N(G^*(c))),$$

natomiast:

$$U(c) \setminus \{\{U(p) \setminus U(p, \bar{c})\} \cup \{u(c, p)\}\} \subset U(G^*(p))$$

czyli że:

$$K(D^N(G^*(p))) \leq K(D^N(G^*(c))) + \\ + K(c) - K(u(c, p)) - [K(p) - K(U(p, \bar{c}))].$$

Tak więc:

$$K(G^N(p, G^*)) - K(G^N(c, G^*)) \leq K(U(p, \bar{c})) - K(u(c, p)).$$

Dla przykładu (rys.2), dla $p = (2, 1, 5)$ istnieje cykl $c = (1, 3, 4, 6, 5, 2)$ taki, że $(|E(p) \cap E(c)| = 3)$ oraz $K(U(p, \bar{c})) = 7$ i $K(u(c, p)) = 5$, a więc (zgodnie z zależnością (12)): $p \notin P'$. Korzystając z twierdzenia 3, możemy przekonać się, że dla struktury przedstawionej na rys.2, zbiór P' jest zbiorem pustym – najtańsza struktura należy do klasy struktur 1- optymalnych.

5. Podsumowanie

Wykazano, że jeżeli składowa spójności 1-diagnozowalnej struktury typu PMC jest strukturą nieredukowalną, to ma dokładnie jedną składową silnej spójności w postaci albo cyklu zorientowanego rzędu, co najmniej trzeciego, albo w postaci pary incydentnych cykli elementarnych, przy czym w węzłach składowej silnej spójności zagnieżdżone są tylko korzenie dendrytów (własności 1-8, twierdzenie 1, rys.1).

Przedstawiono metodę wyznaczania szeregu tworzącego, spójnych, nieetykietowanych 1-quasi-optymalnych struktur typu PMC oraz określono dziesięć pierwszych wyrazów tego szeregu (zależność (7)). Z porównania zależności (7) i (8) (wyznaczonej w publikacji [4]) wynika, że od rzędu ósmego (włącznie) liczebność zbioru struktur 1-optymalnych jest znacząco większa od liczebności zbioru struktur 1-quasi-optymalnych.

Przedstawiono metodę wyznaczania struktury najtańszej, w klasie spójnych struktur 1-quasi-optymalnych, która jest (w zakresie użycia operacji kondensacji grafu do podgrafu) metodą analogiczną do metody przedstawionej w publikacji [4] i stosowanej do wyznaczania struktury najtańszej, w klasie struktur 1-optymalnych. W odniesieniu do analizowania takiej struktury, co do której można spodziewać się, że najtańsza (względem niej) struktura może być strukturą 1-optymalną albo 1-quasi-optymalną, zaproponowano metodę redukcji zbioru, w którym należy poszukiwać rozwiązań (twierdzenie 3).

Metody projektowania najtańszej struktury, przedstawiane zarówno w niniejszej publikacji jak i w publikacji [4], są ilustrowane wspólnym przykładem (rys.2), dla którego dwie najtańsze struktury (w klasie spójnych struktur) są strukturami 1-optymalnymi.

Literatura

- [1] Krawczyk H.: *Analiza i synteza samodiagnostowalnych systemów komputerowych*, Zeszyty Naukowe Politechniki Gdańskiej, Elektronika nr 64, Gdańsk, 1987.
- [2] Kulesza R.: *Podstawy diagnostyki sieci logicznych i komputerowych*, Instytut Automatyki i Robotyki, WAT, Warszawa, 2000.
- [3] Kulesza R.: *Metoda przeliczania 1-optymalnych struktur opiniowania diagnostycznego*, Biuletyn Instytutu Automatyki i Robotyki, Wojskowa Akademia Techniczna, Warszawa, 2001, nr.16, s.19-34.
- [4] Kulesza R.: *Metody wyznaczania najtańszych 1-diagnostowalnych struktur opiniowania diagnostycznego*, Biuletyn Instytutu Automatyki i Robotyki, Wojskowa Akademia Techniczna, Warszawa, 2002, nr 17, s.3-24.

Recenzent: prof. dr hab. inż. Lesław Będkowski

Praca wpłynęła do redakcji: 10.01.2003