

# Metoda wyznaczania najtańszych 1-diagnozowalnych struktur opiniowania diagnostycznego

Roman KULESZA

Zakład Automatyki, Instytut Automatyki i Robotyki WAT, ul. Kaliskiego 2, 00-908 Warszawa

STRESZCZENIE: W artykule przedstawiono metody (przybliżone i dokładną) projektowania 1-diagnozowalnych struktur opiniowania diagnostycznego systemu w przypadku, gdy zachodzi potrzeba uwzględniania uogólnionych kosztów wzajemnego testowania się elementów systemu. Metody te mają zastosowanie, między innymi, przy projektowaniu struktur diagnostycznych sieci komputerowych. Przedstawiono również sposób określenia liczby spójnych oraz dowolnych, zaetykietowanych 1- optymalnych struktur opiniowania diagnostycznego, zawierających  $k$  elementów i wyznaczono te liczby dla  $k \leq 8$ . Artykuł jest wynikiem częściowym badań nad automatyzowaniem procesu administrowania siecią komputerową, prowadzonych w Instytucie Automatyki i Robotyki WAT.

## 1. Wprowadzenie

Czasami, przy projektowaniu *struktury wzajemnego testowania się elementów systemu* (utożsamianej często ze *strukturą diagnostyczną systemu*), spełniającej wymagania niezbędne do uzyskania zamierzonych *własności diagnostycznych systemu*, koniecznym jest uwzględnianie różnego rodzaju czynników powodujących, że *uogólnione koszty wzajemnego testowania się elementów systemu*, nie mogą być uważane za jednakowe. Ma to miejsce (na przykład) w odniesieniu do komputerowych *systemów heterogenicznych*, w których czasy wzajemnego testowania się określonych komputerów (przy zachowaniu wymaganej *skuteczności kontrolnej testów*) mogą różnić się w sposób istotny (z uwagi na różne możliwości funkcjonalne poszczególnych komputerów) lub w odniesieniu do *homogenicznych sieci komputerowych*, w których przesyłanie pakietów danych testujących obniża efektywność sieci.

W przypadku gdy nie ma potrzeby uwzględniania uogólnionych kosztów testowania, strukturę diagnostyczną systemu, diagnozowanego *metodą opiniowania diagnostycznego*, przedstawia się w postaci przeciwwrotnego (bez pętli) grafu Berge'a  $G$  ( $G = \langle E, U \rangle$ ,  $e \in E$ ), nazywanego *grafem opiniowania diagnostycznego* ([9]).

Tak więc, jeżeli przez  $K(\langle e', e'' \rangle)$  ( $0 < K(u) < \infty$ ,  $u \in U$ ) oznaczymy uogólniony koszt testowania elementu  $e''$  przez element  $e'$ , to graf opisany  $G^* = \langle G; \{K(u) : u \in U\} \rangle$  możemy nazwać *ekonomicznym grafem opiniowania diagnostycznego*, a wartość  $K(G^*) = \sum_{u \in U} K(u)$  - *uogólnionym kosztem grafu  $G^*$* .

Graf opiniowania diagnostycznego (dla określonego sposobu (modelu) wnioskowania z wyników testowań) nazywamy *grafem  $m$ -diagnozowalnym*, jeżeli wnioskowanie z wyników wszystkich przewidzianych (przez ten graf) testowań, umożliwia zidentyfikowanie (zlokalizowanie)  $m$  niezdatnych elementów systemu, pod warunkiem, że nie jest ich więcej niż  $m$  ( $m \geq 1$ ), a graf  $m$ -diagnozowalny o minimalnym (w sensie własnym) zbiorze łuków-*grafem  $m$ -optymalnym*.

Graf częściowy  $G'$  grafu  $G^*$ , który jest takim  $m$ -diagnozowalnym grafem opiniowania diagnostycznego, że koszt  $K(G')$  przyjmuje wartość minimalną, nazywamy *najtańszym* (względem  $G^*$ )  *$m$ -diagnozowalnym grafem opiniowania diagnostycznego*.

Zauważmy, że najtańszy graf  $m$ -diagnozowalny jest grafem  $m$ -optymalnym, to jest takim grafem  $m$ -diagnozowalnym, którego żaden graf częściowy nie jest grafem  $m$ -diagnozowalnym. Tak więc, wyznaczenie najtańszego grafu  $m$ -diagnozowalnego sprowadza się do wyznaczenia najtańszego grafu  $m$ -optymalnego.

Celem niniejszego artykułu, jest przedstawienie metod wyznaczenia najtańszego, 1-diagnozowalnego grafu opiniowania diagnostycznego.

W części drugiej artykułu, przedstawimy opis formalny problemu, a w części trzeciej – przybliżone metody jego rozwiązania. Dokładną metodę rozwiązania przedstawimy w części czwartej. W części piątej, przedstawimy sposób określenia liczby spójnych oraz dowolnych (niekoniecznie spójnych), zaetykietowanych 1-optymalnych struktur opiniowania diagnostycznego rzędu  $k$  oraz podamy te liczby dla  $k \leq 8$ .

## 2. Opis formalny problemu

Możliwości wzajemnego testowania się elementów zbioru  $E$  oraz uogólnione koszty tych testowań, dane są w postaci ekonomicznego grafu opiniowania diagnostycznego  $G^*$  (rys.1) przy czym zakłada się, że graf  $G(G^*)$  jest spójnym, 1-diagnozowalnym grafem opiniowania diagnostycznego ([9]), a więc:

$$\begin{aligned} & (|E| \geq 3) \wedge (\mu^-(e) \geq 1, e \in E) \wedge \\ & \wedge ((\forall E' \subset E: |E'| = |E| - 2): |\Gamma(E')| \geq 1), \end{aligned} \quad (1)$$

gdzie:  $\mu^-(e)$  oznacza stopień wejściowy wężła  $e$ , a  $\Gamma(E')$ - zbiór tych następników wężłów zbioru  $E'$ , które są elementami zbioru  $E \setminus E'$ .

Graf  $G^*$  można również przedstawić w postaci takiej macierzy kosztów  $M(G^*)$  ( $m_{i,j} \in M(G^*)$ ,  $1 < i, j < |E|$ ), że  $(\langle e_i, e_j \rangle \in U) \Rightarrow (m_{i,j} = K(\langle e_i, e_j \rangle))$  oraz  $(\langle e_i, e_j \rangle \notin U) \Rightarrow (m_{i,j} = 0)$  (rys.1).

Z zależności (1) wynika, że

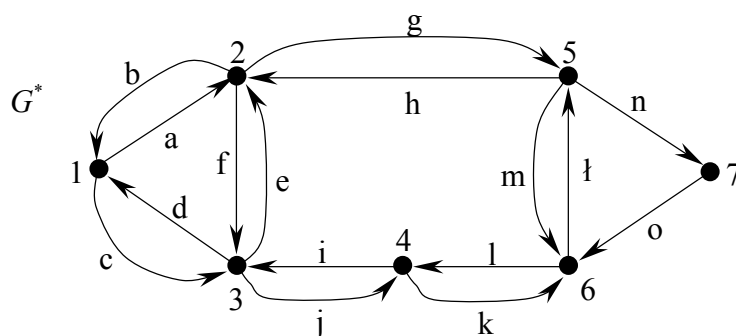
$$\begin{aligned} & (\forall j \in I: |\{m_{i,j} \in M(G^*): m_{i,j} \neq 0\}| \geq 1) \wedge \\ & \wedge ((\forall I' \subset I: |I'| = |I| - 2): |\{j \in I \setminus I': (\exists i \in I': m_{i,j} \neq 0)\}| \geq 1), \end{aligned} \quad (2)$$

gdzie  $I = \{1, \dots, |E|\}$ .

Oczywiście

$$K(G^*) = K(M(G^*)) = \sum_{1 \leq i, j \leq |E|} m_{i,j}.$$

Wiadomo ([9], [10]), że 1-optimalny graf opiniowania diagnostycznego (poza cyklami rzędu drugiego), zarówno dla modelu PMC (Preparata F.P.; Metze G.; Chien R.T.), jak i dla modelu BGM (Barsi F.; Grandoni F.; Maestrini P.) jest takim grafem opiniowania diagnostycznego, którego każda składowa spójności zawiera dokładnie jeden cykl zorientowany rzędu co najmniej trzeciego, a w wężłach każdego (takiego) cyklu są zagnieżdżone korzenie dendrytów.



u	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	ł	m	n	o
K(u)	5	4	1	2	3	2	3	2	5	2	3	3	5	4	4	4

$$M(G^*) = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

**Rys.1. Przykład ekonomicznego, 1-diagnozowalnego grafu opiniowania diagnostycznego  $G^*$  (przedstawionego w postaci graficznej oraz w postaci macierzy  $M(G^*)$ )**

**Twierdzenie 1.** Przeciwsymetryczny ( $e' \in \Gamma(e'') \Rightarrow (e'' \notin \Gamma(e'))$ ), przeciwzrotny graf Berge'a  $G$ , w którym stopień wejściowy każdego wężła jest równy jeden, jest 1- optymalnym grafem opiniowania diagnostycznego.

D o w ó d. Ponieważ stopień wejściowy każdego wężła grafu  $G$  jest równy jeden, to każda składowa spójności tego grafu zawiera dokładnie jeden cykl zorientowany oraz ma liczbę cyklomatyczną równą jeden, a więc w wężłach każdego cyklu zorientowanego są zagnieżdżone korzenie dendrytów. Z przeciwsymetryczności grafu  $G$  wynika natomiast, że każdy jego cykl zorientowany jest rzędu co najmniej trzeciego.

Z twierdzenia 1 wynika (bezpośrednio) następująca własność.

Własność 1. Każda przeciwsymetryczna  $((m_{i,j} \neq 0) \Rightarrow (m_{j,i} = 0))$  macierz binarna  $M_{(k \times k)}$  ( $k \geq 3$ ) o zerowej przekątnej, zawierająca w każdej kolumnie dokładnie jeden element równy jeden, jest macierzą przejść zaetykietowanego, 1-optimalnego grafu opiniowania diagnostycznego rzędu  $k$ .

Tak więc, wyznaczenie najtańszego grafu częściowego  $G^N(G^*)$  grafu  $G^*$  sprowadza się do wyznaczenia takiej przeciwsymetrycznej macierzy częściowej  $M^N(G^*)$  macierzy  $M(G^*)$ , której każda kolumna zawiera dokładnie jeden element różny od zera, a suma wartości jej elementów jest wartością minimalną (rys. 2).

Oczywiście, zastępując każdy niezerowy element macierzy  $M^N(G^*)$  symbolem 1, otrzymamy macierz przejść grafu  $G^N(G^*)$ .

$$M(G^*) = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \end{bmatrix} \quad M_1^N(G^*) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

**Rys. 2. Macierz  $M_1^N(G^*)$  jest jedną z dwóch możliwych takich, przeciwsymetrycznych macierzy częściowych macierzy  $M(G^*)$ , których każda kolumna zawiera dokładnie jeden element różny od zera, a suma wartości tych elementów jest wartością minimalną**

Wyznaczenie macierzy  $M^N(G^*)$ , w wielu przypadkach, nie jest zadaniem łatwym.

Niech  $M_j$  oraz  $m(M_j)$  oznaczają odpowiednio: zbiór niezerowych elementów  $j$ -tej kolumny macierzy  $M(G^*)$  oraz minimalną wartość elementów tego zbioru, a  $M_j^N$  - zbiór najtańszych elementów zbioru  $M_j$  ( $M_j^N = \{m_{i,j} \in M_j : m_{i,j} = m(M_j)\}$ ).

Oczywiście, jeżeli  $\{m_{i,j} \in M(G^*) : (m_{i,j} \neq 0) \wedge (m_{j,i} \neq 0)\} = \emptyset$ , to rozwiązanie jest banalne i polega na pozostawieniu w każdej kolumnie, jednego (dowolnego) z najtańszych elementów. W tym przypadku, istnieje  $|M_1^N| \times \dots \times |M_{|E|}^N|$  rozwiązań.

Jeżeli  $\forall j \in I : |M_j^N| = |E| - 1$ , to rozwiązanie jest również banalne i polega na pozostawieniu w każdej kolumnie, jednego takiego elementu, którego element symetryczny został zredukowany (zastąpiony symbolem 0). W tym przypadku istnieje  $R^*(|E|)$  (zależność (11)) rozwiązań.

Oczywiście, w obu (powyższych) przypadkach:

$$K(G^N(G^*)) = \sum_{1 \leq j \leq |E|} m(M_j).$$

Oznaczmy

$$Q(M(G^*)) = \{m_{i,j} \in M(G^*) : (m_{i,j} \in M_j^N) \wedge \wedge (m_{j,i} \in M_i^N) \wedge (|M_j^N| = |M_i^N| = 1)\}.$$

Jest rzeczą zrozumiałą, że stopień trudności wyznaczenia macierzy  $M^N(G^*)$  wzrasta wraz ze wzrostem liczebności zbioru  $Q(M(G^*))$ .

Oznaczmy:  $M_j^s = \{m_{i,j} \in M_j : m_{j,i} \neq 0\}$  ( $j \in I$ ).

Zauważmy, że pozostawienie w zbiorze  $M_j \setminus M_j^s$  tylko jednego (dowolnego) z najtańszych elementów, a zredukowanie pozostałych, nie ma wpływu na wyznaczenie macierzy  $M^N(G^*)$ .

Dalej, będziemy analizować macierz  $M(G^*)$ , która jest macierzą wstępnie zredukowaną, to jest taką, że

$$\begin{aligned} & [ ( (|M_j| = 1) \wedge (m_{i,j} \neq 0) ) \Rightarrow (m_{j,i} = 0) ] \wedge \\ & \wedge [ (|M_j| > 1) \Rightarrow ( \forall m_{i,j} \in M_j^N : m_{j,i} \neq 0 ) ] \quad (j \in I) \end{aligned} \quad (3)$$

oraz

$$|M_j| \leq |M_j^s| + 1 \quad (j \in I). \quad (4)$$

Dla przykładu, macierz  $M(G^*)$ , przedstawiona na rys 1, jest macierzą wstępnie zredukowaną dla której:  $2^{-1} \cdot |Q(M(G^*))| = 3$ .

### 3. Metody przybliżone

Można dążyć do wyznaczenia macierzy  $M^N(G^*)$  za pomocą procedury sekwencyjnego *redukowania macierzy*  $M(G^*)$  (zastępowania wybranych (niezerowych) elementów macierzy  $M(G^*)$ , symbolem 0), polegającej na rozstrzygnięciu (w każdym kroku procedury), który z niezerowych elementów (w kolejno powstającej) macierzy, pozostawić jako jedyny element, w określonej kolumnie tej macierzy.

Jeżeli przez  $P$  oraz  $\mathfrak{R}$  oznaczymy odpowiednio element macierzy pozostawiany (w odpowiednim kroku procedury) w  $j$ -tej kolumnie tej macierzy oraz zbiór jej elementów zredukowanych, to formalnie, procedurę taką, można zapisać w postaci:

$$\begin{aligned} & (P = m_{i,j}) \wedge (m_{j,i} = 0) \Rightarrow (\mathfrak{R} = M_j \setminus \{m_{i,j}\}); \\ & (P = m_{i,j}) \wedge (m_{j,i} \neq 0) \Rightarrow (\mathfrak{R} = \{M_j \setminus \{m_{i,j}\}\} \cup \{m_{j,i}\}). \end{aligned}$$

Każdorazowe rozstrzygnięcie o tym, który z elementów macierzy pozostaje w określonej jej kolumnie, odbywa się zgodnie z następującymi regułami.

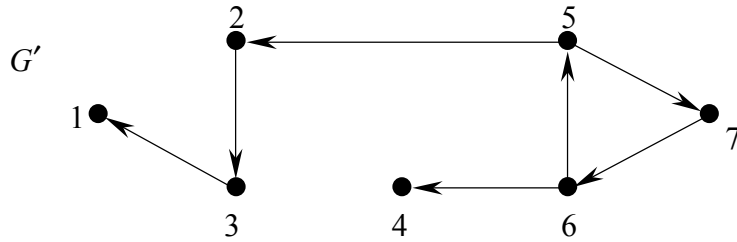
Reguła 1:  $(m_{i,j} \in M_j) \wedge (|M_j| = 1) \Rightarrow (P = m_{i,j}).$

Reguła 2:  $(m_{i,j} \in M_j^N) \wedge ((m_{j,i} \notin M_i^N) \vee (m_{j,i} \in M_i^N) \wedge (|M_i^N| > 1)) \Rightarrow$   
 $\Rightarrow (P = m_{i,j}).$

Reguła 3:  $(m_{i,j} \in M_j^N) \wedge (|M_j^N| = 1) \wedge (m_{j,i} \in M_i^N) \wedge (|M_i^N| = 1) \Rightarrow$   
 $\Rightarrow ((m(M_j \setminus \{m_{i,j}\}) - m_{i,j} \geq m(M_i \setminus \{m_{j,i}\}) - m_{j,i}) \Rightarrow (P = m_{i,j})).$

Procedura redukowania macierzy  $M(G^*)$  zgodnie z powyższymi regułami, nie gwarantuje wyznaczenia struktury najtańszej.

$$M'(G^*) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$



**Rys. 3. Macierz  $M'(G^*)$  uzyskano z macierzy  $M(G^*)$  (rys. 2) po sekwencji  $P : m_{5,7}; m_{3,1}; m_{2,3}; m_{5,2}; m_{6,5}; m_{6,4}; m_{7,6}$  pozostawiania (zgodnie z regułami 1, 2 i 3) elementów macierzy  $M(G^*)$  ( $G'$  - struktura odpowiadająca macierzy  $M'(G^*)$ )**

Dla przykładu, można upewnić się, że sekwencja  $P : m_{5,7}; m_{3,1}; m_{2,3}; m_{5,2}; m_{6,5}; m_{6,4}; m_{7,6}$  pozostawiania (zgodnie z regułami 1, 2 i 3) elementów macierzy  $M(G^*)$ , przedstawionej na rys.2, wyznacza macierz



$M'(G^*)$  (rys.3), dla której  $K(M'(G^*)) = 22$  natomiast  $K(M_1^N(G^*)) = 21$  (rys. 2).

Rozpatrzmy inny sposób wyznaczania zbioru quasi-najtańszych, 1-optimalnych struktur opiniowania diagnostycznego.

Niech  $M^z(M(G^*))$  oznacza macierz uzyskaną z macierzy  $M(G^*)$  w taki sposób, że

$$(m_{i,j} = 0) \Rightarrow (m_{i,j}^z = 0)$$

oraz

$$(m_{i,j} \neq 0) \Rightarrow (m_{i,j}^z = m_{i,j} - m(M_j) + \Delta(m_{j,i}, m(M_i)) + 1) \quad (5)$$

gdzie

$$\Delta(m_{j,i}, m(M_i)) = m(\{M_i\} \setminus \{m_{j,i}\}) - m_{j,i}$$

jeżeli

$$(m_{j,i} = m(M_i)) \wedge (|M_i^N| = 1)$$

oraz

$$\Delta(m_{j,i}, m(M_i)) = 0$$

w przypadku przeciwnym.

Niech  $M_{p+1}^z(M(G^*))$  oznacza macierz uzyskaną, w analogiczny (do powyższego) sposób, z macierzy  $M_p^z(M(G^*))$  ( $p \geq 1$ ,  $M_1^z(M(G^*)) = M^z(M(G^*))$ ), to jest  $M_{p+1}^z(M(G^*)) = M^z(M_p^z(M(G^*)))$ , a  $M_{p,j}^z(M(G^*))$  - zbiór niezerowych elementów  $j$ -tej kolumny macierzy  $M_p^z(M(G^*))$ .

Z zależności (5) wynika, że

$$\exists p \geq 1 \quad \forall j \in I : m(M_{p,j}^z(G^*)) = 1. \quad (6)$$

Niech  $M^1(M_p^z(M(G^*)))$  oznacza macierz utworzoną z macierzy  $M_p^z(M(G^*))$  spełniającej zależność (6), po zredukowaniu (do wartości równej 0) elementów o wartości większej od 1.

Zauważmy, że zależność (5) wyraża „lokalny” przyrost uogólnionego kosztu macierzy  $M^N(G^*)$  spowodowany wybraniem elementu  $m_{i,j}$  jako jedynego elementu w  $j$ -tej kolumnie tej macierzy.

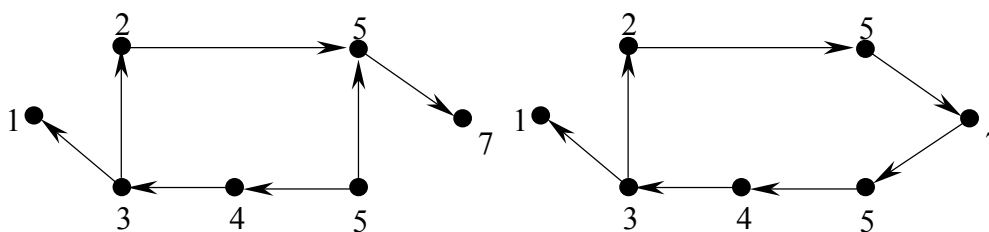
Tak więc, każda taka macierz utworzona z macierzy  $M^1(M_p^z(M(G^*)))$  przez zredukowanie niektórych elementów o wartości równej 1, która jest macierzą przeciwsymetryczną zawierającą w każdej kolumnie dokładnie jeden element o wartości równej 1, uważana jest za macierz przejść quasi-najtańszego 1-optymalnego grafu opiniowania diagnostycznego.

Dla przykładu (rys.4):  $M' = M^z(M(G^*))$  dla macierzy  $M(G^*)$  z rys.1 oraz  $M'' = M^z(M')$  przy czym macierz  $M''$  spełnia zależność (6).

Tak więc, macierz  $M''$  „indukuje” dwie quasi-najtańsze struktury (względem struktury  $G^*$  z rys.1), które przedstawione są na rys.5.

$$M' = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \quad M'' = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

**Rys. 4. Macierze  $M' = M^z(M(G^*))$  i  $M'' = M^z(M')$  wyznaczone (zgodnie z zależnością (5)) dla macierzy  $M(G^*)$  z rys. 1**



Rys.5. Struktury quasi-najtańsze względem struktury  $G^*$  z rys. 1

Dalej przekonamy się, że struktury przedstawione na rys. 5 są jedynymi, najtańszymi strukturami względem struktury  $G^*$  z rys. 1.

#### 4. Metoda dokładna

Struktura najtańsza jest strukturą optymalną, a więc dokładne wyznaczenie struktury najtańszej polega na znalezieniu w zbiorze struktur optymalnych, struktury najtańszej. Nie oznacza to, że należy określić uogólniony koszt każdej (możliwej) struktury optymalnej bowiem można podać reguły rozstrzygające o tym, które ze struktur optymalnych mogą być (albo nie) strukturą najtańszą.

Dla przykładu, struktura z rys.1 ma 34 struktury 1-optymalne, a przekonamy się, że wystarczy rozpatrzeć tylko 4 z nich, aby wyznaczyć (jedyne istniejące) dwie struktury najtańsze.

Niech  $C(G^*)$  oznacza zbiór cykli zorientowanych rzędu co najmniej trzeciego, istniejących w grafie  $G^*$ , a  $E(c)$  oraz  $U(c)$  (odpowiednio)- zbiór węzłów oraz łuków cyklu  $c$  ( $c \in C(G^*)$ ).

Cykl  $c$  będziemy przedstawiać jako ciąg cykliczny  $c = (i_1, i_2, \dots, i_{|E(c)|})$  indeksów kolejnych węzłów cyklu.

Mówimy, że cykle  $c'$  i  $c''$  są *wzajemnie silnie niezależne*, jeżeli  $E(c') \cap E(c'') = \emptyset$ .

Dla przykładu, graf  $G^*$  (rys.1) ma dziewięć następujących cykli zorientowanych:  $c_1 = (1, 2, 3)$ ;  $c_2 = (1, 3, 2)$ ;  $c_3 = (2, 3, 4, 6, 5)$ ;  $c_4 = (2, 5, 6, 4, 3)$ ;

$c_5 = (5, 7, 6)$ ;  $c_6 = (1, 2, 5, 6, 4, 3)$ ;  $c_7 = (1, 3, 4, 6, 5, 2)$ ;  $c_8 = (2, 5, 7, 6, 4, 3)$  oraz  $c_9 = (1, 2, 5, 7, 6, 4, 3)$  przy czym tylko cykle  $c_1$  i  $c_5$  oraz  $c_2$  i  $c_5$  są cyklami wzajemnie silnie niezależnymi. Zauważmy, że cykl  $c_9$  jest jedynym cyklem Hamiltona.

Zbiór  $C(G^*)$  można wyznaczyć za pomocą znanych (z teorii grafów ([4], [11])) metod algebraicznych. Nie ma więc potrzeby omawiania tych metod. Zauważmy tylko, że w omawianym przykładzie, zbiór cykli  $\{c_1, \dots, c_5\}$  stanowi bazę cykli zbioru  $C(G^*)$ , a każdy z cykli zbioru  $\{c_6, \dots, c_9\}$  jest odpowiednią kombinacją liniową niektórych cykli tej bazy.

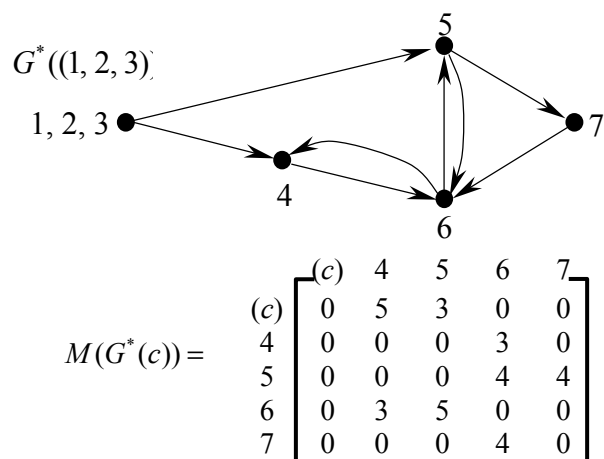
Oczywiście, najtańszy graf  $G^N(G^*)$  może być grafem o  $p$  ( $1 \leq p \leq r$ ) składowych spójności ( $r$ - maksymalna liczebność zbioru cykli wzajemnie silnie niezależnych).

Rozpatrzmy wyznaczanie struktury najtańszej w klasie struktur spójnych.

Kondensacją grafu  $G^*$  do podgrafu  $\langle E(c) \rangle_{G^*}$  będziemy nazywać graf  $G^*(c)$ , utworzony z grafu  $G^*$  przez:

- zastąpienie podgrafu  $\langle E(c) \rangle_{G^*}$  pojedynczym węzłem  $e_c$ ;
- usunięcie łuków należących do zbioru  $\{u' \in U^* : e^k(u') \in E(c)\}$  ( $e^k(u')$ - węzeł, do którego dochodzi łuk  $u'$ ) oraz usunięcie, poza dokładnie jednym (dowolnym) z najtańszych, łuków z każdego takiego zbioru  $\{u'' \in U^* : (e^p(u'') \in E(c)) \wedge (e^k(u'') \in e^*)\}$  ( $e^p(u'')$ - węzeł z którego wychodzi łuk  $u''$ ), że  $e^* \in E \setminus E(c)$  (rys. 6).

Macierz  $M(G^*(c))$  uzyskujemy, w prosty sposób, przez: wykreślenie z macierzy  $M(G^*)$  wierszy i kolumn o numerach odpowiadających indeksom elementów zbioru  $E(c)$ ; uzupełnienie (tak powstałej macierzy) początkowym wierszem i początkową kolumną zerową, etykietując je symbolem  $(c)$  oraz przypisując elementom pierwszego wiersza macierzy, wartości  $m_{c,j} = \min\{m_{i,j} \in M(G^*) (m_{i,j} \neq 0) : i \in I(E(c))\}$  ( $j \notin I(E(c))$ ), gdzie  $I(E(c))$  oznacza zbiór numerów odpowiadających indeksom elementów zbioru  $E(c)$ .



Rys. 6. Graf  $G^*(c)$  ( $c = (1, 2, 3)$ ) oraz macierz  $M(G^*(c))$  grafu  $G^*$  (przedstawionego na rys. 1)

Twierdzenie 2. Każda taka przeciwsymetryczna macierz częściowa  $M'$  macierzy  $M(G^*(c))$ , której każda kolumna, z wyjątkiem kolumny  $(c)$ , zawiera dokładnie jeden element niezerowy oraz graf  $G(M')$  jest grafem spójnym, przedstawia *dendryt ekonomiczny* (dendryt o łukach opisanych przez uogólniony koszt), którego korzeniem jest węzeł  $e_c$ .

D o w ó d: Ponieważ graf  $G(M')$  jest takim spójnym grafem Berge'a bez pętli, który ma dokładnie jeden węzeł  $e_c$  bez poprzedników ( $\Gamma^{-1}(e_c) = \emptyset$ ), a każdy węzeł zbioru  $E(G(M')) \setminus \{e_c\}$  ma dokładnie jeden poprzednik, to jest dendrytem ekonomicznym, którego korzeniem jest węzeł  $e_c$ .

Oczywiście, zbiór grafów częściowych grafu  $G^*(c)$  ( $c \in C(G^*)$ ), które są dendrytami ekonomicznymi o korzeniu  $e_c$ , nie jest zbiorem pustym, bowiem (z założenia) graf  $G(G^*)$  jest 1-diagnozowalnym grafem opiniowania diagnostycznego, a więc i zbiór spójnych grafów częściowych grafu  $G(G^*)$ , które są 1- optymalnymi grafami opiniowania diagnostycznego, nie jest zbiorem pustym.

Tak więc, jeżeli przez  $G^N(c, G^*)$  oznaczymy najtańszy, spójny graf częściowy grafu  $G^*$ , który jest grafem 1-optymalnym zawierającym cykl  $c$ , a przez  $D^N(G^*(c))$  - najtańszy graf częściowy grafu  $G^*(c)$ , który jest dendrytem ekonomicznym o korzeniu  $e_c$ , to

$$K(G^N(c, G^*)) = K(c) + K(D^N(G^*(c))), \quad (7)$$

gdzie:

$$K(c) = \sum_{u \in U(c)} K(u);$$

$$K(D^N(G^*(c))) = \sum_{u \in U(D^N(G^*(c)))} K(u) \quad (U(G^*(c)) \neq \emptyset)$$

oraz

$$(U(G^*(c)) = \emptyset) \Rightarrow (K(D^N(G^*(c))) = 0).$$

Wartość  $K(D^N(G^*(c)))$  ( $U(G^*(c)) \neq \emptyset$ ) określamy albo przez wyznaczenie (zgodnie z twierdzeniem 2) takiej przeciwsymetrycznej macierzy częściowej macierzy  $M(G^*(c))$ , której każda kolumna zawiera dokładnie jeden element niezerowy, a suma wartości tych elementów jest wartością minimalną i sprawdzenie czy graf opisany, odpowiadający takiej macierzy, jest grafem spójnym albo przez wybranie ze zbioru ekonomicznych karkasów grafu  $G^*(c)$ , najtańszego dendrytu ekonomicznego o korzeniu  $e_c$ .

Wiadomo, że karkas grafu  $G'$  można wyznaczyć przez wykreślenie z binarnej macierzy incydencji  $M(G')$  grafu  $G'$ ,  $\lambda(G')$  ( $\lambda(G')$  - liczba cyklomatyczna grafu  $G'$ ) kolumn i sprawdzeniu czy tak powstała macierz  $M(G'')$ , jest binarną macierzą incydencji spójnego grafu  $G''$ . Jeżeli tak, to graf  $G''$  jest karkasem grafu  $G'$ .

Aby sprawdzić czy macierz  $M(G'')$  jest binarną macierzą incydencji spójnego grafu, należy wykreślić z niej takie dwie kolumny, których iloczyn logiczny nie jest wektorem zerowym oraz dopisać kolumnę, która jest sumą logiczną kolumn wykreślonych. Z tak uzyskaną macierzą należy postąpić analogicznie. Jeżeli w wyniku dowolnej sekwencji takiego postępowania,

dopisywana kolumna będzie zawierać same jedynki, to graf  $G''$  jest grafem spójnym.

Na przykład, można przekonać się, że dla grafu  $G^*(c_1)$  ( $c_1 = (1, 2, 3)$ ) przedstawionego na rys.6 istnieje 21 karkasów, z których tylko 6 jest dendrytami o korzeniu  $e_{c_1}$ , przy czym uogólniony koszt najtańszego z tych dendrytów równa się 14.

Tak więc, w najgorszym przypadku, powtarzając rozwiązanie dla wszystkich cykli ze zbioru  $C(G^*)$ , wyznaczamy najtańszy poszukiwany graf  $G^N(G^*)$ , w klasie grafów spójnych.

W wielu przypadkach, zbiór cykli wśród których należy poszukiwać takiego rozwiązania, można ograniczyć do zbioru  $C'$  ( $C' \subset C(G^*)$ ).

Oczywiście

$$[(E(c') = E(c'')) \wedge (K(c') > K(c''))] \Rightarrow [c' \notin C']. \quad (8)$$

Zauważmy, że kres dolny  $K_{inf}$  oraz kres górny  $K_{sup}$  kosztu dendrytu  $D(G^*(c))$  można określić sumując po kolumnach macierzy  $M(G^*(c))$ , wartości -odpowiednio- najtańszego (niezerowego) oraz najdroższego elementu w każdej kolumnie macierzy, to jest

$$K_{inf}(D(G^*(c))) = \sum_{j \in I(M(G^*(c)))} K_{min,j}(M(G^*(c)))$$

oraz

$$K_{sup}(D(G^*(c))) = \sum_{j \in I(M(G^*(c)))} K_{max,j}(M(G^*(c)))$$

gdzie:

$$K_{min,j}(M(G^*(c))) = \min\{m_{i,j} \in M(G^*(c)), m_{i,j} \neq 0 : \\ : i \in I(M(G^*(c)))\} \quad (j \in I(M(G^*(c)));$$

$$K_{max,j}(M(G^*(c))) = \max\{m_{i,j} \in M(G^*(c)) : i \in I(M(G^*(c)))\} \quad (j \in I(M(G^*(c))),$$

a  $I(M(G^*(c)))$  oznacza zbiór indeksów macierzy  $M(G^*(c))$ .

Oczywiście

$$[K(c') + K_{inf}(D(G^*(c')))] > [K(c'') + K_{sup}(D(G^*(c'')))] \Rightarrow [c' \notin C']. \quad (9)$$

Dla przykładu, w tabelicy 1 zestawiono wartości  $K(c)$  dla wszystkich cykli  $c$  ( $c \in C(G^*)$ ) grafu  $G^*$  (przedstawionego na rys. 1) oraz (odpowiadające dendrytom  $D(G^*(c))$ ) wartości  $K_{inf}$  i  $K_{sup}$ .

**Tabela 1**

i	$c_i$	$K(c_i)$	$K_{inf}$	$K_{sup}$
1	(1,2,3)	9	13	18
2	(1,3,2)	8	13	18
3	(2,3,4,6,5)	17	6	6
4	(2,5,6,4,3)	15	6	6
5	(5,7,6)	13	8	16
6	(1,2,5,6,4,3)	19	4	4
7	(1,3,4,6,5,2)	20	4	4
8	(2,5,7,6,4,3)	19	2	2
9	(1,2,5,7,6,4,3)	23	0	0

Z tabelicy 1 oraz z zależności (7), (8) i (9) wynika, że najtańsza struktura (w klasie struktur spójnych) nie zawiera cyklu należącego do zbioru  $\{c_1, c_3, c_6, c_7, c_9\}$  oraz że  $K(G^N(c_4, G^*)) = K(G^N(c_8, G^*)) = 21$ .

Ponieważ  $E(c_2) = E(c_1)$ , to  $G^*(c_2) = G^*(c_1)$ , natomiast z macierzy  $M(G^*(c_1))$  (rys. 6) i twierdzenia 2 wynika (bezpośrednio), że  $K(D^N(G^*(c_1))) > 13$ , a więc żadna ze struktur zawierających cykl  $c_2$ , nie jest strukturą najtańszą. Analogicznie, wyznaczając macierz  $M(G^*(c_5))$ , otrzymujemy, że  $K(D^N(G^*(c_5))) > 8$ .



Tak więc, w klasie struktur spójnych istnieją tylko dwie struktury najtańsze (zawierające cykl  $c_4$  lub cykl  $c_8$  (rys. 5)).

Poszukiwanie struktur najtańszych w klasie struktur o wielu składowych spójności, sprowadza się do dekomponowaniu grafu  $G^*$  (za pomocą *przekrojów minimalnych*) na wszystkie możliwe grafy, w których każda składowa spójności zawiera (co najmniej) jeden cykl ze zbioru  $C(G^*)$ , i wyznaczaniu takiego grafu częściowego, każdej z tych składowych spójności, który jest najtańszym, 1-diagnozowalnym grafem opiniowania diagnostycznego.

Zauważmy, że dla grafu z rys.1 najtańsze rozwiązanie nie należy do klasy struktur o wielu składowych spójności, bowiem mogą istnieć tylko struktury o dwu składowych spójności (zawierające (odpowiednio) cykle  $c_1$  i  $c_5$  lub  $c_2$  i  $c_5$ ), a koszt najtańszego z takich rozwiązań jest większy od  $K(c_2) + K(c_5) = K(G^N(G^*))$  (tab.1).

## 5. Metoda przeliczania zaetykietowanych struktur 1-optimalnych

Pokażemy jak można określić liczbę  $S^*(k)$  spójnych oraz liczbę  $R^*(k)$  dowolnych (niekoniecznie spójnych) zaetykietowanych 1-optimalnych struktur opiniowania diagnostycznego rzędu  $k$  i wyznaczymy te liczby dla  $k \leq 8$ .

Niech  $\Lambda^c(k)$  oznacza zbiór takich rozkładów  $\lambda$  ( $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_c)$ ) liczby naturalnej  $k$  ( $k \geq c$ ) na  $c$  składników prostych, że  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_c \geq 1$  a  $M(\lambda)$  - macierz charakterystyczną rozkładu  $\lambda$ , to jest taką macierz wymiaru  $(2 \times r(\lambda))$  ( $r(\lambda)$  - liczba różnych wartości składników rozkładu  $\lambda$ ), że  $m_{1,1}(\lambda), \dots, m_{1,r(\lambda)}(\lambda)$  jest malejącym ciągiem wartości jakie przyjmują składniki rozkładu  $\lambda$ , natomiast  $m_{2,j}(\lambda)$  ( $1 \leq j \leq r(\lambda)$ ) jest liczbą składników rozkładu  $\lambda$  o wartości  $m_{1,j}(\lambda)$  ([1]).

Oczywiście

$$m_{2,1}(\lambda) + \dots + m_{2,r(\lambda)} = c$$

oraz

$$m_{1,1}(\lambda) \cdot m_{2,1}(\lambda) + \dots + m_{1,r(\lambda)} \cdot m_{2,r(\lambda)} = k.$$

Zauważmy, że liczba  $S^*(\lambda)$  ( $\lambda \in \Lambda^c(k)$ ) rozważanych struktur zawierających  $r(\lambda)$  rodzin dendrytów, z których każda ma  $m_{2,i}(\lambda)$  dendrytów rzędu  $m_{1,i}(\lambda)$ , jest iloczynem:

- liczby  $Z(\lambda)$  sposobów rozdzielania etykiet na poszczególne rodziny dendrytów;
- liczb  $P(m_{1,i}(\lambda), m_{2,i}(\lambda))$  ( $1 \leq i \leq r(\lambda)$ ) sposobów rozdzielania etykiet między poszczególne dendryty w ramach każdej rodziny dendrytów; liczb  $(D^*(m_{1,i}(\lambda)))^{m_{2,i}(\lambda)}$  wszystkich zaetykietowanych dendrytów rzędu  $m_{1,i}(\lambda)$  ( $1 \leq i \leq r(\lambda)$ ) oraz liczby  $(c-1)!$  sposobów utworzenia cyklu zorientowanego rzędu  $c$  (zawierającego  $c$  korzeni dendrytów).

Tak więc:

$$S^*(k) = \sum_{c=3}^k \sum_{\lambda \in \Lambda^c(k)} (c-1)! Z(\lambda) \times \prod_{i=1}^{r(\lambda)} P(m_{1,i}(\lambda), m_{2,i}(\lambda)) \cdot (D^*(m_{1,i}(\lambda)))^{m_{2,i}(\lambda)}. \quad (10)$$

Oczywiście:

jeżeli  $r(\lambda) = 1$ , to  $Z(\lambda) = 1$ ;

jeżeli  $r(\lambda) = 2$ , to  $Z(\lambda) = \binom{k}{m_{1,1}(\lambda) \cdot m_{2,1}(\lambda)}$ ;

jeżeli  $r(\lambda) \geq 3$ , to

$$Z(\lambda) = \binom{k}{m_{1,1}(\lambda) \cdot m_{2,1}(\lambda)} \times \prod_{j=2}^{r(\lambda)-1} \binom{k - (m_{1,1}(\lambda) \cdot m_{2,1}(\lambda) + \dots + m_{1,j-1}(\lambda) \cdot m_{2,j-1}(\lambda))}{m_{1,j}(\lambda) \cdot m_{2,j}(\lambda)}.$$

Posługując się kombinatoryką matematyczną, liczbę  $P(a, b)$  podziałów  $a \cdot b$  liczb na  $b$  podzbiorów o jednakowej liczebności równej  $a$ , możemy wyznaczyć z zależności

$$P(a, 1) = P(1, b) = 1$$

oraz (dla  $a \geq 2, b \geq 2$ )

$$P(a, b) = \left[ \sum_{s=1}^{\lfloor \frac{a}{2} \rfloor} \binom{a-1}{s} a^{2s} - \delta(a) \cdot 2^{\frac{a-1}{2}} \cdot \binom{a-1}{\frac{a-1}{2}} \cdot (b-1) + 1 \right] \cdot P(a, b-1)$$

przy czym  $\delta(a) = 1$ , jeżeli liczba  $a$  jest liczbą parzystą oraz  $\delta(a) = 0$  w przypadku przeciwnym.

W szczególności, dla  $b \geq 2$  otrzymujemy:

$$P(2, b) = (2 \cdot (b-1) + 1) \cdot P(2, b-1);$$

$$P(3, b) = (9 \cdot (b-1) + 1) \cdot P(3, b-1);$$

$$P(4, b) = (34 \cdot (b-1) + 1) \cdot P(4, b-1).$$

Z teorii grafów ([3], [4]) wiadomo, że liczba  $D^*(d)$  zaetykietowanych dendrytów rzędu  $d$ , równa się  $d \cdot d^{d-2}$ .

Tak więc, z zależności (10) możemy wyznaczyć szereg tworzący spójnych zaetykietowanych 1- optymalnych struktur opiniowania diagnostycznego, który (dla pierwszych ośmiu członów) ma postać

$$S^*(x) = 2x^3 + 30x^4 + 420x^5 + 7320x^6 + 136590x^7 + 2873136x^8 + \dots$$

Łatwo zauważyć, że liczba  $R^*(k)$  dowolnych (niekoniecznie spójnych) zaetykietowanych 1- optymalnych struktur opiniowania diagnostycznego rzędu  $k$ , określona jest przez zależność:

$$R^*(k) = \sum_{\varphi=1}^{\varphi:3-\varphi \leq k} \sum_{\lambda \in \Lambda^{\varphi}(k) : \lambda_{\varphi} \geq 3} Z(\lambda) \times \prod_{i=1}^{r(\lambda)} P(m_{1,i}(\lambda), m_{2,i}(\lambda)) \cdot (S^*(m_{1,i}(\lambda)))^{m_{2,i}(\lambda)}. \quad (11)$$

Szereg tworzący  $R^*(x)$  (dla pierwszych ośmiu członów) ma więc postać:

$$R^*(x) = 2x^3 + 30x^4 + 420x^5 + 7360x^6 + 138690x^7 + 2951676x^8 + \dots$$

Oczywiście, metoda przeliczania niezaetykietowanych 1- optymalnych struktur opiniowania diagnostycznego (przedstawiona w pracy [10]) jest bardziej złożona, od metody przeliczania takich struktur zaetykietowanych (z uwagi na konieczność uwzględniania występowania odwzorowań automorficznych struktur).

Dla porównania, szeregi tworzące  $S(x)$  spójnych oraz  $R(x)$  dowolnych (niekoniecznie spójnych), niezaetykietowanych, 1- optymalnych struktur opiniowania diagnostycznego (dla pierwszych trzynastu wyrazów) mają postać:

$$S(x) = x^3 + 2x^4 + 5x^5 + 15x^6 + 40x^7 + 118x^8 + 341x^9 + 970x^{10} + 2792x^{11} + 7927x^{12} + 22540x^{13} + \dots$$

oraz

$$R(x) = x^3 + 2x^4 + 5x^5 + 16x^6 + 42x^7 + 126x^8 + 367x^9 + 1057x^{10} + 3073x^{11} + 9208x^{12} + 25484x^{13} + \dots$$

## 6. Podsumowanie

Wyznaczanie najtańszej 1- diagnostycznej struktury opiniowania diagnostycznego, naraża na kłopoty tylko wtedy, gdy istnieje taka para elementów systemu, że koszt testowania jednego z nich przez drugi, jest najniższy z kosztów testowania go przez inne elementy systemu.

Tym trudniej jest wyznaczyć strukturę najtańszą, im liczebność zbioru takich par elementów systemu jest większa.

Możliwości wzajemnego testowania się elementów systemu i uogólnione koszty takich testowań, wygodnie jest przedstawiać w postaci macierzy kosztów, równoważnej opisanemu (ekonomicznemu) 1 – dianozowalnemu grafowi opiniowania diagnostycznego (p.2), a w przybliżonych metodach wyznaczania struktury quasi-najtańszej (p.3) oraz w dokładnych metodach wyznaczania struktury najtańszej (p.4) - wykorzystać działania na takiej macierzy.

Przybliżone metody wyznaczania struktury quasi-najtańszej są (stosunkowo) proste i dają rezultaty, które (w wielu przypadkach) można uznać za wystarczające. Metody te łatwo poddają się komputerowej realizacji.

Dokładna metoda wyznaczania struktury najtańszej jest metodą (stosunkowo) złożoną i polega na sukcesywnym redukowaniu zbioru, do którego należy rozwiązanie. Komputerowa realizacja metody (oby miała miejsce) będzie więc mieć charakter systemu eksperckiego. Zaletą metody jest możliwość wyznaczenia wszystkich struktur najtańszych.

Znajomość liczby zaetykietowanych, 1- optymalnych struktur opiniowania diagnostycznego określonego rzędu (p.5), pozwala zorientować się jaka jest liczebność zbioru struktur optymalnych, wśród których poszukiwana jest struktura najtańsza.

#### **Literatura:**

- [1] Andrews G.E.: *The Theory of Partitions*, London, Addison-Wesley Publishing Company, 1976.
- [2] Barsi F., Grandoni F., Maestrini P.: *A Theory of Diagnosability of Digital Systems*, IEEE Trans. on Comput. 6, 1976, pp. 585-593.
- [3] Harary F., Palmer E.: *Graphical Enumeration*, New York and London, Academic Press, 1973.
- [4] Korzan B.: *Elementy teorii grafów i sieci*, WNT, Warszawa, 1978.
- [5] Krawczyk H.: *Analiza i synteza samodiagnozowalnych systemów komputerowych*, Zeszyty Naukowe Politechniki Gdańskiej, Elektronika nr 64, Gdańsk, 1987.
- [6] Kulesza R.: *Niektóre własności grafów opiniowania diagnostycznego*, Krajowy Kongres Metrologii, Gdańsk'98, 1998, tom 5, s. 81-88.
- [7] Kulesza R., Wach A.K.: *Wyznaczanie m-diagnozowalnych grafów opiniowania diagnostycznego*, Krajowy Kongres Metrologii, Gdańsk'98, 1998, tom 5, s. 25-32.
- [8] Kulesza R., Wach A.K.: *The Determination of a 2-optimal Digraphs Set for a One-Step Diagnosis of System*, 9<sup>th</sup> IMECO TC-10, International Conference on Technical Diagnostics, 22-24 September 1999, Wrocław, Poland, pp. 153-158.

- [9] Kulesza R.: *Podstawy diagnostyki sieci logicznych i komputerowych*, Instytut Automatyki i Robotyki, Wydział Cybernetyki Wojskowej Akademii Technicznej, Warszawa, 2000, ss. 222.
- [10] Kulesza R.: *Metoda przeliczania 1-optymalnych struktur opiniowania diagnostycznego*, Biuletyn Instytutu Automatyki i Robotyki WAT, 2001, nr 16, s. 19-34.
- [11] Kulikowski J.L.: *Zarys teorii grafów*, PWN, Warszawa, 1986.

*Recenzent: prof. dr hab. inż. Lesław Będkowski*

*Praca wpłynęła do redakcji 20.04.2002*