



## Modelowanie dynamiki oraz identyfikacja aerodynamiczna zmodyfikowanego pocisku moździerzowego kalibru 74 mm\*

Edyta ŁADYŻYŃSKA-KOZDRAŚ<sup>1</sup>, Michał FILIPOWICZ<sup>2</sup>,  
Jerzy MARYNIAK<sup>3</sup>

<sup>1</sup>Instytut Mikromechaniki i Fotoniki, Wydział Mechatroniki, Politechnika Warszawska,  
ul. Św. Andrzeja Boboli 8, 02-525 Warszawa,

<sup>2</sup>Instytut Techniki Lotniczej i Mechaniki Stosowanej,  
Wydział Mechaniczny Energetyki i Lotnictwa, Politechnika Warszawska,  
ul. Nowowiejska 24, 00-665 Warszawa,

<sup>3</sup>Wyższa Szkoła Oficerska Sił Powietrznych,  
ul. Dywizjonu 303 nr 12, 08-521 Dęblin

**Streszczenie.** Przedmiotem badań jest pocisk moździerzowy kalibru 74 mm. Badania zostały wykonane na dostępnej kopii pocisku. Zbadano rozkład mas, doświadczalnie wyznaczono momenty bezwładności pocisku, w tunelu aerodynamicznym Zakładu Aerodynamiki Instytutu Techniki Lotniczej i Mechaniki Stosowanej Politechniki Warszawskiej wyznaczono charakterystyki aerodynamiczne. Dla przyjętego modelu fizycznego opracowano model matematyczny pozwalający na pełną symulację oraz obliczenia numeryczne dynamiki badanego pocisku moździerzowy kalibru 74 mm.

**Słowa kluczowe:** mechanika, aerodynamika, charakterystyki aerodynamiczne, dynamika lotu

\* Artykuł był prezentowany na VIII Międzynarodowej Konferencji Uzbrojeniowej nt. „Naukowe aspekty techniki uzbrojenia i bezpieczeństwa”, Pułtusk, 6-8 października 2010 r.

## 1. WSTĘP

Prace rozwojowe nowo projektowanych pocisków moździerzowych są prowadzone pod kątem udoskonalania aerodynamiki oraz zwiększenia możliwości przenoszenia głowic bojowych. W związku z podpisaniem układu CFE-1 o ograniczeniu środków ogniowych o kalibrze powyżej 100 mm, istnieje zapotrzebowanie na pociski moździerzowe mniejszych kalibrów o donośności i celności zbliżonej do pocisków większych.

W pracy przeprowadzono badania pocisku moździerzowego kalibru 74 mm wzorowanego na amerykańskim pocisku M74 mm. Pocisk ten został zmodyfikowany – posiada wydłużony nos pozwalający na zastosowanie jako przeciwpancerny pocisk kumulacyjny. Na wykonanym w skali 1 : 1 modelu pocisku moździerzowego (przy spełnionych kryteriach podobieństwa geometrycznego i masowego) przeprowadzono badania aerodynamiczne, wyznaczono bezwymiarowe współczynniki aerodynamiczne, a następnie opracowano jego model fizyczny i matematyczny. Wyprowadzone równania ruchu wraz z wyznaczonymi współczynnikami aerodynamicznymi pozwalają stworzyć numeryczną symulację odwzorowującą zadaną dokładnością lot pocisku.

## 2. MODEL MATERIALNY POCISKU

Wykonana została identyfikacja parametryczna geometrii badanego pocisku moździerzowego (rys. 1). Jego parametry geometryczne są następujące: długość całkowita  $l = 403$  mm, średnica maksymalnego przekroju  $d = 66$  mm, wydłużenie korpusu  $\lambda_k = 0,473$ , wydłużenie głowicy  $\lambda_g = 0,238$ , powierzchnia przekroju poprzecznego  $S = 0,02015$  m<sup>2</sup>, powierzchnia boczna korpusu  $S_b = 0,005$  m<sup>2</sup>, średnica korpusu  $d_k = 45$  mm, długość korpusu  $l_k = 95$  mm, długość głowicy  $l_g = 210$  mm, wydłużenie ubrzechwienia izolowanego  $\lambda_u = 0,259$ , jego powierzchnia  $S_u = 0,00154$  m<sup>2</sup>, długość średniej cięciwy  $C_a = 77$  mm, grubość względna profilu brzechwy 2 mm, rozpiętość: 20 mm, ilość lotek: 6 rozstawionych co 60°.



Rys. 1. Model pocisku moździerzowego kalibru 74 mm

Fig. 1. Model of the 74 mm mortar bomb

### 3. ZWIĄZKI KINEMATYCZNE

Model matematyczny pocisku moździerzowego opracowano w nieinercyjnym, centralnym układzie odniesienia sztywno związanym z badanym obiektem, którego początek znajduje się w środku jego masy (rys. 2).

Wektor chwilowej prędkości liniowej (rys. 2):

$$\bar{V}_0 = U\bar{i} + V\bar{j} + W\bar{k} \quad (1)$$

Wektor prędkości kątowej (rys. 2):

$$\bar{\Omega} = P\bar{i} + Q\bar{j} + R\bar{k} \quad (2)$$

Kąty obrotu  $\phi$ ,  $\theta$ ,  $\psi$  określają położenie układu odniesienia związanego z rakieta  $Oxyz$  względem układu grawitacyjnego  $Ox_gy_gz_g$  równoległego do nieruchomego układu inercyjnego  $O_1x_1y_1z_1$ .

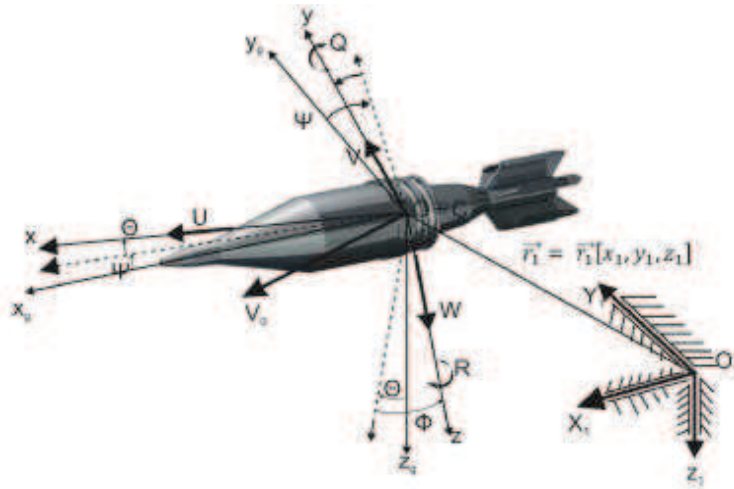
$$\begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \sin \phi \tan \theta & \cos \phi \tan \theta \\ 0 & \cos \phi & -\sin \phi \\ 0 & \sin \phi \sec \theta & \cos \phi \sec \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P \\ Q \\ R \end{bmatrix} = \Lambda_{\Omega}^{-1} \begin{bmatrix} P \\ Q \\ R \end{bmatrix} \quad (3)$$

Związki kinematyczne między składowymi prędkości liniowej  $\dot{x}_1, \dot{y}_1, \dot{z}_1$  mierzone w układzie inercyjnym  $O_1x_1y_1z_1$  a składowymi prędkości  $U, V, W$  w układzie odniesienia  $Oxyz$  związanym z rakieta są następujące [2]:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{y}_1 \\ \dot{z}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \psi \cos \theta & \cos \psi \sin \theta \sin \phi + & \cos \psi \sin \theta \cos \phi + \\ -\cos \phi \cos \psi & & + \sin \phi \cos \psi \\ \sin \psi \cos \theta & \sin \psi \sin \theta \sin \phi + & \sin \psi \sin \theta \cos \phi + \\ -\sin \phi \cos \psi & & -\sin \phi \cos \psi \\ -\sin \theta & \sin \phi \cos \theta & \cos \phi \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U \\ V \\ W \end{bmatrix} \quad (4)$$

Kąt natarcia:  $\alpha = \arctg \frac{W}{U} \quad (5)$

Kąt ślizgu:  $\beta = \arcsin \frac{V}{V_0} \quad (6)$



Rys. 2. Układy odniesienia oraz parametry kinematyczne pocisku moździerzowego

Fig. 2. Reference systems and kinematic parameters of the mortar bomb

#### 4. DYNAMICZNE RÓWNANIA RUCHU

Model fizyczny pocisku powstał w oparciu o następujące założenia: na ruch pocisku nie mają wpływu zjawiska meteorologiczne, a w szczególności wiatr; pocisk jest bryłą sztywną; zastosowano aerodynamikę quasi-stacjonarną.

Ogólne równania ruchu pocisku moździerzowego wyprowadzono, stosując podstawowe równania dynamiki [3, 5, 6] przy założeniach, że modelowany obiekt jest układem o sześciu stopniach swobody, a jego ruch rozpatrywany jest przestrzennie.

Pochodna pędu  $\Pi$  względem czasu:

$$\frac{\delta \bar{\Pi}}{\delta t} + \bar{\Omega} \times \bar{\Pi} = \bar{F} \quad (7)$$

Pochodna pędu  $K_0$  względem czasu:

$$\frac{\delta \bar{K}_0}{\delta t} + \bar{\Omega} \times \bar{K}_0 + \bar{V}_0 \times \bar{\Pi} = \bar{M}_0 \quad (8)$$

przy czym:

$$\bar{\Pi} = m(\bar{V}_0 + \bar{\Omega} \times \bar{r}_C) \quad (9)$$

$$\bar{r}_C = x_C \bar{i} + y_C \bar{j} + z_C \bar{k} \quad (10)$$

Na torze lotu pocisku działają na niego siły i momenty grawitacyjne oraz aerodynamiczne. Jako tor lotu przyjmuje się odcinek od wylotu z lufy do miejsca upadku na ziemię.

Składowe sił zewnętrznych (rys. 3):

$$\bar{F}_0 = X\bar{i} + Y\bar{j} + Z\bar{k} \quad (11)$$

Składowe momentów sił zewnętrznych (rys. 3):

$$\bar{M}_0 = L\bar{i} + M\bar{j} + N\bar{k} \quad (12)$$

Siły ciężkości pocisku w układzie  $Oxyz$  mają postać:

$$\begin{bmatrix} X^g \\ Y^g \\ Z^g \\ L^g \\ M^g \\ N^g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -mg \sin \theta \\ mg \cos \theta \sin \phi \\ mg \cos \theta \cos \phi \\ mg(y_C \cos \theta \cos \phi - z_C \cos \theta \sin \phi) \\ mg(-z_C \sin \theta - x_C \cos \theta \cos \phi) \\ mg(x_C \cos \theta \sin \phi + y_C \sin \theta) \end{bmatrix} \quad (13)$$

Siły aerodynamiczne działające na pocisk w układzie związanym z obiektem:

$$\begin{bmatrix} X^a \\ Y^a \\ Z^a \\ L^a \\ M^a \\ N^a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}\rho S V_0^2 (C_{xa} \cos \beta \cos \alpha + C_{ya} \sin \beta \cos \alpha - C_{za} \sin \alpha) + X_Q Q \\ -\frac{1}{2}\rho S V_0^2 (C_{xa} \sin \beta - C_{ya} \cos \beta) + Y_R R \\ -\frac{1}{2}\rho S V_0^2 (C_{xa} \cos \beta \sin \alpha + C_{ya} \sin \beta \sin \alpha + C_{za} \cos \alpha) + Z_Q Q \\ -\frac{1}{2}\rho S V_0^2 [l(C_{mxa} \cos \beta \cos \alpha + C_{mya} \sin \beta \cos \alpha - C_{mza} \sin \alpha)] + L_R R \\ -\frac{1}{2}\rho S V_0^2 [l(C_{mxa} \sin \beta - C_{mya} \cos \beta)] + M_Q Q \\ -\frac{1}{2}\rho S V_0^2 [l(C_{mxa} \cos \beta \sin \alpha + C_{mya} \sin \beta \sin \alpha + C_{mza} \cos \alpha)] + N_R R \end{bmatrix} \quad (14)$$

gdzie:

$C_{xa}, C_{ya}, C_{za}, C_{mxa}, C_{mya}, C_{mza}$  – współczynniki sił aerodynamicznych: oporu, bocznej i nośnej oraz momentów przechylającego, pochylającego i odchylającego,  
 $S$  – powierzchnia odniesienia (największy przekrój poprzeczny pocisku),  
 $l$  – wymiar charakterystyczny (długość pocisku),  
 $\rho_H$  – gęstość powietrza na danej wysokości.

Pochodne aerodynamiczne sił i momentów pochodzących od zmian kątowej prędkości pochylania i odchylania pocisku są, ze względu na osiową symetrię, odpowiednio równe:

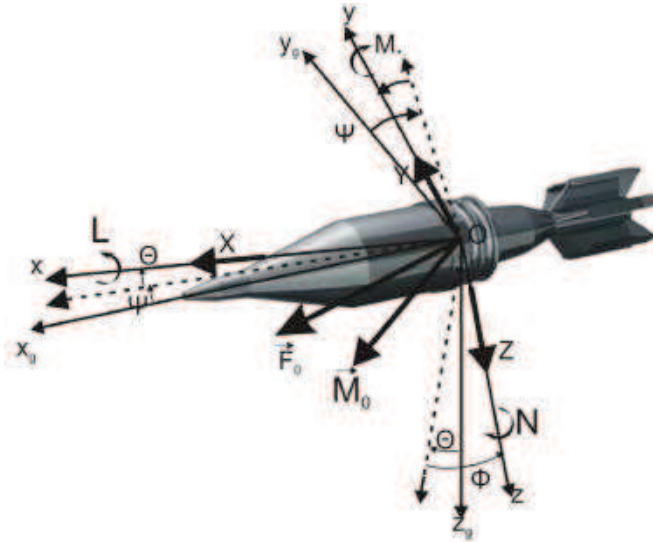
$$\begin{aligned}
 X_Q &= \frac{1}{2} \rho V_0 \frac{\partial C_{xa}}{\partial \alpha} \frac{S}{S_b} \int_{c1}^{c2} xc(x) dx = X_R \\
 Z_Q &= \frac{1}{2} \rho V_0 \frac{\partial C_{za}}{\partial \alpha} \frac{S}{S_b} \int_{c1}^{c2} xc(x) dx = Y_R \\
 M_Q &= \frac{1}{2} \rho V_0 l \frac{\partial C_{mya}}{\partial \alpha} \frac{S}{S_b} \int_{c1}^{c2} xc(x) dx = N_R
 \end{aligned} \tag{15}$$

gdzie:

$S_b$  – powierzchnia rzutu bocznego pocisku,

$c(x)$  – zmiana lokalnej średnicy pocisku w funkcji odległości od środka masy,  $x$ ,

$c1, c2$  – granice całkowania (odległości początku i końca pocisku od środka masy).



Rys. 3. Siły i moment sił zewnętrznych

Fig. 3. Forces and moment of external forces

W ten sposób dynamiczne równania ruchu pocisku moździerzowego mają postać:

– równanie ruchów podłużnych:

$$\begin{aligned}
 m(\dot{U} + QW - RV) - S_x(Q^2 + R^2) - S_y(\dot{R} - PQ) + S_z(\dot{Q} + PR) = \\
 = -mg \sin \theta - \frac{1}{2} \rho S V_0^2 (C_{xa} \cos \beta \cos \alpha + C_{ya} \sin \beta \cos \alpha - C_{za} \sin \alpha) + X_{QQ}
 \end{aligned} \tag{16}$$

– równanie ruchów bocznych:

$$\begin{aligned} m(\dot{V} + RU - PW) + S_x(\dot{R} + PQ) - S_y(P^2 + R^2) - S_z(\dot{P} - QR) = \\ = mg \cos \theta \sin \phi - \frac{1}{2} \rho S V_0^2 (C_{xa} \sin \beta - C_{ya} \cos \beta) + Y_R R \end{aligned} \quad (17)$$

– równanie ruchów wznoszących:

$$\begin{aligned} m(\dot{W} + PV - QU) - S_x(\dot{Q} - PR) + S_y(\dot{P} + QR) - S_z(Q^2 + P^2) = \\ = mg \cos \theta \cos \phi - \frac{1}{2} \rho_h S V_A^2 (C_{xa} \cos \beta \sin \alpha + C_{ya} \sin \beta \sin \alpha + C_{za} \cos \alpha) + Z_Q Q \end{aligned} \quad (18)$$

– równanie ruchów przechylających:

$$\begin{aligned} I_x \dot{P} - (I_y - I_z)QR - I_{xy}(\dot{Q} - PR) - I_{xz}(\dot{R} + PQ) - I_{yz}(Q^2 - R^2) + \\ + S_y(\dot{W} + VP - UQ) + S_z(PW - UR - \dot{V}) = mg(y_C \cos \theta \cos \phi - z_C \cos \theta \sin \phi) + \\ - \frac{1}{2} \rho S V_0^2 [l(C_{mxa} \cos \beta \cos \alpha + C_{mya} \sin \beta \cos \alpha - C_{mza} \sin \alpha)] + L_R R \end{aligned} \quad (19)$$

– równanie ruchów pochyłających:

$$\begin{aligned} I_y \dot{Q} - (I_z - I_x)PR - I_{xy}(\dot{P} + QR) - I_{yz}(\dot{R} - PQ) - I_{xz}(R^2 - P^2) + \\ - S_x(\dot{W} + VP - UQ) + S_z(\dot{U} - VR + QW) = -mg(z_C \sin \theta + x_C \cos \theta \cos \phi) + \\ - \frac{1}{2} \rho_h S V_A^2 [l(C_{mxa} \sin \beta - C_{mya} \cos \beta)] + M_Q Q \end{aligned} \quad (20)$$

– równanie ruchów odchylających:

$$\begin{aligned} I_z \dot{R} - (I_x - I_y)PQ - I_{yz}(\dot{Q} + PR) - I_{xz}(\dot{P} - QR) - I_{xy}(P^2 - Q^2) + \\ + S_x(\dot{V} - WP + RU) - S_y(\dot{U} - RV + WQ) = mg(x_C \cos \theta \sin \phi + y_C \sin \theta) + \\ - \frac{1}{2} \rho S V_0^2 [l(C_{mxa} \cos \beta \sin \alpha + C_{mya} \sin \beta \sin \alpha + C_{mza} \cos \alpha)] + N_R R \end{aligned} \quad (21)$$

Wyprowadzone równania (16)-(21) wraz z zależnościami (1)-(6) stanowią model matematyczny opisujący ruch badanego pocisku moździerzowego.

## 5. WAGOWE BADANIA AERODYNAMICZNE MODELU POCISKU MOŹDZIERZOWEGO W TUNELU AERODYNAMICZNYM

Wagowe badania aerodynamiczne przeprowadzono w tunelu aerodynamicznym Zakładu Aerodynamiki Instytutu Techniki Lotniczej i Mechaniki Stosowanej Politechniki Warszawskiej (rys. 4). Badany model pocisku moździerzowego zawieszony został na drutach na okrągłej ramie obejmującej całą przestrzeń pomiarową. Oś symetrii modelu przy zerowym kącie natarcia pokrywała się z osią tunelu, natomiast przekrój poprzeczny pocisku zorientowany jest pionowo, zgodnie z osią obrotu pierścienia wagi. Możliwa była regulacja kąta natarcia. Pomiary zostały wykonane w zakresie od  $\alpha = -11^\circ$  do  $\alpha = 24^\circ$ .



Rys. 4. Pocisk moździerzowy podczas badań w tunelu aerodynamicznym

Fig. 4. Mortar bomb during testing in the wind tunnel

Badania tunelowe zostały wykonane przy ciśnieniu dynamicznym  $q = 100 \text{ mm H}_2\text{O} = 980 \text{ Pa}$  i prędkości  $V = 40 \text{ m/s}$ . Wykonano pomiary następujących wielkości:

1. siły nośnej  $P_{za}$  i oporu aerodynamicznego  $P_{xa}$  działających na model pocisku,
2. siły  $P_m$ , która wymnożona przez ramię wagi ( $r = 0,194 \text{ m}$ ) pozwala wyznaczyć moment pochylający pocisku moździerzowego  $M_{ya}$  względem środka masy.

Bezwymiarowe współczynniki aerodynamiczne wyznaczono z zależności:

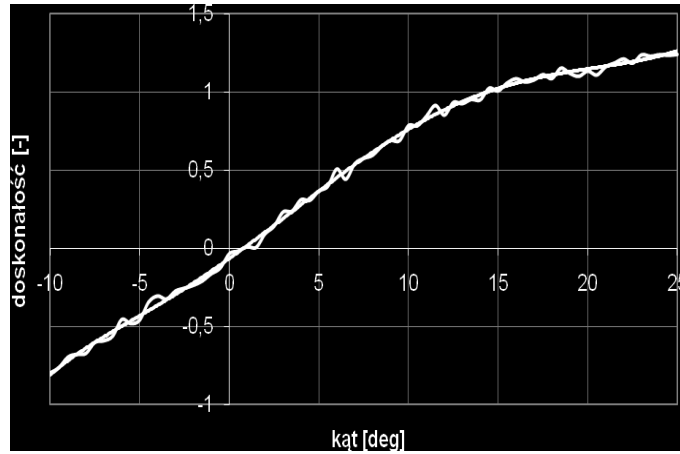
– siły nośnej  $P_z$ :

$$C_{za} = \frac{P_{za}}{\frac{1}{2} \rho V_0^2 S} \quad (22)$$



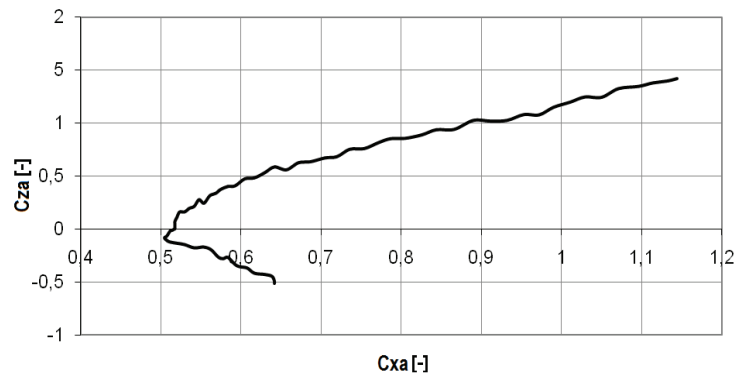
– oporu aerodynamicznego  $P_x$ : 
$$C_{xa} = \frac{P_{xa}}{\frac{1}{2}\rho V_0^2 S} \quad (23)$$

– momentu pochylającego  $M_a$ : 
$$C_{mya} = \frac{M_{ya}}{\frac{1}{2}\rho V_0^2 Sl} \quad (24)$$



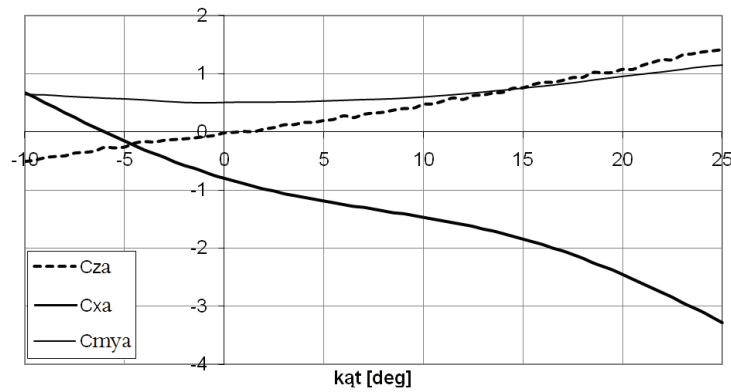
Rys. 5. Doskonalość aerodynamiczna pocisku moździerzowego

Fig. 5. Gliding ratio of the mortar bomb



Rys. 6. Biegunowa pocisku moździerzowego

Fig. 6. Polar curve of the mortar bomb

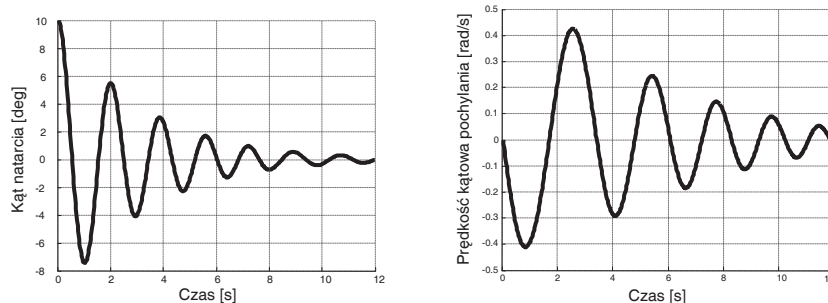


Rys. 7. Bezwymiarowe współczynniki aerodynamiczne: siły nośnej  $C_{za}$ , oporu aerodynamicznego  $C_{xa}$ , momentu pochylającego  $C_{mya}$

Fig. 7. Dimensionless aerodynamic coefficients: aerodynamic lift  $C_{za}$ , aerodynamic resistance  $C_{xa}$ , pitching moment  $C_{mya}$

Z wykresu  $C_m(\alpha)$  (rys. 7) widać, że w całym zakresie kątów natarcia  $\frac{dC_m}{d\alpha} < 0$ . Wskazuje to, że pocisk jako obiekt niesterowany jest stateczny statycznie.

Korzystając z identyfikacji geometrycznej, wykonano obliczenia numeryczne, wyznaczając bezwymiarowe współczynniki aerodynamiczne w zakresie prędkości poddźwiękowych oraz porównując je z tymi otrzymanymi doświadczalnie. Pozwoliło to na opracowanie programu symulacyjnego dynamiki niesterowanego pocisku moździerzowego w locie swobodnym, którego przykładowe wyniki przedstawiono na rysunku 8. Zanikające oscylacje parametrów pocisku podczas lotu świadczą o jego stateczności.



Rys. 8. Przebieg prędkości kątowej pochylania oraz kąta natarcia pocisku moździerzowego w funkcji czasu

Fig. 8. History of the angular velocity of pitching and angle of attack

## 6. WNIOSKI

Opracowany model matematyczny daje szerokie możliwości zastosowania podczas opracowywania dynamiki niesterowanych obiektów latających. Wyprowadzone równania ruchu wraz z wyznaczonymi współczynnikami aerodynamicznymi pozwalają stworzyć numeryczną symulację odwzorowującą z zadaną dokładnością lot pocisku moździerzowego. Pozwala to na ocenę własności lotnych pocisku. Po stworzeniu programu wykorzystującego równania ruchu możliwa jest optymalizacja geometrii badanego obiektu oraz poprawa jego charakterystyk. Symulacja pozwala na ocenę podstawowych własności pocisku, które charakteryzują jego przydatność do wykorzystania.

*Artykuł zawiera wyniki pracy finansowanej przez MNiSW ze środków na naukę w latach 2008-2010 jako projekt badawczy nr O N501 003534.*

## LITERATURA

- [1] Kostrow R., Makuszewski M., Studencki M., *Rakiety i artyleria wojsk lądowych*, Wydawnictwo Bellona, Warszawa, 2001.
- [2] Ładyżyńska-Kozdraś E., Analiza dynamiki przestrzennego ruchu rakiety sterowanej automatycznie, *Mechanika w Lotnictwie*, ML-XII 2008, Wydawnictwo PTMTiS, Warszawa, 2008.
- [3] Maryniak J., Ładyżyńska-Kozdraś E., Żyluk A., Cichoń M., Modelowanie i symulacja numeryczna zrzutu lotniczej bomby sterowanej w locie balistycznym oraz na zadany cel naziemny, *Zeszyty Naukowe Akademii Marynarki Wojennej*, rok XLIX, Nr 172K/1, Gdynia, 2008.
- [4] Maryniak J., Ładyżyńska-Kozdraś E., Żyluk A., Cichoń M., Badania aerodynamiczne – wyznaczenie charakterystyk aerodynamicznych lotniczej rakiety NLPR-70, cz. I, Badania aerodynamiczne, praca zbiorowa pod redakcją Cz. Niżankowskiego pt. *Systemy przeciwlotnicze i obrony powietrznej*, s. 265-273, Olszanica, 2007.
- [5] Ładyżyńska-Kozdraś E., Maryniak J., Badania aerodynamiczne – modelowanie dynamiki lotniczej rakiety NLPR-70, cz. II, Modelowanie dynamiki lotniczej rakiety NLPR-70, praca zbiorowa pod redakcją Cz. Niżankowskiego pt. *Systemy przeciwlotnicze i obrony powietrznej*, s. 274-287, Olszanica, 2007.
- [6] Nizioł J., Maryniak J., *Mechanika techniczna*, tom II – *Dynamika układów mechanicznych*, część V – *Dynamika lotu*, s. 363-472, Wyd. Komitet Mechaniki PAN, IPPT PAN, Warszawa, 2005.

## **Dynamic Modelling and Aerodynamic Identification of the 74 mm Modified Mortar Bomb**

Edyta ŁADYŻYŃSKA-KOZDRAŚ, Michał FILIPOWICZ,  
Jerzy MARYNIAK

**Abstract.** The subject of the research is constituted by the mortar bomb of the calibre 74 mm. The research was executed upon the available copy of the bomb. What has been examined was the distribution of masses, inertia moments were determined with the application of the experimental method researched when connected to the mortar bomb and within the wind tunnel of the Aerodynamic Workshop of the Institute of Aviation and Applied Mechanics of the Warsaw University of Technology as well as all of the aerodynamic characteristics were determined. The taken over physical model was developed with the mathematical model which allows for the full simulation as well as numerical calculations of the dynamics of the 74 mm mortar bomb.

**Keywords:** mechanics, aerodynamics, aerodynamic characteristics, flight dynamics