



Analiza stabilności sterowanej girokamery umieszczonej na pokładzie obiektu latającego*

Izabela KRZYSZTOFIK, Zbigniew KORUBA

*Politechnika Świętokrzyska,
Al.1000-lecia PP 7, 25-314 Kielce*

Streszczenie. W pracy przedstawiono model matematyczny dynamiki kamery umieszczonej na pokładzie obiektu latającego sterowanej i stabilizowanej giroskopowo. Zadaniem kamery jest obserwacja terenu, identyfikacja i śledzenie wykrytych czy też wskazanych na nim obiektów. Do niezawodnej i precyzyjnej pracy kamery oraz wyznaczenia sterowań, niezbędne jest poznanie jej obszarów stabilności. Wyniki badań przedstawione są w graficznej postaci.

Słowa kluczowe: girokamera, giroskop sterowany, stabilność, dynamika

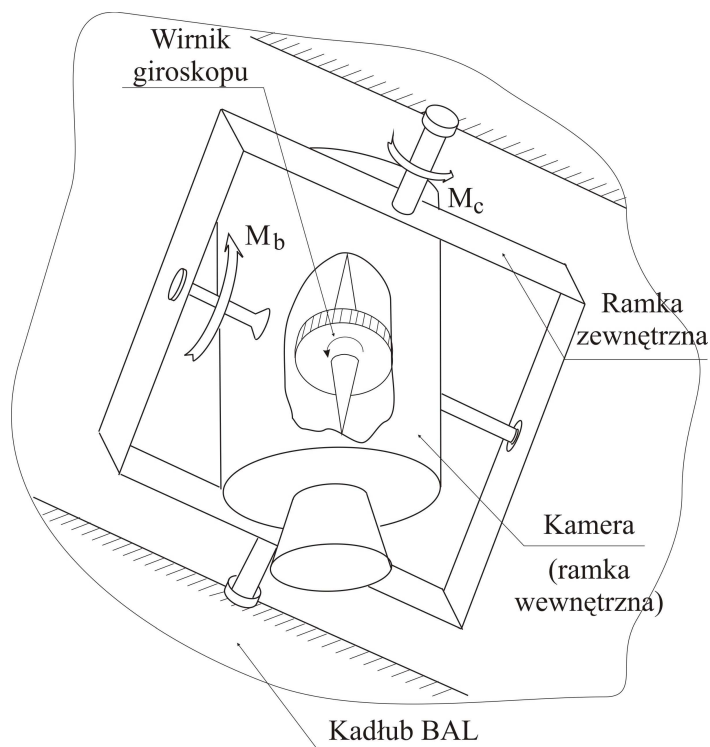
1. WPROWADZENIE

We współczesnych obiektach latających zaliczanych do broni precyzyjnego rażenia [3], takich jak np.: bezzałogowe aparaty latające, bomby sterowane czy też przeciwpancerne pociski kierowane trzeciej generacji, stosowane są bardzo często głowice obserwacyjno-śledzące wyposażone w kamery tele- i termowizyjne. Niezbędne jest zapewnienie im stabilnej i niezawodnej pracy podczas ruchów programowych (obserwacja powierzchni Ziemi) i nadeżnych (śledzenie zidentyfikowanego lub wskazanego przez operatora obiektu). Urządzeniem mogącym sprostać takim wymaganiom jest sterowany giroskop mechaniczny o trzech stopniach swobody, w który wmontowana jest rozważana kamera.

* Artykuł był prezentowany na VIII Międzynarodowej Konferencji Uzbrojeniowej nt. „Naukowe aspekty techniki uzbrojenia i bezpieczeństwa”, Pułtusk, 6-8 października 2010 r.

W niniejszej pracy kamera stanowi ramkę wewnętrzną giroskopu, natomiast sam giroskop – układ wykonawczy sterowania kamery, a także jej układ stabilizujący. Giroskop jest zatem elementem decydującym o skuteczności i niezawodności działania rozpatrywanego układu [2, 5].

Jednym z ważniejszych zadań jest ustalenie dopuszczalnych obszarów zmienności zmiennych stanu giroskopu sterowanego. Na rys. 1 pokazany jest widok ogólny girokamery zainstalowanej na pokładzie obiektu latającego. W pracy ograniczono się do badania stabilności giroskopu z uwzględnieniem bezwładności jego ramek, przy czym założono, że ramkę wewnętrzną stanowi w nim kamera. Należy podkreślić, że gabaryty samej kamery mogą znacznie się różnić, w zależności od tego, czy będzie to kamera telewizyjna (nieduża masa i wymiary), czy też termowizyjna (duże gabaryty). Dlatego też konieczne jest zbadanie zakresów stabilności giroskopu w zależności od zastosowanego typu kamery zainstalowanej w ramce wewnętrznej.



Rys. 1. Widok ogólny girokamery zainstalowanej na pokładzie obiektu latającego

Fig. 1. General view of a gyrocamera placed on board of flying object

2. MODEL MATEMATYCZNY GIROKAMERY STEROWANEJ

Na podstawie rys. 2 i przyjętych na nim układów współrzędnych oraz zakładając, że:

a) giroskop jest nieastatyczny ($l_g = 0$),

b) kinematyczne oddziaływanie podłoża jest znikome, czyli prędkości kątowe obiektu latającego p^*, q^*, r^* są równe zero,

otrzymamy następujący układ równań ruchu girokamery [3]:

$$(J_{y_2} + J_{y_3})\ddot{\vartheta}_{gk} + \eta_b \dot{\vartheta}_{gk} + \frac{1}{2}(J_{x_2} + J_{x_3} - J_{z_2})\dot{\psi}_{gk}^2 \sin 2\vartheta_{gk} - J_{z_3} n_{gk} \dot{\psi}_{gk} \cos \vartheta_{gk} = M_b \quad (1a)$$

$$\begin{aligned} & [J_{x_1} + J_{x_2} + J_{x_3} + (J_{z_2} - J_{x_2} - J_{x_3}) \sin^2 \vartheta_{gk}] \ddot{\psi}_{gk} + \eta_c \dot{\psi}_{gk} \\ & - \frac{1}{2}(J_{x_2} + J_{x_3} - J_{z_2}) \dot{\psi}_{gk} \dot{\vartheta}_{gk} \sin 2\vartheta_{gk} + J_{z_3} n_{gk} \dot{\vartheta}_{gk} \cos \vartheta_{gk} = M_c \end{aligned} \quad (1b)$$

gdzie: $J_{x_1}, J_{y_1}, J_{z_1}$ – momenty bezwładności ramki zewnętrznej girokamery względem osi $O_g x_1, O_g y_1, O_g z_1$, odpowiednio;

$J_{x_2}, J_{y_2}, J_{z_2}$ – momenty bezwładności ramki wewnętrznej girokamery względem osi $O_g x_2, O_g y_2, O_g z_2$, odpowiednio;

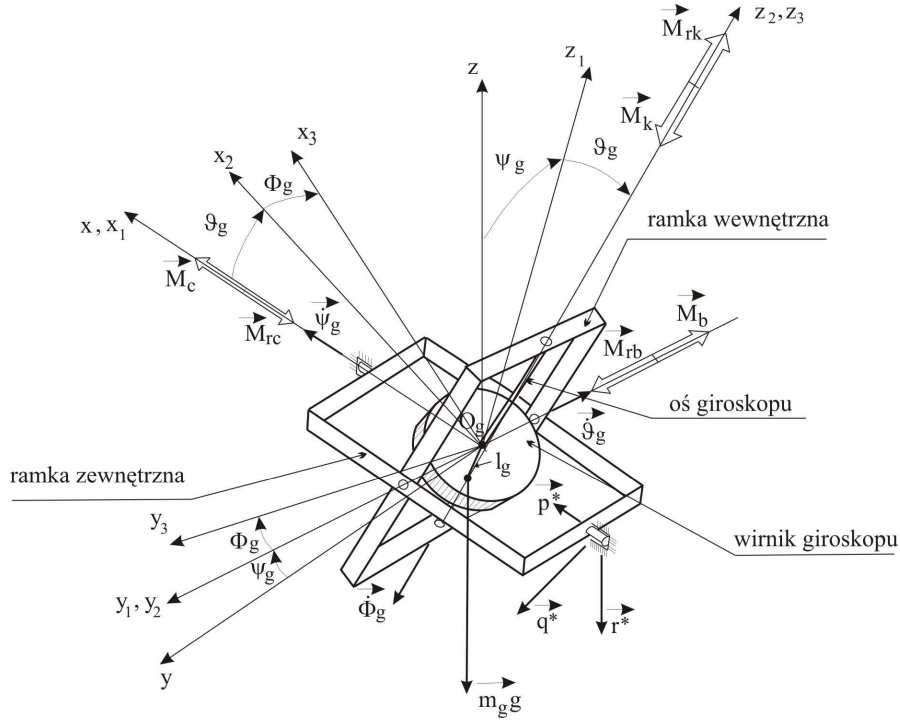
$J_{x_3}, J_{y_3}, J_{z_3}$ – momenty bezwładności wirnika girokamery względem osi $O_g x_3, O_g y_3, O_g z_3$, odpowiednio;

η_b, η_c – współczynniki tarcia w łożyskach ramek wewnętrznej i zewnętrznej, odpowiednio;

n_{gk} – prędkość obrotów własnych wirnika;

$\vartheta_{gk}, \psi_{gk}$ – kąty obrotu ramek wewnętrznej i zewnętrznej girokamery, odpowiednio;

M_b, M_c – momenty sterujące przyłożone do ramek wewnętrznej i zewnętrznej girokamery.



Rys. 2. Giroskop sterowany wraz z przyjętymi układami współrzędnych

Fig. 2. Control gyroscope with the adopted coordinate systems

Przyjmując, że momenty sterujące $M_b, M_c = 0$ i wprowadzając oznaczenia:

$$J_y = J_{y_2} + J_{y_3}, \quad J_{xz} = J_{x_2} + J_{x_3} - J_{z_2}, \quad J_x = J_{x_1} + J_{x_2} + J_{x_3}$$

dokonyjemy przekształceń równań (1) do następującej postaci:

$$\ddot{\vartheta}_{gk} = -\frac{\eta_b}{J_y} \dot{\vartheta}_{gk} - \frac{1}{2} \frac{J_{xz}}{J_y} \dot{\psi}_{gk}^2 \sin 2\vartheta_{gk} + \frac{J_{z_3} n_{gk}}{J_y} \dot{\psi}_{gk} \cos \vartheta_{gk} \quad (2a)$$

$$\ddot{\psi}_{gk} = -\frac{\eta_c}{(J_x - J_{xz} \sin^2 \vartheta_{gk})} \dot{\psi}_{gk} + \frac{1}{2} \frac{J_{xz}}{(J_x - J_{xz} \sin^2 \vartheta_{gk})} \dot{\psi}_{gk} \dot{\vartheta}_{gk} \sin 2\vartheta_{gk} + \quad (2b)$$

$$-\frac{J_{z_3} n_{gk}}{(J_x - J_{xz} \sin^2 \vartheta_{gk})} \dot{\vartheta}_{gk} \cos \vartheta_{gk}$$

Wprowadźmy zmienne stanu:

$$x_1 = \vartheta_{gk}, x_2 = \frac{d\vartheta_{gk}}{d\tau}, x_3 = \psi_{gk}, x_4 = \frac{d\psi_{gk}}{d\tau} \quad (3)$$

Otrzymujemy następujący układ równań:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(x) \quad (4)$$

gdzie:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ -\frac{\eta_b}{J_y} x_2 - \frac{1}{2} \frac{J_{xz}}{J_y} x_4^2 \sin 2x_1 + \frac{J_{z_3} n_{gk}}{J_y} x_4 \cos x_1 \\ x_4 \\ -\frac{\eta_c x_4}{(J_x - J_{xz} \sin^2 x_1)} + \frac{1}{2} \frac{J_{xz} x_2 x_4 \sin 2x_1}{(J_x - J_{xz} \sin^2 x_1)} - \frac{J_{z_3} n_{gk} x_2 \cos x_1}{(J_x - J_{xz} \sin^2 x_1)} \end{bmatrix}$$

Jako funkcję Lapunowa układu przyjmujemy funkcję zaproponowaną przez Krasowskiego o postaci [1, 4, 6]:

$$\mathbf{V}(x) = \mathbf{F}^T(x) \mathbf{F}(x) \quad (5)$$

Pochodna funkcji Lapunowa wynosi:

$$\dot{\mathbf{V}}(x) = \mathbf{F}^T(x) [\mathbf{A} + \mathbf{A}^T] \mathbf{F}(x) \quad (6)$$

Wyznaczamy macierz Jacobiego układu:

$$\mathbf{A} = \frac{\partial \mathbf{F}(x)}{\partial x} \quad (7)$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} = 0, \frac{\partial f_1}{\partial x_2} = 1, \frac{\partial f_1}{\partial x_3} = 0, \frac{\partial f_1}{\partial x_4} = 0$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_1} = \frac{-(J_{xz} x_4^2 \cos 2x_1 + J_{z_3} n_{gk} x_4 \sin x_1)}{J_y}, \frac{\partial f_2}{\partial x_2} = -\frac{\eta_b}{J_y}, \frac{\partial f_2}{\partial x_3} = 0$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_4} = \frac{-J_{xz} x_4 \sin 2x_1 + J_{z_3} n_{gk} \cos x_1}{J_y}$$

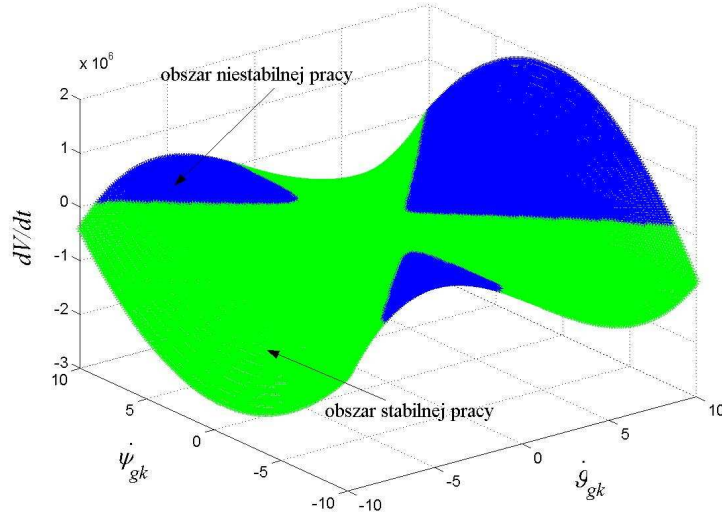
$$\frac{\partial f_3}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial f_3}{\partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial f_3}{\partial x_3} = 0, \quad \frac{\partial f_3}{\partial x_4} = 1$$

$$\frac{\partial f_4}{\partial x_1} = \frac{-J_{xz} \eta_c x_4 \sin 2x_1 + 0.5 J_{xz}^2 x_2 x_4 \sin^2 2x_1 + J_{xz} J_{z_3} n_{gk} x_2 \cos x_1 \sin 2x_1}{(J_x - J_{xz} \sin^2 x_1)^2} +$$

$$+ \frac{J_{xz} x_2 x_4 \cos 2x_1 - J_{z_3} n_{gk} x_2 \sin x_1}{(J_x - J_{xz} \sin^2 x_1)}$$

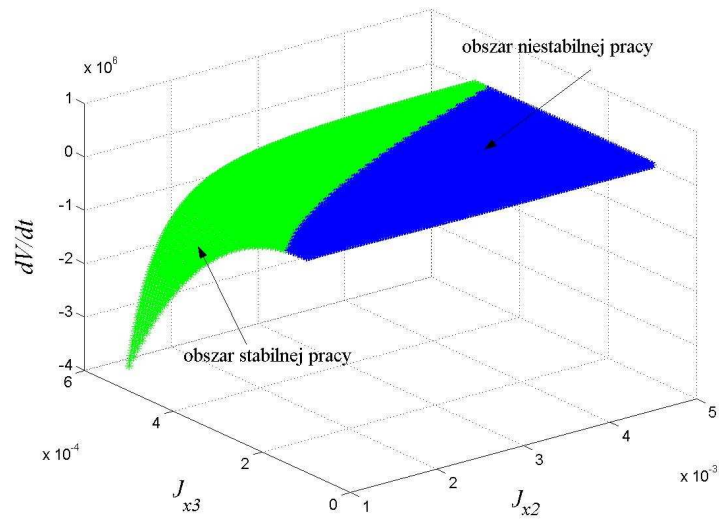
$$\frac{\partial f_4}{\partial x_2} = \frac{0.5 J_{xz} x_4 \sin 2x_1 - J_{z_3} n_{gk} \cos x_1}{(J_x - J_{xz} \sin^2 x_1)},$$

$$\frac{\partial f_4}{\partial x_3} = 0, \quad \frac{\partial f_4}{\partial x_4} = \frac{-\eta_c + 0.5 J_{xz} x_2 \sin 2x_1}{(J_x - J_{xz} \sin^2 x_1)}$$



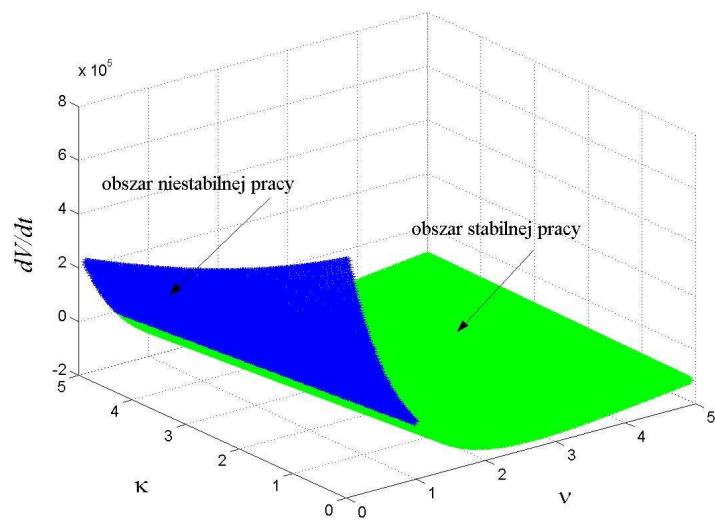
Rys. 3. Obszary stabilności pracy girokamery dla różnych zakresów wartości prędkości kątowych $\dot{\vartheta}_{gk}$ i $\dot{\psi}_{gk}$ przy $\vartheta_{gk} = \psi_{gk} = 1,0 \text{ rad}$

Fig. 3. Areas of work stability of the gyrocamera for different values of angular velocity $\dot{\vartheta}_{gk}$ and $\dot{\psi}_{gk}$ for $\vartheta_{gk} = \psi_{gk} = 1,0 \text{ rad}$



Rys. 4. Obszary stabilności pracy girokamery dla różnych zakresów wartości momentów bezwładności wirnika J_{x_3} i kamery J_{x_2}

Fig. 4. Areas of work stability of the gyrocamera for different values of the moments of inertia of rotor J_{x_3} and camera J_{x_2}



Rys. 5. Obszary stabilności pracy girokamery dla różnych zakresów wartości współczynników $\kappa = J_{x_3} / J_{z_3}$ i $\nu = J_{x_2} / J_{z_2}$

Fig. 5. Areas of work stability of the gyrocamera for different values of coefficients $\kappa = J_{x_3} / J_{z_3}$ and $\nu = J_{x_2} / J_{z_2}$

3. STABILNOŚĆ GIROKAMERY STEROWANEJ

Przyjmijmy, że sterowania przyłożone do girokamery mają następującą postać:

$$M_b = -k_b \vartheta_{gk} + k_c \psi_{gk} - h_g \dot{\vartheta}_{gk} \quad (8a)$$

$$M_c = -k_c \vartheta_{gk} - k_b \psi_{gk} - h_g \dot{\psi}_{gk} \quad (8b)$$

Po podstawieniu wielkości M_b i M_c z wyrażeń (8) do równań (1) i odpowiednich przekształceniach mamy:

$$\ddot{\vartheta}_{gk} = -\frac{(\eta_b + h_g)}{J_y} \dot{\vartheta}_{gk} - \frac{1}{2} \frac{J_{xz}}{J_y} \dot{\psi}_{gk}^2 \sin 2\vartheta_{gk} + \frac{J_{z_3} n_{gk}}{J_y} \dot{\psi}_{gk} \cos \vartheta_{gk} - \frac{k_b}{J_y} \vartheta_{gk} + \frac{k_c}{J_y} \psi_{gk} \quad (9a)$$

$$\begin{aligned} \ddot{\psi}_{gk} = & -\frac{(\eta_c + h_g)}{(J_x - J_{xz} \sin^2 \vartheta_g)} \dot{\psi}_{gk} + \frac{1}{2} \frac{J_{xz}}{(J_x - J_{xz} \sin^2 \vartheta_{gk})} \dot{\psi}_{gk} \dot{\vartheta}_{gk} \sin 2\vartheta_{gk} + \\ & -\frac{J_{z_3} n_{gk}}{(J_x - J_{xz} \sin^2 \vartheta_{gk})} \dot{\vartheta}_{gk} \cos \vartheta_{gk} - \frac{k_c \vartheta_{gk} + k_b \psi_{gk}}{(J_x - J_{xz} \sin^2 \vartheta_{gk})} \end{aligned} \quad (9b)$$

Wprowadzamy zmienne stanu:

$$x_1 = \vartheta_{gk}, x_2 = \frac{d\vartheta_{gk}}{d\tau}, x_3 = \psi_{gk}, x_4 = \frac{d\psi_{gk}}{d\tau} \quad (10)$$

Otrzymujemy następujący układ równań:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(x) \quad (11)$$

gdzie:

$$\dot{\mathbf{x}} = [\dot{x}_1 \quad \dot{x}_2 \quad \dot{x}_3 \quad \dot{x}_4]^T$$

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ -\frac{(\eta_b + h_g)}{J_y} x_2 - \frac{1}{2} \frac{J_{xz}}{J_y} x_4^2 \sin 2x_1 + \frac{J_{z_3} n_{gk}}{J_y} x_4 \cos x_1 - \frac{k_b}{J_y} x_1 + \frac{k_c}{J_y} x_3 \\ x_4 \\ -\frac{(\eta_c + h_g) x_4}{(J_x - J_{xz} \sin^2 x_1)} + \frac{1}{2} \frac{J_{xz} x_2 x_4 \sin 2x_1}{(J_x - J_{xz} \sin^2 x_1)} - \frac{J_{z_3} n_{gk} x_2 \cos x_1}{(J_x - J_{xz} \sin^2 x_1)} - \frac{k_c x_1 + k_b x_3}{(J_x - J_{xz} \sin^2 x_1)} \end{bmatrix}$$

Składowe macierzy Jacobiego dla układu (9) są następujące:

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial f_1}{\partial x_2} = 1, \quad \frac{\partial f_1}{\partial x_3} = 0, \quad \frac{\partial f_1}{\partial x_4} = 0$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_1} = \frac{-(J_{xz} x_4^2 \cos 2x_1 + J_{z_3} n_g x_4 \sin x_1 + k_b)}{J_y}, \quad \frac{\partial f_2}{\partial x_2} = -\frac{(\eta_b + h_g)}{J_y}, \quad \frac{\partial f_2}{\partial x_3} = \frac{k_c}{J_y}$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_4} = \frac{-J_{xz} x_4 \sin 2x_1 + J_{z_3} n_{gk} \cos x_1}{J_y}$$

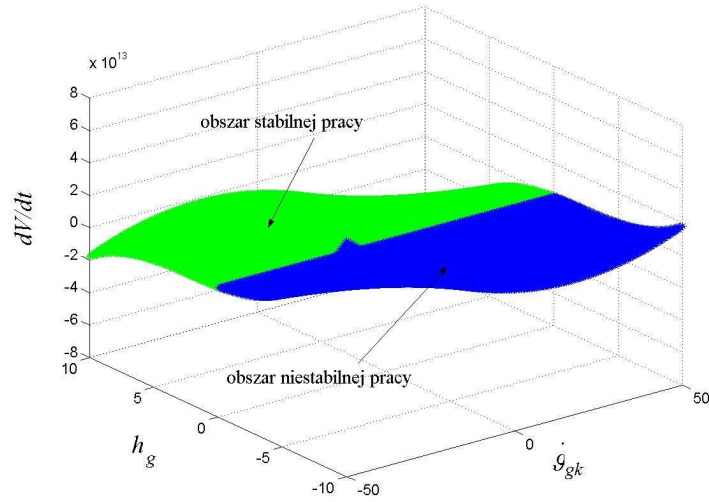
$$\frac{\partial f_3}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial f_3}{\partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial f_3}{\partial x_3} = 0, \quad \frac{\partial f_3}{\partial x_4} = 1$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_4}{\partial x_1} = & -\frac{J_{xz}(\eta_c + h_g)x_4 \sin 2x_1}{(J_x - J_{xz} \sin^2 x_1)^2} + \frac{J_{xz}x_2x_4 \cos 2x_1}{(J_x - J_{xz} \sin^2 x_1)} + \frac{1}{2} \frac{J_{xz}^2 x_2 x_4 \sin^2 2x_1}{(J_x - J_{xz} \sin^2 x_1)^2} + \\ & -\frac{J_{z_3} n_{gk} x_2 \sin x_1}{(J_x - J_{xz} \sin^2 x_1)} + \frac{J_{xz} J_{z_3} n_{gk} x_2 \cos x_1 \sin 2x_1}{(J_x - J_{xz} \sin^2 x_1)^2} - \frac{k_c}{(J_x - J_{xz} \sin^2 x_1)} + \\ & -\frac{k_c J_{xz} x_1 \sin 2x_1}{(J_x - J_{xz} \sin^2 x_1)^2} - \frac{k_b J_{xz} x_3 \sin 2x_1}{(J_x - J_{xz} \sin^2 x_1)^2} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial f_4}{\partial x_2} = \frac{0.5 J_{xz} x_4 \sin 2x_1 - J_{z_3} n_{gk} \cos x_1}{(J_x - J_{xz} \sin^2 x_1)}$$

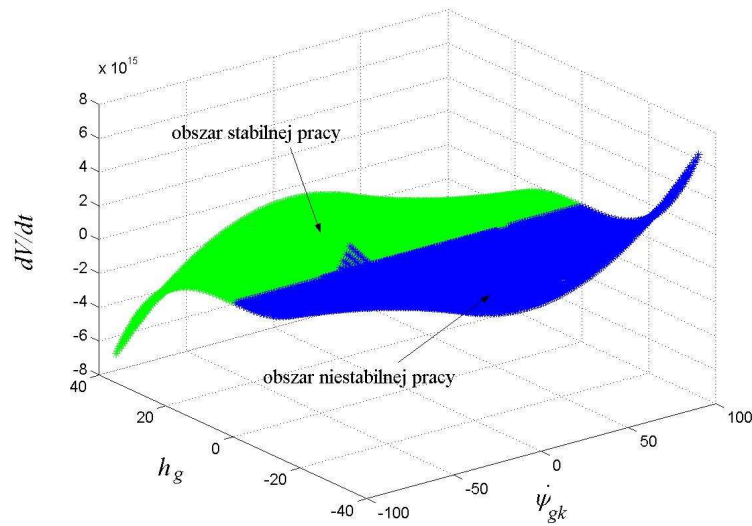
$$\frac{\partial f_4}{\partial x_3} = 0$$

$$\frac{\partial f_4}{\partial x_4} = \frac{-(\eta_c + h_g) + 0.5 J_{xz} x_2 \sin 2x_1}{(J_x - J_{xz} \sin^2 x_1)}$$



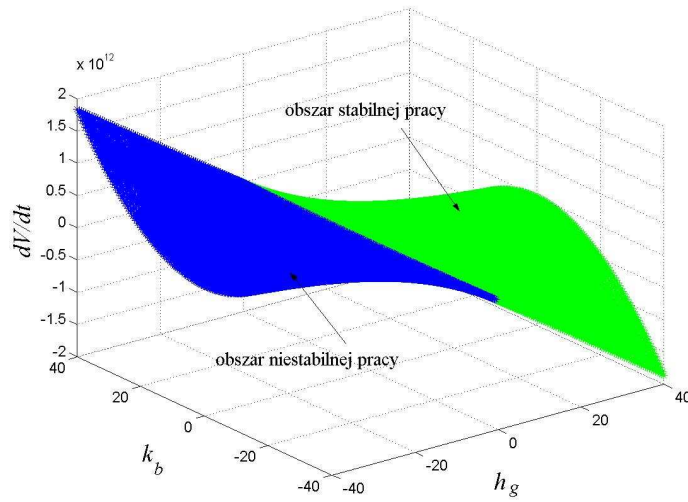
Rys. 6. Obszary stabilności pracy girokamery dla różnych zakresów wartości prędkości kątowej $\dot{\vartheta}_{gk}$ i współczynnika h_g przy $\vartheta_{gk} = \psi_{gk} = 5,0 \text{ rad}$, $\dot{\psi}_{gk} = 0,0 \text{ rad/s}$

Fig. 6. Areas of work stability of the gyrocamera for different values of angular velocity $\dot{\vartheta}_{gk}$ and coefficient h_g for $\vartheta_{gk} = \psi_{gk} = 5,0 \text{ rad}$, $\dot{\psi}_{gk} = 0,0 \text{ rad/s}$



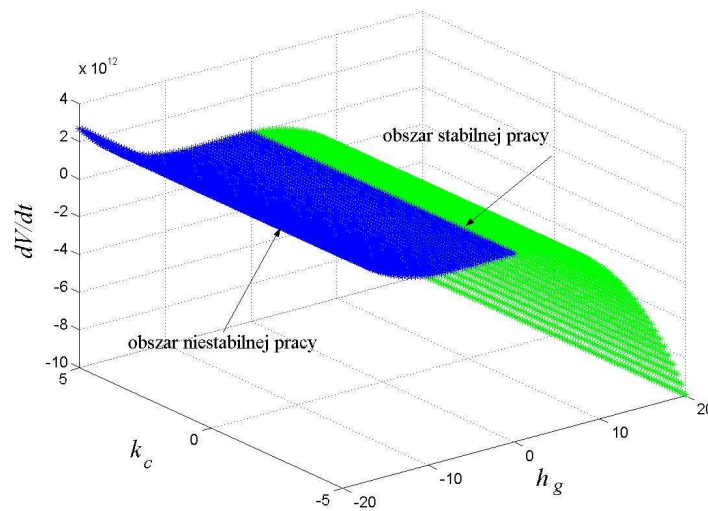
Rys. 7. Obszary stabilności pracy girokamery dla różnych zakresów wartości prędkości kątowej $\dot{\psi}_{gk}$ i współczynnika h_g przy $\vartheta_{gk} = \psi_{gk} = 5,0 \text{ rad}$, $\dot{\vartheta}_{gk} = 0,0 \text{ rad/s}$

Fig. 7. Areas of work stability of the gyrocamera for different values of angular velocity $\dot{\psi}_{gk}$ and coefficient h_g for $\vartheta_{gk} = \psi_{gk} = 5,0 \text{ rad}$, $\dot{\vartheta}_{gk} = 0,0 \text{ rad/s}$



Rys. 8. Obszary stabilności pracy girokamery dla różnych zakresów wartości współczynników k_b i h_g przy $\vartheta_{gk} = \psi_{gk} = 1,0 \text{ rad}$, $\dot{\vartheta}_{gk} = \dot{\psi}_{gk} = 0,0 \text{ rad/s}$

Fig. 8. Areas of work stability of the gyrocamera for different values of coefficients k_b and h_g for $\vartheta_{gk} = \psi_{gk} = 1,0 \text{ rad}$, $\dot{\vartheta}_{gk} = \dot{\psi}_{gk} = 0,0 \text{ rad/s}$



Rys. 9. Obszary stabilności pracy girokamery dla różnych zakresów wartości współczynników k_c i h_g przy $\vartheta_{gk} = \psi_{gk} = 1,0 \text{ rad}$, $\dot{\vartheta}_{gk} = \dot{\psi}_{gk} = 5,0 \text{ rad/s}$

Fig. 9. Areas of work stability of the gyrocamera for different values of coefficients k_c and h_g for $\vartheta_{gk} = \psi_{gk} = 1,0 \text{ rad}$, $\dot{\vartheta}_{gk} = \dot{\psi}_{gk} = 5,0 \text{ rad/s}$

4. WNIOSKI

Otrzymane wyniki rozważań teoretycznych i badań symulacyjnych pokazały, że przy niewłaściwie dobranych parametrach masowych i dynamicznych girokamery, można przy różnych zakresach wychyleń i prędkości kątowych osi girokamery wejść w obszar niestabilnej jej pracy. Przedstawiają to wykresy na rys. 3-5. Podobnie przedstawia się sytuacja w przypadku doboru współczynników wzmocnień w układzie sterowania girokamerą. Można to prześledzić na rys. 6-9. Należy zatem, projektując układ girokamery, dobierać tylko takie jej parametry i wprowadzać takie ograniczenia na zmienne jej stanu, by uniknąć obszarów niestabilnej pracy girokamery. Wspomniane obszary wpływają bowiem bardzo niekorzystnie na stabilność przekazywanego obrazu, czy też śledzenia przez girokamerę wskazanego obiektu naziemnego.

LITERATURA

- [1] Kaczorek T., Dzieliński A., Dąbrowski W., Łopatka R., *Podstawy teorii sterowania*, WNT, Warszawa, 2006.
- [2] Koruba Z., *Elementy teorii i zastosowań giroskopu sterowanego, Monografie, Studia, Rozprawy M7*, Politechnika Świętokrzyska, s. 241, Kielce, 2008.
- [3] Koruba Z., Osiecki J.W., *Budowa, dynamika i nawigacja wybranych broni precyzyjnego rażenia, Podręcznik akademicki*, Wyd. Politechniki Świętokrzyskiej, s. 484, Kielce, 2006.
- [4] Machowski J., Białek J., Bumby J.R., *Power System Dynamics – Stability and Control (2nd Edition)*, 2008 John Wiley & Sons.
- [5] Nizioł J., *Dynamika żyroskopów ze szczególnym uwzględnieniem żyroskopu całkowitego w nieliniowym ujęciu deterministycznym i probabilistycznym (rozprawa habilitacyjna)*, *Zeszyty Naukowe Politechniki Krakowskiej, Mechanika*, z. 48, Kraków, 1975.
- [6] Radziszewski B., *Elementy teorii stabilności*. Monografia nr 19, Wyd. Politechniki Świętokrzyskiej, Kielce, 1999.

Stability Analysis of the Control Gyrocamera Placed on Board of a Flying Object

Izabela KRZYSZTOFIK, Zbigniew KORUBA

Abstract. In this paper was presented concept, a mathematical model of dynamic camera which is controlled and stabilized using a gyroscope and placed on board a flying object. The task of the camera is monitoring the land, identification and tracking of detected or indicated objects on it. For reliable and precise camera work and designate controls, it is necessary to know the areas of stability. The results are presented in graphical form.

Keywords: gyrocamera, control gyroscope, stability, dynamics

