



Model matematyczny ruchu w powietrzu pocisku bliskiego zasięgu o stałej masie i sześciu stopniach swobody*

Anna FLORIAŃCZYK

*Institut Mechaniki i Poligrafii, Politechnika Warszawska,
ul. Narbutta 85, 02-524 Warszawa*

Streszczenie. Przedmiotem pracy była weryfikacja rozwiązania głównego problemu balistyki zewnętrznej dla pocisku bliskiego zasięgu o stałej masie i sześciu stopniach swobody zaproponowanego przez Roberta L. McCoya w „Modern Exterior Ballistics” [5]. Wyprowadzono wszystkie równania ruchu pocisku w powietrzu jako bryły sztywnej nieodkształcalnej. Przedstawiony model matematyczny uwzględnia działanie sił aerodynamicznych, momentów oraz siły grawitacji. W rozwiązaniu wzięto również pod uwagę zmianę gęstości i temperatury powietrza w funkcji wysokości zdefiniowanej atmosferą standardową ICAO. Otrzymany w postaci układu równań różniczkowych model matematyczny posłużył za bazę do napisania programu do symulacji ruchu pocisku. Biorąc pod uwagę wyniki przeprowadzonych w programie prób strzelań przy różnych kątach rzutu, można uznać, że wyprowadzony model matematyczny prawidłowo odzwierciedla ruch pocisku bliskiego zasięgu o stałej masie i sześciu stopniach swobody w powietrzu.

Słowa kluczowe: mechanika, balistyka zewnętrzna, model matematyczny ruchu, pocisk

1. WSTĘP

W niniejszej pracy analizowany był model matematyczny pocisku poprzedzony przyjęciem modelu fizycznego. Przekształcenia zostały przeprowadzone przy założeniu, że pocisk jest bryłą sztywną, nieodkształcalną, osiowo-symetryczną o stałej masie m i nie zmienia w trakcie lotu położenia

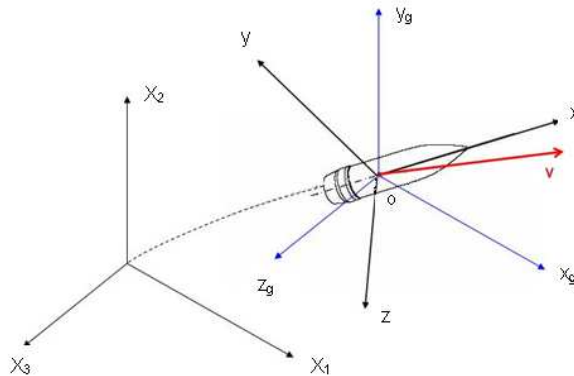
* Artykuł był prezentowany na VIII Międzynarodowej Konferencji Uzbrojeniowej nt. „Naukowe aspekty techniki uzbrojenia i bezpieczeństwa”, Pułtusk, 6-8 października 2010 r.

środka masy. Pocisk zostaje wystrzelony z płaskiej i nieruchomej powierzchni Ziemi i wykonuje ruch złożony: postępowy względem Ziemi i obrotowy względem własnej osi symetrii. Ruch odbywa się w ustalonych warunkach atmosferycznych (pogoda bezwietrzna, tj. prędkość mierzona względem Ziemi równa jest prędkości względem strumienia powietrza).

Znane są: parametry pocisku (masa (m), średnica (d), pole przekroju poprzecznego (powierzchnia charakterystyczna $S = \pi d^2/4$), długość pocisku (l), prędkość początkowa pocisku V_0 , kąt rzutu Θ_0 (nachylenie lufy do poziomu), przyspieszenie ziemskie g , gęstość powietrza $\rho(T)$, współczynniki sił i momentów aerodynamicznych ($C_D, C_{L\omega}, C_{Np\alpha}, C_{Nq}, C_{Na}, C_{l\delta}, C_{lp}, C_{M\omega}, C_{Mq}, C_{Ma}, C_{Mpa}$) [2, 5].

Przy wyprowadzeniu równań ruchu pocisku posłużono się trzema układami odniesienia (rys. 1):

- układem normalnym związanym z Ziemią, nieruchomym, inercyjnym $O_{x_1x_2x_3}$
- układem z początkiem w punkcie środka masy pocisku, równoległym do układu normalnego związanego z Ziemią $O_{x_gy_gz_g}$
- układem sztywno związanym z pociskiem O_{xyz} .



Rys. 1. Przyjęte układy odniesienia dla lotu pocisku

Fig. 1. Adopted reference systems for the projectile flight

W modelu fizycznym uwzględniono, że w czasie lotu w powietrzu na torze od momentu wystrzelenia do osiągnięcia celu na pocisk oddziałują siły aerodynamiczne (oporu czołowego powietrza, Magnusa, nośna, tłumiąca) i momenty (tarcia powierzchniowego, obrotowy powodowany brzechwą, wywracający, Magnusa, tłumiący) oraz siła grawitacji. Wyprowadzone równania ruchu pocisku uwzględniają także zmiany parametrów atmosfery wraz z wysokością [3, 6].

Przyjmuje się, że temperatura termodynamiczna jest funkcją wysokości:

$$T = T_b + \beta(H - H_b) \quad (1)$$

gdzie:

- T – temperatura termodynamiczna powietrza [K]: $T = T_0 + t$;
- t – temperatura termodynamiczna powietrza [°C];
- T_0 – termodynamiczna temperatura zera na poziomie morza, tj. 273,15 K;
- T_b – temperatura geopotencjalna dolnej granicy warstwy rozpatrywanej;
- β – pionowy gradient temperatury (dT/dH);
- H – wysokość geopotencjalna [m];
- H_b – wysokość geopotencjalna dolnej granicy warstwy rozpatrywanej [m].

Przy założeniu, że temperatura zmienia się wraz z wysokością geopotencjalną w sposób liniowy, z równań:

- gazu doskonałego (dla wysokości do 80 km): $p = \rho RT$ (2)

- i atmosfery statycznej: $-dp = \rho g_n dh$ (3)

można wyprowadzić następującą zależność [6]:

$$p_b \left[1 + \frac{\beta}{T_b}(H - H_b) \right]^{-g_n/\beta R} = \rho RT \quad (4)$$

$$\rho = \frac{p_b \left[1 + \frac{\beta}{T_b}(H - H_b) \right]^{-g_n/\beta R}}{RT} \quad (5)$$

gdzie:

- p – ciśnienie powietrza [hPa];
- p_b – ciśnienie geopotencjalne dolnej granicy warstwy rozpatrywanej [m];
- ρ – gęstość [kg/m³];
- h – wysokość geometryczna [m];
- R – właściwa stała gazowa, liczba Reynoldsa o wartości 287,05287 J·K⁻¹·kg⁻¹;
- g_n – wzorcowe przyspieszenie przy swobodnym spadku, które odpowiada szerokości $\varphi = 45^\circ 32' 33''$ ($g_n = 9,80665 \text{ m/s}^2$).

Po przekształceniach zależność gęstości powietrza w funkcji wysokości dla rozpatrywanego zasięgu pocisku $0 < H < 11000 \text{ m}$ (dla $H = 11000 \text{ m}$, $T = 216,65 \text{ K}$) można było wyrazić ostatecznie poniższym wzorem:

$$\rho = \rho_0 \left(1 + \frac{z_{1R}}{44300} \right)^{4,256} \quad (6)$$

gdzie:

- z_{1R} – wysokość, na której się strzela;
- ρ_0 – gęstość na poziomie morza zgodnie z ISA [3].

2. WYPROWADZENIE RÓWNAŃ RUCHU POCISKU W POWIETRZU

W celu określenia orientacji osi symetrii pocisku względem nieruchomego układu odniesienia O_{X1X2X3} posłużono się cosinusami kierunkowymi. Metoda ta, jak wskazuje w swojej pracy McCoy, w odróżnieniu od wykorzystania kątów Eulera nie nakłada ograniczeń na wartość kąta natarcia [5]. Podstawą modelu matematycznego ruchu pocisku jest druga zasada dynamiki Newtona [1]:

$$\bar{F} = m\bar{a} \quad (7)$$

$$m \frac{d\bar{v}}{dt} = \sum \bar{F} + m\bar{g} + m\bar{\Lambda} + \sum \bar{R}_T \quad (8)$$

gdzie:

- m – masa pocisku;
- \bar{v} – wektor prędkości pocisku względem strumienia powietrza;
- \bar{a} – wektor przyspieszenia pocisku;
- \bar{g} – wektor przyspieszenia ziemskiego;
- t – czas;
- $\sum \bar{F}$ – suma wektorów wszystkich sił aerodynamicznych;
- $\bar{\Lambda}$ – wektor przyspieszenia Coriolisa, wywołanego ruchem obrotowym Ziemi (zostanie pominięty w dalszych obliczeniach);
- $\sum \bar{R}_T$ – suma wektorów wszystkich sił odrzutu (zostanie pominięta w dalszych obliczeniach).

W podobny sposób można zapisać również dla pocisku zasadę zachowania krętu:

$$\frac{d\bar{H}}{dt} = \sum \bar{M} + \sum \bar{R}_M \quad (9)$$

gdzie:

- \bar{H} – wektor krętu pocisku;
- $\sum \bar{M}$ – suma wektorów wszystkich momentów aerodynamicznych;
- $\sum \bar{R}_M$ – suma wektorów momentów odrzutu (pominięta w dalszych obliczeniach).

Ponieważ pocisk jest bryłą osiowo-symetryczną, każda z osi przecinających oś podłużną w środku ciężkości jest główną osią bezwładności. Oczywiście również sama oś podłużna jest główną osią bezwładności. W przypadku poruszającego się pocisku mamy do czynienia z rotacją, w związku z tym można przyjąć, że dla tensora bezwładności pocisku momenty dewiacji będą równe zeru. Natomiast momenty statyczne będą jednakowe ($S_x = S_y = S_z$), a moment bezwładności I_y będzie równy momentowi I_z . A zatem tensor bezwładności pocisku przyjmie następującą postać:

$$I^{(O)} = \begin{bmatrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{bmatrix} \quad (10)$$

Oznaczając jako I_P moment bezwładności dla osi „polarnej” i pokrywającej się z osią symetrii pocisku i uwzględniając, że dla pocisku osiowo-symetrycznego $I_y = I_z = I_T$ można zapisać tensor bezwładności jako:

$$I^{(O)} = \begin{bmatrix} I_P & 0 & 0 \\ 0 & I_T & 0 \\ 0 & 0 & I_T \end{bmatrix} \quad (11)$$

Jeśli pocisk obraca się z prędkością kątową \bar{p} wokół osi „polarnej” pokrywającej się z osią symetrii pocisku, to kręt dla tej osi \bar{H}_P można zapisać następująco:

$$\bar{H}_P = I_P p \bar{x} \quad (12)$$

gdzie: \bar{x} – wektor jednostkowy pokrywający się z osią symetrii pocisku.

Dla dwóch pozostałych osi kręt \bar{H}_T jest jednakowy i wynosi:

$$\bar{H}_T = I_T \left(\bar{x} \times \frac{d\bar{x}}{dt} \right) \quad (13)$$

A zatem całkowity wektor krętu można zapisać jako sumę dwóch wektorów krętu:

$$\bar{H} = I_P p \bar{x} + I_T \left(\bar{x} \times \frac{d\bar{x}}{dt} \right) \quad (14)$$

Przyjmując oznaczenie $\bar{h} = \bar{H} / I_T$, można zapisać, że:

$$\frac{d\bar{h}}{dt} = \frac{I_P}{I_T} \dot{p} \bar{x} + \frac{I_P p}{I_T} \frac{d\bar{x}}{dt} + \left(\frac{d\bar{x}}{dt} \times \frac{d\bar{x}}{dt} \right) + \left(\bar{x} \times \frac{d^2 \bar{x}}{dt^2} \right) \quad (15)$$

Wyrażenia te ułatwią wyliczenie prawych stron równań dynamiki, czyli sum sił oddziałujących na pocisk w locie:

- siły oporu czołowego powietrza:
$$\overline{F_D} = -\frac{1}{2}\rho S C_D \bar{v}v \quad (16)$$

gdzie:

ρ – gęstość powietrza;

\bar{v} – wektor prędkości pocisku względem strumienia powietrza;

v – skalar prędkości pocisku względem strumienia powietrza;

S – pole przekroju poprzecznego pocisku;

C_D – współczynnik oporu czołowego powietrza

- siły nośnej:
$$\overline{F_{L\alpha}} = \frac{1}{2}\rho S C_{L\alpha} [\bar{v} \times (\bar{x} \times \bar{v})] \quad (17)$$

gdzie:

\bar{x} – wektor osi symetrii pocisku;

$C_{L\alpha}$ – współczynnik siły nośnej.

Wykorzystując zależności wektorowe równanie (17) można zapisać również w innej formie [4]:

$$\overline{F_{L\alpha}} = \frac{1}{2}\rho S C_{L\alpha} [(\bar{v} \cdot \bar{v})\bar{x} - (\bar{x} \cdot \bar{v})\bar{v}] \quad (18)$$

- siły Magnusa:
$$\overline{F_{Np\alpha}} = \frac{1}{2}\rho S v \left(\frac{pd}{v} \right) C_{Np\alpha} (\bar{v} \times \bar{x}) \quad (19)$$

gdzie:

d – kaliber pocisku;

$C_{Np\alpha}$ – współczynnik siły Magnusa,

a po przekształceniach:

$$\overline{F_{Np\alpha}} = -\frac{1}{2}\rho S d C_{Np\alpha} \left(\frac{I_y}{I_x} \right) (\bar{h} \cdot \bar{x}) (\bar{x} \times \bar{v}) \quad (20)$$

- siły tłumiącej:
$$\overline{F_{Nq}} = \frac{1}{2}\rho S d (C_{Nq} + C_{N\dot{\alpha}}) v \left(\frac{d\bar{x}}{dt} \right) \quad (21)$$

gdzie:

$(C_{Nq} + C_{N\dot{\alpha}})$ – współczynnik siły tłumiącej pochylenie osi pocisku względem stycznej do toru.

W wyniku kolejnych przekształceń równanie (21) można zapisać w wygodniejszej postaci:

$$\overline{F_{Nq}} = \frac{1}{2} \rho S v d (C_{Nq} + C_{N\alpha}) (\overline{h} \times \overline{x}) \quad (22)$$

Po uwzględnieniu wzorów na siły i podzieleniu równania zachowania pędu (8) przez masę pocisku, pomijając siłę odrzutu, pierwsze wyrażenie opisujące dynamikę pocisku doprowadzono do równań w poniższej formie:

$$\begin{aligned} \frac{d\overline{v}}{dt} = & \frac{\rho v S C_D}{2m} \overline{v} + \frac{\rho S C_{L\alpha}}{2m} [v^2 \overline{x} - (\overline{v} \cdot \overline{x}) \overline{v}] - \frac{\rho S d C_{Np\alpha}}{2m} \left(\frac{I_T}{I_p} \right) (\overline{h} \cdot \overline{x}) (\overline{x} \times \overline{v}) + \\ & + \frac{\rho v S d (C_{Nq} + C_{N\alpha})}{2m} (\overline{h} \times \overline{x}) + \overline{g} \end{aligned} \quad (23)$$

gdzie:

m – masa pocisku;

\overline{v} – wektor prędkości pocisku względem strumienia powietrza;

\overline{H} – wektor krętu, a $\overline{h} = \overline{H} / I_T$;

\overline{p} – prędkość kątowa wokół osi „polarnej” (osi symetrii pocisku);

\overline{x} – wersor osi symetrii pocisku;

\overline{g} – wektor przyspieszenia ziemskiego.

W podobny sposób wyznaczone zostały prawe strony równań opisujących zasadę zachowania krętu, czyli sumy momentów oddziałujących na pocisk w locie: momentu tarcia powierzchniowego, momentu obrotowego powodowanego brzechwą, momentu wywracającego, momentu Magnusa, momentu tłumiącego. Po uwzględnieniu wzorów na momenty i podzieleniu równania opisującego zasadę zachowania krętu przez moment bezwładności pocisku I_T , pomijając siłę odrzutu, otrzymano następującą zależność:

$$\begin{aligned} \frac{d\overline{h}}{dt} = & \frac{\rho v S d^2 C_{lp}}{2I_p} (\overline{h} \cdot \overline{x}) \overline{x} + \frac{\rho v^2 S d \delta_F C_{l\delta}}{2I_T} \overline{x} + \frac{\rho v S d C_{M\alpha}}{2I_T} (\overline{v} \times \overline{x}) + \\ & + \frac{\rho S d^2 C_{Mp\alpha}}{2I_p} (\overline{h} \cdot \overline{x}) [\overline{v} - (\overline{v} \cdot \overline{x}) \overline{x}] + \frac{\rho v S d^2 (C_{Mq} + C_{M\alpha})}{2I_T} [\overline{h} - (\overline{h} \cdot \overline{x}) \overline{x}] \end{aligned} \quad (24)$$

gdzie:

C_{lp} – współczynnik momentu tarcia powierzchniowego;

C_{lq} – współczynnik momentu obrotowego powodowanego brzechwą;

δ_F – kąt nachylenia brzechwy względem osi pocisku;

$C_{M\alpha}$ – współczynnik momentu wywracającego;

$C_{M_{p\alpha}}$ – współczynnik momentu Magnusa;

$(C_{M_q} + C_{M_\alpha})$ – współczynnik momentu tłumiącego.

Otrzymane równania ruchu są ściśle powiązane ze sobą. Po dalszych przekształceniach i rozpisaniu równań (23) i (24) na poszczególne składowe odpowiadające kierunkom wyznaczanym przez wersory układu związanego z Ziemią i wprowadzeniu zmodyfikowanych współczynników aerodynamicznych:

$$\begin{aligned}\tilde{C}_D &= \frac{\rho v S C_D}{2m}; & \tilde{C}_{l_p} &= \frac{\rho v S d^2 C_{l_p p}}{2I_T}; & \tilde{C}_{L_\alpha} &= \frac{\rho S C_{L_\alpha}}{2m}; & \tilde{C}_{l_\delta} &= \frac{\rho v^2 S d \delta_F C_{l_\delta}}{2I_T}; \\ \tilde{C}_{N_{p\alpha}} &= \frac{\rho S d C_{N_{p\alpha}} P}{2m}; & \tilde{C}_{M_\alpha} &= \frac{\rho v S d C_{M_\alpha}}{2I_T}; & \tilde{C}_{N_q} &= \frac{\rho v S d (C_{N_q} + C_{N_\alpha})}{2m}; \\ \tilde{C}_{M_{p\epsilon}} &= \frac{\rho S d^2 C_{M_{p\alpha}} P}{2I_T}\end{aligned}$$

otrzymano układ równań różniczkowych obejmujący dynamikę ruchu środka masy pocisku (25)-(27), dynamikę ruchu dookoła środka masy pocisku (28)-(30), kinematykę środka masy pocisku (31)-(33), wartości cosinusów kierunkowych (34)-(36), kinematykę wirowania pocisku względem osi \bar{x} (37):

$$\begin{aligned}\frac{dv_1}{dt} &= -\tilde{C}_D v_1 + \tilde{C}_{L_\alpha} (v^2 x_1 - v v_1 \cos \alpha_t) - \tilde{C}_{N_{p\alpha}} (x_2 v_3 - x_3 v_2) + \\ &+ \tilde{C}_{N_q} (h_2 x_3 - h_3 x_2) + g_1\end{aligned}\quad (25)$$

$$\begin{aligned}\frac{dv_2}{dt} &= -\tilde{C}_D v_2 + \tilde{C}_{L_\alpha} (v^2 x_2 - v v_2 \cos \alpha_t) - \tilde{C}_{N_{p\alpha}} (x_3 v_1 - x_1 v_3) + \\ &+ \tilde{C}_{N_q} (h_3 x_1 - h_1 x_3) + g_2\end{aligned}\quad (26)$$

$$\begin{aligned}\frac{dv_3}{dt} &= -\tilde{C}_D v_3 + \tilde{C}_{L_\alpha} (v^2 x_3 - v v_3 \cos \alpha_t) - \tilde{C}_{N_{p\alpha}} (x_1 v_2 - x_2 v_1) + \\ &+ \tilde{C}_{N_q} (h_1 x_2 - h_2 x_1) + g_3\end{aligned}\quad (27)$$

$$\begin{aligned}\frac{dh_1}{dt} &= (\tilde{C}_{l_p} + \tilde{C}_{l_\delta}) x_1 + \tilde{C}_{M_\alpha} (v_2 x_3 - v_3 x_2) + \tilde{C}_{M_{p\alpha}} (v_1 - v x_1 \cos \alpha_t) + \\ &+ \tilde{C}_{M_q} \left(h_1 - \frac{I_{pp}}{I_T} x_1 \right)\end{aligned}\quad (28)$$

$$\begin{aligned} \frac{dh_2}{dt} = & (\tilde{C}_{l_p} + \tilde{C}_{l_\delta})x_2 + \tilde{C}_{M_\alpha}(v_3x_1 - v_1x_3) + \tilde{C}_{M_{p\alpha}}(v_2 - vx_2 \cos \alpha_t) + \\ & + \tilde{C}_{M_q} \left(h_2 - \frac{I_{pp}}{I_T} x_2 \right) \end{aligned} \quad (29)$$

$$\begin{aligned} \frac{dh_3}{dt} = & (\tilde{C}_{l_p} + \tilde{C}_{l_\delta})x_3 + \tilde{C}_{M_\alpha}(v_1x_2 - v_2x_1) + \tilde{C}_{M_{p\alpha}}(v_3 - vx_3 \cos \alpha_t) + \\ & + \tilde{C}_{M_q} \left(h_3 - \frac{I_{pp}}{I_T} x_3 \right) \end{aligned} \quad (30)$$

$$\frac{dX_1}{dt} = v_1 \quad (31)$$

$$\frac{dX_2}{dt} = v_2 \quad (32)$$

$$\frac{dX_3}{dt} = v_3 \quad (33)$$

$$\frac{dx_1}{dt} = h_2x_3 - h_3x_2 \quad (34)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = h_3x_1 - h_1x_3 \quad (35)$$

$$\frac{dx_3}{dt} = h_1x_2 - h_2x_1 \quad (36)$$

$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{I_T}{I_p} (h_1x_1 + h_2x_2 + h_3x_3) \quad (37)$$

gdzie: γ – kąt obrotu pocisku względem osi \bar{x} [rad].

W kolejnym kroku przyjęto za zmienną niezależną pierwszą współrzędną położenia X_1 , w wyniku czego otrzymano następujący układ równań (38)-(50):

$$\begin{aligned} \frac{dv_1}{dX_1} = & \left[-\tilde{C}_D v_1 + \tilde{C}_{L_\alpha} (v^2 x_1 - v v_1 \cos \alpha_t) - \tilde{C}_{N_{p\alpha}} (x_2 v_3 - x_3 v_2) + \right. \\ & \left. + \tilde{C}_{N_q} (h_2 x_3 - h_3 x_2) + g_1 \right] / v_1 \end{aligned} \quad (38)$$

$$\begin{aligned} \frac{dv_2}{dX_1} = & \left[-\tilde{C}_D v_2 + \tilde{C}_{L_\alpha} (v^2 x_2 - v v_2 \cos \alpha_t) - \tilde{C}_{N_{p\alpha}} (x_3 v_1 - x_1 v_3) + \right. \\ & \left. + \tilde{C}_{N_q} (h_3 x_1 - h_1 x_3) + g_2 \right] / v_1 \end{aligned} \quad (39)$$

$$\frac{dv_3}{dX_1} = \left[-\tilde{C}_D v_3 + \tilde{C}_{L\alpha} (v^2 x_3 - v v_3 \cos \alpha_t) - \tilde{C}_{Np\alpha} (x_1 v_2 - x_2 v_1) + \tilde{C}_{Nq} (h_1 x_2 - h_2 x_1) + g_3 \right] / v_1 \quad (40)$$

$$\frac{dh_1}{dX_1} = \left[(\tilde{C}_{l_p} + \tilde{C}_{l_\delta}) x_1 + \tilde{C}_{M\alpha} (v_2 x_3 - v_3 x_2) + \tilde{C}_{Mp\alpha} (v_1 - v x_1 \cos \alpha_t) + \tilde{C}_{Mq} \left(h_1 - \frac{I_{PP}}{I_T} x_1 \right) \right] / v_1 \quad (41)$$

$$\frac{dh_2}{dX_1} = \left[(\tilde{C}_{l_p} + \tilde{C}_{l_\delta}) x_2 + \tilde{C}_{M\alpha} (v_3 x_1 - v_1 x_3) + \tilde{C}_{Mp\alpha} (v_2 - v x_2 \cos \alpha_t) + \tilde{C}_{Mq} \left(h_2 - \frac{I_{PP}}{I_T} x_2 \right) \right] / v_1 \quad (42)$$

$$\frac{dh_3}{dX_1} = \left[(\tilde{C}_{l_p} + \tilde{C}_{l_\delta}) x_3 + \tilde{C}_{M\alpha} (v_1 x_2 - v_2 x_1) + \tilde{C}_{Mp\alpha} (v_3 - v x_3 \cos \alpha_t) + \tilde{C}_{Mq} \left(h_3 - \frac{I_{PP}}{I_T} x_3 \right) \right] / v_1 \quad (43)$$

$$\frac{dt}{dX_1} = 1 / v_1 \quad (44)$$

$$\frac{dX_2}{dX_1} = v_2 / v_1 \quad (45)$$

$$\frac{dX_3}{dX_1} = v_3 / v_1 \quad (46)$$

$$\frac{dx_1}{dX_1} = (h_2 x_3 - h_3 x_2) / v_1 \quad (47)$$

$$\frac{dx_2}{dX_1} = (h_3 x_1 - h_1 x_3) / v_1 \quad (48)$$

$$\frac{dx_3}{dX_1} = (h_1 x_2 - h_2 x_1) / v_1 \quad (49)$$

$$\frac{d\gamma}{dX_1} = \left[\frac{I_T}{I_P} (h_1 x_1 + h_2 x_2 + h_3 x_3) \right] / v_1 \quad (50)$$

W układzie równań (38)-(50), opisujących w funkcji pierwszej współrzędnej położenia X_1 dynamikę ruchu środka masy pocisku, dynamikę ruchu dookoła środka masy pocisku, kinematykę środka masy pocisku, wartości cosinusów kierunkowych (34)-(36) oraz kinematykę wirowania pocisku względem osi \bar{x} , uwzględniono następujące zależności:

$$\bar{g} = g \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (51)$$

$$\frac{I_P P}{I_T} = \bar{h} \cdot \bar{x} = h_1 x_1 + h_2 x_2 + h_3 x_3 \Rightarrow p = \frac{I_T}{I_P} (\bar{h} \cdot \bar{x}) \quad (52)$$

$$v^2 = \bar{v} \cdot \bar{v} = v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 \Rightarrow v = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2} \quad (53)$$

$$\cos \alpha_t = \frac{v_1 x_1 + v_2 x_2 + v_3 x_3}{v} \quad (54)$$

$$\alpha = \arctg\left(\frac{x_2}{x_1}\right) - \arctg\left(\frac{v_2}{v_1}\right) \quad (55)$$

$$\beta = \arctg\left(\frac{x_3}{x_1}\right) - \arctg\left(\frac{v_3}{v_1}\right) \quad (56)$$

Różniczkowe równania (38)-(50) w pełni opisują ruch pocisku w powietrzu, jednak ich rozwiązanie było możliwe dopiero po wyznaczeniu równań warunków początkowych.

3. WYZNACZENIE WARUNKÓW BRZEGOWYCH DLA RÓWNAŃ RUCHU POCISKU W POWIETRZU

W kolejnym etapie obliczeń zostały zbadane parametry pocisku w chwili, gdy opuszcza on lufę broni (bez zagłębiania się w zjawiska z obszaru balistyki wewnętrznej). Oznaczając kąt podniesienia (w płaszczyźnie pionowej) jako ϕ_0 , kąt azymutu (w płaszczyźnie poziomej) jako θ_0 , a prędkość początkową pocisku jako \bar{V}_0 , można zapisać, że:

$$\bar{V}_0 = \begin{bmatrix} V_{10} \\ V_{20} \\ V_{30} \end{bmatrix} [\bar{e}_1 \quad \bar{e}_2 \quad \bar{e}_3] = V_0 \begin{bmatrix} \cos \phi_0 \cos \theta_0 \\ \sin \phi_0 \cos \theta_0 \\ \sin \theta_0 \end{bmatrix} [\bar{e}_1 \quad \bar{e}_2 \quad \bar{e}_3] \quad (57)$$

gdzie: $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ – wersory kierunkowe osi układu związanego z Ziemią.

Prędkość początkowa \bar{v}_0 względem strumienia powietrza będzie zatem wynosić [4]:

$$\bar{v}_0 = V_0 - W_0 = \begin{bmatrix} v_{10} \\ v_{20} \\ v_{30} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{e}_1 & \bar{e}_2 & \bar{e}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_{10} - W_{10} \\ V_{20} - W_{20} \\ V_{30} - W_{30} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{e}_1 & \bar{e}_2 & \bar{e}_3 \end{bmatrix} \quad (58)$$

gdzie:

$$V_0 = \sqrt{V_{10}^2 + V_{20}^2 + V_{30}^2}; \quad v_0 = \sqrt{v_{10}^2 + v_{20}^2 + v_{30}^2}$$

\bar{v}_0 – wektor prędkości początkowej względem strumienia powietrza o składowych v_{10} , v_{20} , v_{30} ;

\bar{W}_0 – wektor prędkości strumienia powietrza o składowych W_{10} , W_{20} , W_{30} .

Wersory osi układu związanego z pociskiem można zapisać następująco [1, 4]:

$$\bar{x}_0 = x_{10}\bar{e}_1 + x_{20}\bar{e}_2 + x_{30}\bar{e}_3 = \begin{bmatrix} \cos(\phi_0 + \alpha_0)\cos(\theta_0 + \beta_0) \\ \sin(\phi_0 + \alpha_0)\cos(\theta_0 + \beta_0) \\ \sin(\theta_0 + \beta_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{e}_1 & \bar{e}_2 & \bar{e}_3 \end{bmatrix} \quad (59)$$

$$\bar{y}_0 = \frac{1}{\sqrt{Q}} \begin{bmatrix} -\cos^2(\theta_0 + \beta_0)\sin(\phi_0 + \alpha_0)\cos(\phi_0 + \alpha_0) \\ \cos^2(\theta_0 + \beta_0)\cos(\phi_0 + \alpha_0) + \sin^2(\theta_0 + \beta_0) \\ -\sin(\theta_0 + \beta_0)\cos(\theta_0 + \beta_0)\sin(\phi_0 + \alpha_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{e}_1 & \bar{e}_2 & \bar{e}_3 \end{bmatrix} \quad (60)$$

$$\bar{z}_0 = \frac{1}{\sqrt{Q}} \begin{bmatrix} -\sin(\theta_0 + \beta_0) \\ 0 \\ \cos(\theta_0 + \beta_0)\cos(\phi_0 + \alpha_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{e}_1 & \bar{e}_2 & \bar{e}_3 \end{bmatrix} \quad (61)$$

gdzie:

$$Q = \sin^2(\theta_0 + \beta_0) + \cos^2(\theta_0 + \beta_0)\cos^2(\phi_0 + \alpha_0) \quad (62)$$

α_0 – początkowy kąt pochylenia osi pocisku względem stycznej do toru (w płaszczyźnie pionowej), w rad;

β_0 – kąt początkowy odchylenia osi pocisku względem stycznej do toru (w płaszczyźnie poziomej), w rad.

Wektor prędkości początkowej $\frac{d\bar{x}_0}{dt}$ można zapisać jako wynik iloczynu wektorowego:

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{x}_0}{dt} &= (\bar{\omega}_0)_{xyz} \times \bar{x}_0 = \begin{vmatrix} \bar{x}_0 & \bar{y}_0 & \bar{z}_0 \\ \omega_{x0} & \omega_{y0} & \omega_{z0} \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = [\omega_{z0} \bar{y}_0 - \omega_{y0} \bar{z}_0] = \\ &= \begin{bmatrix} \omega_{z0} y_{10} - \omega_{y0} z_{10} \\ \omega_{z0} y_{20} - \omega_{y0} z_{20} \\ \omega_{z0} y_{30} - \omega_{y0} z_{30} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{x}_{10} \\ \dot{x}_{20} \\ \dot{x}_{30} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (63)$$

gdzie: ω_{y0} ω_{z0} – wartości początkowe poprzecznych prędkości kątowych względem \bar{y}_0 i \bar{z}_0 ;

$$(\bar{\omega}_0)_{xyz} = \omega_{x0} \bar{x}_0 + \omega_{y0} \bar{y}_0 + \omega_{z0} \bar{z}_0$$

Po podstawieniu składowych wektorów \bar{y}_0 i \bar{z}_0 do równania (63) otrzymano:

$$\dot{x}_{10} = \frac{1}{\sqrt{Q}} [\omega_{y0} \sin(\theta_0 + \beta_0) - \omega_{z0} \cos^2(\theta_0 + \beta_0) \sin(\phi_0 + \alpha_0) \cos(\phi_0 + \alpha_0)] \quad (64)$$

$$\dot{y}_{20} = \frac{1}{\sqrt{Q}} [\omega_{y0} \cos^2(\theta_0 + \beta_0) \cos(\phi_0 + \alpha_0) + \omega_{z0} \sin^2(\theta_0 + \beta_0)] \quad (65)$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_{30} &= \frac{1}{\sqrt{Q}} [-\omega_{y0} \cos(\theta_0 + \beta_0) \cos(\phi_0 + \alpha_0) - \omega_{z0} \sin(\theta_0 + \beta_0) \\ &\quad \cos(\theta_0 + \beta_0) \sin(\phi_0 + \alpha_0)] \end{aligned} \quad (66)$$

Następnie korzystając z wcześniej podanej zależności na wektor krętu całkowitego (14), wyznaczono początkową wartość wektora \bar{h}_0 :

$$\bar{h}_0 = \begin{bmatrix} h_{10} \\ h_{20} \\ h_{30} \end{bmatrix} [\bar{e}] = \begin{bmatrix} \frac{I_P p_0}{I_T} x_{10} + x_{20} \dot{x}_{30} - x_{30} \dot{x}_{20} \\ \frac{I_P p_0}{I_T} x_{20} + x_{30} \dot{x}_{10} - x_{10} \dot{x}_{30} \\ \frac{I_P p_0}{I_T} x_{30} + x_{10} \dot{x}_{20} - x_{20} \dot{x}_{10} \end{bmatrix} [\bar{e}_1 \quad \bar{e}_2 \quad \bar{e}_3] \quad (67)$$

gdzie:

\bar{p}_0 – początkowa osiowa prędkość kątowa (rad/s).

Na koniec wyznaczono wartość początkową \bar{h}_0 , podstawiając do równania (67) wartości z równań (59)-(61) i (64)-(66).

4. WNIOSKI

Opisany w pracy „Modern Exterior Ballistics” Roberta L. McCoya model ruchu punktu materialnego po weryfikacji może stanowić podstawę do wyprowadzenia wszystkich równań ruchu pocisku jako bryły sztywnej nieodkształcalnej o sześciu stopniach swobody. Przedstawiony model matematyczny uwzględnia działanie sił aerodynamicznych (oporu czołowego powietrza, Magnusa, nośnej, tłumiącej), momentów (tarcia powierzchniowego, obrotowego powodowanego brzechwą, wywracającego, Magnusa, tłumiącego) oraz siły grawitacji. W wyprowadzonych równaniach wzięto również pod uwagę zmianę gęstości i temperatury powietrza w funkcji wysokości zgodnie z atmosferą standardową ICAO. Otrzymany model matematyczny został zweryfikowany poprzez rozwiązanie układu równań różniczkowych z warunkami brzegowymi metodą Rungego–Kutty rzędu czwartego z automatycznie dobieranym krokiem całkowania. Wyniki otrzymane w przeprowadzonych symulacjach pozwalają stwierdzić, że model ruchu bryły sztywnej o sześciu stopniach swobody najlepiej odzwierciedla zachowanie pocisku w czasie lotu. Dzięki temu, że do zdefiniowania orientacji osi symetrii pocisku względem nieruchomego układu odniesienia zostały wykorzystane cosinusy kątowe, dobór wartości kąta natarcia podczas przeprowadzonych symulacji był dowolny. Oczywiście, poziom zgodności wyników symulacji z rzeczywistym zachowaniem pocisku jest uwarunkowany danymi wejściowymi (warunki początkowe, momenty bezwładności, charakterystyki aerodynamiczne pocisku).

Praca naukowa finansowana ze środków na naukę w latach 2009-2011 jako projekt rozwojowy nr O R00001908.

LITERATURA

- [1] Banach S., *Mechanika*, PWN, Warszawa, 1956.
- [2] Carlucci D.E., Jacobson S.S., *Ballistics: Theory and Design of Guns and Ammunition*, CRC Press Taylor & Francis Group 2007.
- [3] Cavcar M., *The International Standard Atmosphere (ISA)*, Anadolu University, 26470 Eskisehir, Turkey.
- [4] *Matematyka dla wydziałów budowlanych i mechanicznych*, t. 1, pod red. Otto E., PWN, Warszawa, 1977.
- [5] McCoy R.L., *Modern Exterior Ballistics. The Launch and Flight Dynamics of Symmetric Projectiles*, Schiffer Military History, Atglen, PA, 1999.
- [6] Polska norma PN-78 N-03100, *Atmosfera wzorcowa*.

Verification of the Mathematical Model Determining a Projectile Six-Degree-of-Freedom Motion in the Air

Anna FLORIAŃCZYK

Abstract. The physical and mathematical models described in the “Modern Exterior Ballistics” [5] by Robert L. McCoy were verified. All the motion equations of projectile modelled as a stiff non-deformable body of six degrees of freedom were derived. The presented mathematical model takes into account the effect of the aerodynamic forces, i.e. air resistance, Magnus force, aerodynamic lift, the effect of moment, i.e. rolling moment, yawing moment, pitching moment, and the effect of the gravitational force. In the derived formulae also the change of air density and temperature was taken into consideration. The obtained mathematical model has proved to be correct. Therefore, it was utilised in the subroutine, which made it possible to simulate the motion of projectile as a stiff non-deformable body.

Keywords: mechanics, external ballistics, mathematical model of motion, projectile

