



## Nieliniowy model wyrzutni przeciwlotniczych pocisków raketowych umieszczonej na pokładzie okrętu\*

Zbigniew DZIOPA, Zbigniew KORUBA

*Politechnika Świętokrzyska, Al.1000-lecia PP 7, 25-314 Kielce*

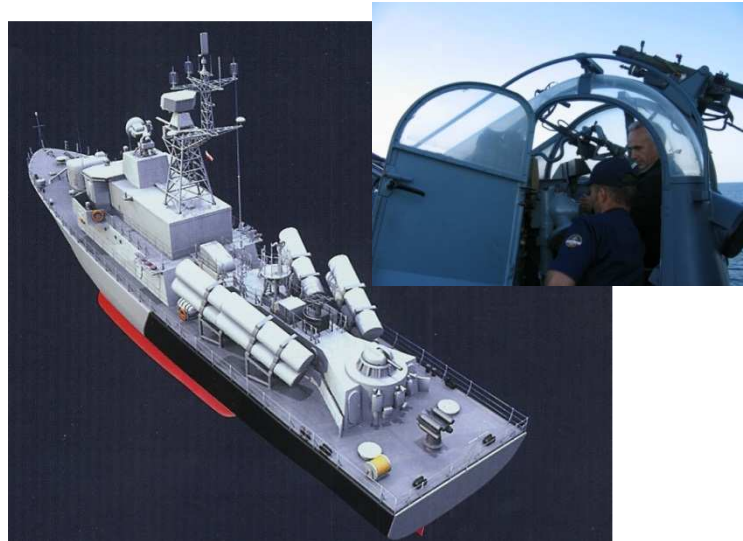
**Streszczenie.** W pracy przedstawione są elementy sformułowanego modelu wyrzutni przeciwlotniczych pocisków raketowych umieszczonej na pokładzie okrętu. Ruch zestawu rozpatrywany jest w trójwymiarowej przestrzeni Euklidesa i w jednorodnym polu grawitacyjnym. Rozważane są drgania o dużych wartościach przemieszczeń uogólnionych poszczególnych obiektów. Opracowany model okrętowej wyrzutni raketowej w ogólnym przypadku ma trzynaście stopni swobody.

**Słowa kluczowe:** mechanika, wyrzutnia okrętowa, przeciwlotniczy pocisk raketowy, model fizyczny i matematyczny

### 1. WSTĘP

Rozpatrywanym obiektem jest przeciwlotnicza wyrzutnia raketowa posadowiona na pokładzie okrętu klasy niewielki kuter raketowy. Przykład zestawu poddanego modelowaniu przedstawiony jest na rysunku 1. Wyrzutnia to układ składający się z wieży, na której zamontowana jest prowadnica rurowa. Wewnątrz prowadnicy umieszczony jest pocisk raketowy bliskiego zasięgu samonaprowadzający się na cel metodą pasywną.

\* Artykuł został opracowany na podstawie referatu prezentowanego podczas IX Międzynarodowej Konferencji Uzbrojeniowej nt. „Naukowe aspekty techniki uzbrojenia i bezpieczeństwa”, Pułtusk, 25-28 września 2012 r.



Rys. 1. Przeciwlotniczy zestaw raketowy posadowiony na pokładzie okrętu

Fig. 1. Antiaircraft missile set built on the deck of the ship

W chwili opuszczania prowadnicy przez rakietę determinowane są początkowe kinematyczne parametry lotu [2]. Dynamika układu okręt – wyrzutnia – rakietę wpływa na kształtowanie charakterystyki tych parametrów. Cechą charakterystyczną przeciwlotniczych pocisków raketowych bliskiego zasięgu jest konieczność wypracowania w bardzo krótkim okresie czasu takiej trajektorii lotu, która zagwarantuje trafienie w cel. Niebagatelną rolę w kształtowaniu oczekiwanej trajektorii lotu odgrywają warunki panujące w trakcie startu rakiety z wyrzutni [5]. Niekorzystny ich stan może uniemożliwić osiągnięcie celu.

Przyczyną zaburzeń generowanych w układzie jest wymuszenie wynikające z warunków panujących na morzu, proces sterowania wyrzutnią zmierzający do przechwycenia celu i jego śledzenia oraz start pocisku z wyrzutni. Możliwość przeprowadzenia wszechstronnej analizy skutecznego wystrzelenia pocisku podczas oddziaływania zaburzeń wymaga sformułowania modelu dynamicznego rozpatrywanego układu [6, 9]. Celem pracy jest wyznaczenie zależności analitycznych reprezentujących model dynamiczny startu rakiety z wyrzutni umieszczonej na pokładzie okrętu [8].

## 2. ELEMENTY MODELU FIZYCZNEGO WYRZUTNI OKRĘTOWEJ

Model fizyczny okrętowego przeciwlotniczego zestawu raketowego składa się z następujących, podstawowych obiektów jak na rysunku 2:

- okrętu
- wyrzutni składającej się z platformy i prowadnicy
- rakiety wraz z giroskopowym układem śledzenia celu
- celu.

Każdy z obiektów stanowi niezbędny składnik w realizacji podstawowego zadania postawionego przed zestawem przeciwlotniczym, jakim jest zniszczenie celu przez wystrzeloną ракетę. Obiekty są złożonymi układami spełniającymi określone funkcje. Oddziaływanie obiektów na siebie związane jest z emisją zaburzeń generowanych przez poszczególne ich elementy składowe. Praca zestawu to nieustanna koincydencja zachodzących procesów.

W przypadku ogólnym rozpatrywany układ nie ma budowy symetrycznej względem podłużnej płaszczyzny pionowej, przechodzącej przez środek masy układu. Symetria dotyczy niektórych wymiarów geometrycznych oraz właściwości elementów podatnych. Układ elementów inercyjnych w ogólnym przypadku odbiega od takiej symetrii. Wyrzutnia może obracać się względem pokładu okrętu. Oznacza to, że względem pokładu okrętu obraca się platforma, a wraz z nią przemieszcza się również prowadnica. Jednocześnie prowadnica może także obracać się względem platformy. Dodatkowo raketa podczas wystrzelenia realizuje ruch wzdłuż prowadnicy. Prowadzi to generalnie do asymetrii rozkładu mas względem pokładu okrętu. Wyrzutnia jest obiektem, którego charakterystyka bezwładności zależy od położenia celu względem zestawu przeciwlotniczego. Masa wyrzutni pozostaje stała, ale jej momenty bezwładności i momenty dewiacyjne zmieniają się. Rozważany układ sprowadzamy do postaci strukturalnego modelu o budowie dyskretnej, który opisuje zjawiska mające charakter oddziaływań mechanicznych.

Generalnie zbudowany model składa się z trzech brył sztywnych, jednego obiektu zmiennego w czasie, jednego punktu matematycznego, dwunastu elementów nieinercyjnych oraz dwóch układów sterowania. Założenie o nieodkształcalności składowych elementów wyrzutni wynika z przeprowadzonych badań doświadczalnych analogicznego układu. Analiza, przy użyciu szybkiej kamery, zachowania się wyrzutni podczas wystrzeliwania pocisków raketowych potwierdza zasadność uproszczenia modelu matematycznego. Pocisk raketowy traktowany jest jako obiekt zmienny w czasie. Zmianie podlega zarówno masa rakiety, jak i jej rozkład.

Zostały zdefiniowane niezbędne układy współrzędnych, które umożliwiają jednoznaczne określenie ruchów realizowanych przez poszczególne obiekty okrętowego zestawu przeciwlotniczego.



W związku z tym do określenia ruchu opracowanego modelu przyjęto trzynastę współrzędnych niezależnych:

a) wyrzutnia:

- dwie bryły sztywne:  $x, y, z, \psi, \vartheta, \varphi; \psi_v, \vartheta_v$

b) pocisk raketowy:

- jeden obiekt zmienny w czasie:  $\xi_p, \varphi_p$
- jedna bryła sztywna:  $\psi_G, \vartheta_G, \varphi_G$

Parametry opisujące elementy inercyjne sformułowanego modelu okrętowego zestawu przeciwlotniczego:

a) wyrzutnia:

$$m, I_x, I_y, I_z, I_{xy}, I_{yz}, I_{zx};$$

- dwie bryły sztywne:  $m_{pl}, I_{pl\xi'_p}, I_{pl\eta'_p}, I_{pl\zeta'_p};$   
 $m_{pr}, I_{pr\xi_p}, I_{pr\eta_p}, I_{pr\zeta_p}$

b) pocisk raketowy:

- jeden obiekt zmienny w czasie:  $m_p, I_{px_p}, I_{py_p}, I_{pz_p}$
- jedna bryła sztywna:  $m_K, I_{Kx_w}, I_{Ky_w}, I_{Kz_w}$

Parametry opisujące elementy nieinercyjne sformułowanego modelu okrętowego zestawu przeciwlotniczego:

a) wyrzutnia:

- dwanaście liniowych modeli Voigta–Kelvina:

$$\begin{array}{cccc} k_{11}, c_{11}; & k_{12}, c_{12}; & k_{13}, c_{13}; & k_{14}, c_{14} \\ k_{21}, c_{21}; & k_{22}, c_{22}; & k_{23}, c_{23}; & k_{24}, c_{24} \\ k_{31}, c_{31}; & k_{32}, c_{32}; & k_{33}, c_{33}; & k_{34}, c_{34}. \end{array}$$

### 3. ELEMENTY MODELU MATEMATYCZNEGO WYRZUTNI OKRĘTOWEJ

Na podstawie przyjętego modelu fizycznego opracowany został model matematyczny okrętowego przeciwlotniczego zestawu raketowego [3]. W niniejszej pracy zaprezentowane są otrzymane niektóre zależności analityczne, które opisują w sposób jednoznaczny dynamikę okrętowego zestawu przeciwlotniczego z pociskiem raketowym bliskiego zasięgu samonaprowadzającym się na cel. Ze względu na złożoną postać modelu matematycznego, nie mogą być przedstawione zależności analityczne w postaci rozwiniętej [4]. Rozważany układ sprowadzony został do postaci strukturalnego modelu o budowie dyskretnej, w związku z tym określony jest równaniami różniczkowymi o pochodnych zwyczajnych.

W niniejszej pracy przedstawione są elementy modelu matematycznego opisującego przypadek, dla którego:

- wyrzutnia realizuje sterowany ruch podstawowy mający na celu przechwycenie obiektu przeznaczonego do zestrzelenia rakieta
- rakieta startuje z wyrzutni.

Równania ruchu stanowią zasadniczy trzon zależności analitycznych opisujących działanie zestawu przeciwlotniczego. Równania ruchu wprowadzane są przy wykorzystaniu sformalizowanego aparatu matematycznego stosowanego w mechanice analitycznej [1, 7]. Zastosowano jedną z metod definiowanych w mechanice analitycznej w postaci równań Lagrange'a II rodzaju, zależność (1). Formalizm wynikający z równań Lagrange'a II rodzaju wymaga przygotowania funkcji, których argumentami są przemieszczenia uogólnione zmienne w czasie. W tym celu należy przygotować funkcje, które są jednoznacznie określone w mechanice i mają swoją interpretację fizyczną. Do tych funkcji zalicza się energię kinetyczną układu, energię potencjalną układu i zewnętrzne siły niepotencjalne działające na układ. Elementem składowym każdej z wymienionych funkcji są m.in. zależności kinematyczne reprezentowane przez położenie, prędkość i odkształcenie poszczególnych obiektów. Liczba otrzymanych równań ruchu wynika z liczby przyjętych współrzędnych niezależnych.

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial q_i} + \frac{\partial R_{ay}}{\partial \dot{q}_i} = Q_i \quad (1)$$

gdzie:

$q_i$  – niezależne współrzędne uogólnione określone w modelu fizycznym.

Energia kinetyczna okrętowego przeciwlotniczego zestawu raketowego jest sumą energii wyrzutni, pocisku raketowego i giroskopu:

$$T = T_w + T_p + T_G \quad (2)$$

$$T_w = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m \dot{y}^2 + \frac{1}{2} m \dot{z}^2 + \frac{1}{2} I_x \omega_x^2 + \frac{1}{2} I_y \omega_y^2 + \frac{1}{2} I_z \omega_z^2 - I_{xy} \omega_x \omega_y - I_{yz} \omega_y \omega_z - I_{zx} \omega_z \omega_x \quad (3)$$

$$T_p = \frac{1}{2} m_p V_{px}^2 + \frac{1}{2} m_p V_{py}^2 + \frac{1}{2} m_p V_{pz}^2 + \frac{1}{2} I_{px_p} \omega_{px_p}^2 + \frac{1}{2} I_{py_p} \omega_{py_p}^2 + \frac{1}{2} I_{pz_p} \omega_{pz_p}^2 \quad (4)$$

$$T_G = \frac{1}{2} I_{Kx_w} \omega_{Gx_w} + \frac{1}{2} I_{Ky_w} \omega_{Gy_w} + \frac{1}{2} I_{Kz_w} \omega_{Gz_w} \quad (5)$$

Energia potencjalna okrętowego zestawu przeciwlotniczego jest sumą energii potencjalnej sprężystości i energii potencjalnej pola sił grawitacyjnych:

$$U = U_s + U_g \quad (6)$$

Po wprowadzeniu stosownych założeń energię potencjalną sprężystości okrętowego zestawu przeciwlotniczego można wyznaczyć, wykorzystując następującą zależność:

$$U_s = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^3 k_{ji} \lambda_i^2 \quad (7)$$

$k_{ji}$  – współczynnik sztywności,

$j$  – indeks określający kierunek działania siły sprężystości.

Energia potencjalna pola sił grawitacyjnych okrętowego zestawu przeciwlotniczego określona jest następującą zależnością:

$$U_g = m_{pl}gh_{pl} + m_{pr}gh_{pr} + m_pgh_p \quad (8)$$

$m_{pl}, m_{pr}, m_p$  – masa odpowiednio platformy, prowadnicy i rakiety,

$g$  – przyspieszenie ziemskie,

$h_{pl}, h_{pr}, h_p$  – pionowe przemieszczenie środka masy odpowiednio bryły platformy, prowadnicy i rakiety.

Natomiast dyssypatywna funkcja Rayleigha okrętowego zestawu przeciwlotniczego określona jest następującą zależnością:

$$R_{ay} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^3 c_{ji} \dot{\lambda}_i^2 \quad (9)$$

$c_{ji}$  – współczynnik tłumienia,

$j$  – indeks określający kierunek działania siły tłumienia,

$Q_i$  – siły uogólnione, które w przedstawionym modelu są siłami niepotencjalnymi.

Do sił niepotencjalnych działających w zestawie przeciwlotniczym, a jeszcze nie zdefiniowanych możemy zaliczyć siły sterujące i siły wynikające z ruchu obiektu zmiennego w czasie. Pocisk raketowy jest obiektem zmiennym w czasie, w związku z tym sformułowanie adekwatnego modelu rakiety uwarunkowane jest zastosowaniem odpowiedniej teorii. Istotnymi różnicami między równaniami ruchu bryły o zmiennej masie a równaniami ruchu ciała sztywnego są:

- występowanie sił i momentów reaktywnych
- przyjęcie masy, momentów bezwładności i momentów dewiacyjnych jako funkcji czasu.

#### 4. WNIOSKI

W pracy zaprezentowane są elementy ogólnej metody formułowania modelu przeciwlotniczej wyrzutni raketowej umieszczonej na pokładzie okrętu. Przedstawione zagadnienia nie wyczerpują tematu szczegółowego opracowania modelu opisującego działanie okrętowego zestawu raketowego. Ze względu na złożoną i bardzo obszerną postać modelu matematycznego, nie jest możliwe umieszczenie w niniejszym opracowaniu zależności analitycznych w postaci rozwiniętej zawierających: równania ruchu zestawu, zależności kinematyczne, równania ruchu celu, człony sterujące, parametry opisane funkcjami i równania równowagi statycznej.

Opracowany model pozwala na wszechstronną analizę dynamiki przeciwlotniczego zestawu raketowego umieszczonego na pokładzie okrętu. Następnym etapem badań będzie przeprowadzenie symulacji komputerowej startu pocisku raketowego z wyrzutni umieszczonej na pokładzie okrętu do manewrującego w przestrzeni celu.

*Artykuł zawiera wyniki pracy finansowanej przez Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego ze środków na naukę w latach 2011-2013 jako projekt badawczy nr O N501312638.*

#### LITERATURA

- [1] De Silva C.W., *Vibration Fundamentals and Practice*, Taylor & Francis Group, Boca Raton, London – New York, 2007.
- [2] Dziopa Z., Kinematyczny model startu rakiety z wyrzutni umieszczonej na pokładzie okrętu, *Zeszyty Naukowe Akademii Marynarki Wojennej*, Rok LII, nr 185A, s. 101-108, Gdynia, 2011.
- [3] Dziopa Z., Koruba Z., Modelling and the elements of controlled dynamics of the anti-aircraft missile launcher based onboard the warship, *Solid State Phenomena*, vol. 180, Trans Tech Publications, Switzerland, pp. 269-280, 2012.
- [4] Dziopa Z., Koruba Z., Krzysztofik I., *Elementy metody formułowania modelu wyrzutni raketowej umieszczonej na pokładzie okrętu*, Kierowanie ogniem systemów obrony powietrznej (przeciwlotniczej), Akademia Marynarki Wojennej, s. 85-94, Gdynia, 2010.
- [5] Koruba Z., Uproszczona analiza dynamiki startu pocisku raketowego z wyrzutni posadowionej na pokładzie okrętu, *Zeszyty Naukowe Akademii Marynarki Wojennej*, nr 185A, s. 249-256.
- [6] Osiecki J., *Dynamika maszyn*, WAT, Warszawa, 1994.
- [7] Бабицкий В.И., *Колебания в сильно нелинейных системах – нелинейности порогового типа*, Наука, Москва, 1985.



- [8] Светлицкий В.А., *Динамика старта летательных аппаратов*, Наука, Москва 1963.
- [9] Суслов Г.К., *Теоретическая механика*. Гостехиздат, Москва – Ленинград, 1946.

## **Non-Linear Model of Anti-Aircraft Missile Launcher Mounted on Board of a Ship**

Zbigniew DZIOPA, Zbigniew KORUBA

**Abstract.** The paper presents elements of a model of the anti-aircraft missile launcher mounted on board of a ship. The assembly motion is examined in the three-dimensional Euclidean space and in the homogenous gravitational field. Vibrations with high values of generalized dislocations of particular objects are discussed. The elaborated model of the ship's missile launcher has thirteen degrees of freedom in the general case.

**Keywords:** mechanics, anti-aircraft missile, ship's launcher, physical and mathematical model

