



Analiza stabilności nieliniowego układu giroskopowego do napędu koordynatora celu przeciwlotniczego pocisku raketowego*

Zbigniew KORUBA, Izabela KRZYSZTOFIK
Politechnika Świętokrzyska, Al.1000-lecia PP 7, 25-314 Kielce

Streszczenie. W opracowaniu przedstawiono analizę stabilności metodą Lapunowa nieliniowego układu giroskopowego, zarówno swobodnego, jak i sterowanego. Sterowany układ giroskopowy bardzo często stanowi napęd w optycznym koordynatorze celu samonaprowadzającego pocisku raketowego, dlatego też szczególnie istotne jest poznanie zakresów stabilnej jego pracy. Jako funkcję Lapunowa przyjęto funkcję Krasowskiego. Obszary stabilności przedstawiono w postaci graficznej.

Słowa kluczowe: mechatronika, giroskop, stabilność, koordynator celu

1. WPROWADZENIE

Optyczne koordynatory celu są podstawowym zespołem głowic pocisków samonaprowadzających się na cel [5]. Układem napędowym koordynatora jest giroskop zawieszony na przegubie Cardana [3, 4, 8]. Jego zadaniem jest wyznaczanie na bieżąco położenia tzw. linii obserwacji celu. Oś giroskopu jest osią optyczną układu poszukiwania i śledzenia celu. Przykładając momenty sterujące do wirującego krążka giroskopu, można zmieniać położenie jego osi w przestrzeni i tym samym realizować ruchy programowe osi optycznego koordynatora celu.

* Artykuł był prezentowany na VIII Międzynarodowej Konferencji Uzbrojeniowej nt. „Naukowe aspekty techniki uzbrojenia i bezpieczeństwa”, Pułtusk, 6-8 października 2010 r.

Ustalenie dopuszczalnych obszarów zmienności zmiennych stanu giroskopu pozwala na realizację programowego ruchu osi giroskopu lub utrzymywanie zadanego położenia osi w przestrzeni.

2. STABILNOŚĆ NIELINIOWEGO GIROSKOPU SWOBODNEGO

Weźmy pod uwagę nieliniowe równania giroskopu swobodnego [3] o postaci:

$$\frac{d^2\vartheta_g}{d\tau^2} = -\bar{b}_b \frac{d\vartheta_g}{d\tau} - \frac{1}{2} \left(\frac{d\psi_g}{d\tau} \right)^2 \sin 2\vartheta_g + \frac{d\psi_g}{d\tau} \cos \vartheta_g \quad (1a)$$

$$\frac{d^2\psi_g}{d\tau^2} = -\bar{b}_c \frac{d\psi_g}{d\tau} \frac{1}{\cos^2 \vartheta_g} + 2 \frac{d\psi_g}{d\tau} \frac{d\vartheta_g}{d\tau} \operatorname{tg} \vartheta_g - \frac{d\vartheta_g}{d\tau} \frac{1}{\cos \vartheta_g} \quad (1b)$$

gdzie: $\tau = t \cdot \Omega$, $\Omega = \frac{J_{go} n_g}{J_{gk}}$, $\bar{b}_b = \frac{\eta_b}{J_{gk} \Omega}$, $\bar{b}_c = \frac{\eta_c}{J_{gk} \Omega}$, J_{go}, J_{gk} – momenty bezwładności wirnika giroskopu względem osi podłużnej i poprzecznej, η_b, η_c – współczynniki tarcia w łożyskach ramek wewnętrznej i zewnętrznej, odpowiednio, n_g – prędkość obrotów własnych wirnika, ϑ_g, ψ_g – kąty obrotu ramek wewnętrznej i zewnętrznej giroskopu, odpowiednio.

Wprowadzamy zmienne stanu:

$$x_1 = \vartheta_g, x_2 = \frac{d\vartheta_g}{d\tau}, x_3 = \psi_g, x_4 = \frac{d\psi_g}{d\tau}$$

Otrzymujemy następujący układ równań:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(x) \quad (2)$$

gdzie:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix}, \mathbf{F} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ -\bar{b}_b x_2 - \frac{1}{2} x_4^2 \sin 2x_1 + x_4 \cos x_1 \\ x_4 \\ -\bar{b}_c \frac{x_4}{\cos^2 x_1} + 2x_2 x_4 \operatorname{tg} x_1 - \frac{x_2}{\cos x_1} \end{bmatrix} \quad (3)$$

Jako funkcję Lapunowa układu przyjmujemy funkcję zaproponowaną przez Krasowskiego o postaci [2, 9]:

$$\mathbf{V}(x) = \mathbf{F}^T(x) \mathbf{F}(x)$$

Pochodna funkcji Lapunowa wynosi:

$$\dot{V}(x) = F^T(x) [A + A^T] F(x) \quad (4)$$

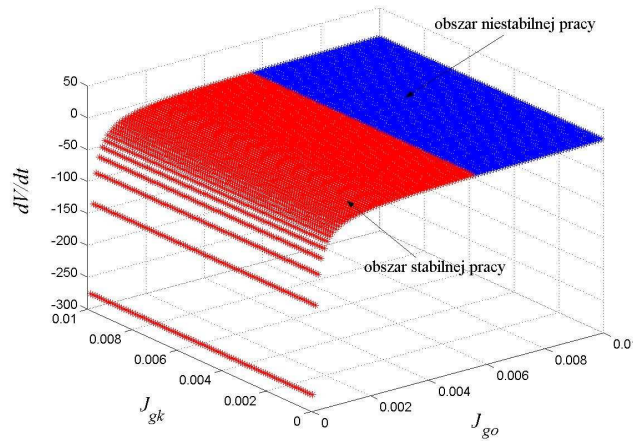
Macierz Jacobiego układu wynosi: $A = \frac{\partial F(x)}{\partial x}$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -x_4^2 \cos 2x_1 - x_4 \sin x_1 & -\bar{b}_b & 0 & -x_4 \sin 2x_1 + \cos x_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -2\bar{b}_c \frac{x_4 \sin x_1}{\cos^3 x_1} + \frac{2x_2 x_4}{\cos^2 x_1} - \frac{x_2 \sin x_1}{\cos^2 x_1} & 2x_4 tg x_1 - \frac{1}{\cos x_1} & 0 & \frac{-\bar{b}_c}{\cos^2 x_1} + 2x_2 tg x_1 \end{bmatrix} \quad (5)$$

Weźmy pod uwagę giroskop o następujących wyjściowych parametrach:

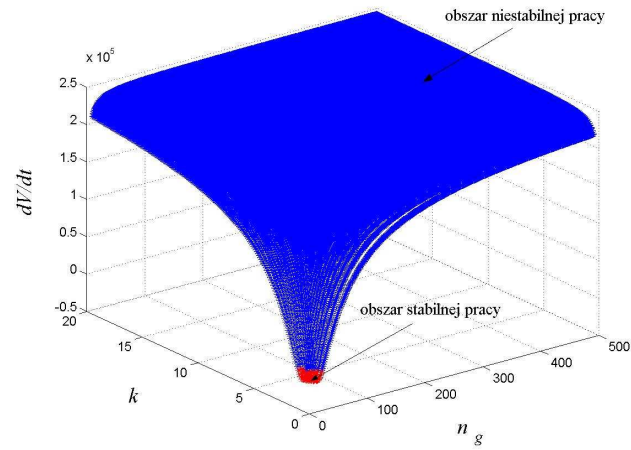
$$J_{go} = 5 \cdot 10^{-4} \text{ kgm}^2, J_{gk} = 2,5 \cdot 10^{-4} \text{ kgm}^2, n_g = 500 \text{ rad/s}, \eta_c = \eta_b = 0,01 \text{ Nms/rad}.$$

Na rysunkach 1-6 pokazano przykłady obszarów stabilności i niestabilności pracy giroskopu dla różnych parametrów.



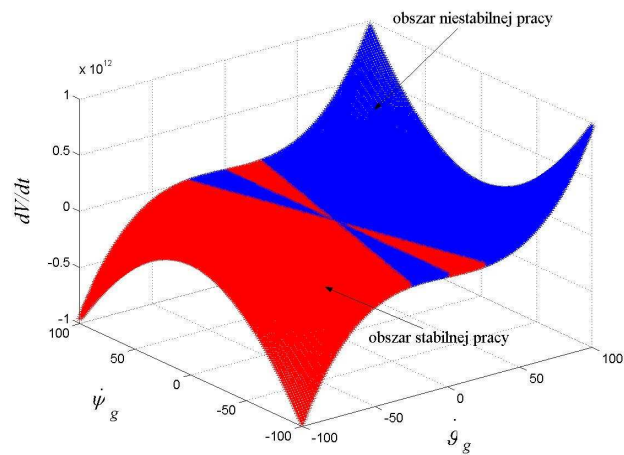
Rys. 1. Obszary stabilności pracy giroskopu dla różnych zakresów wartości momentów wirnika giroskopu J_{go} i J_{gk}

Fig. 1. Gyroscope stability areas for different ranges of values of gyroscope rotor moments J_{go} and J_{gk}



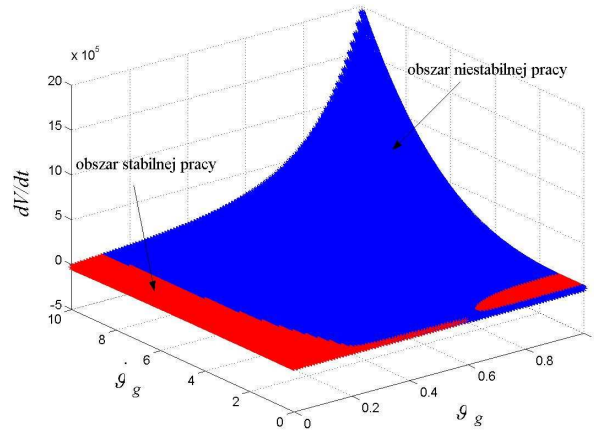
Rys. 2. Obszary stabilności pracy giroskopu dla różnych zakresów wartości prędkości obrotów wirnika giroskopu n_g i $k = J_{go} / J_{gk}$

Fig. 2. Gyroscope stability areas for different ranges of values of gyroscope rotor rates n_g and $k = J_{go} / J_{gk}$



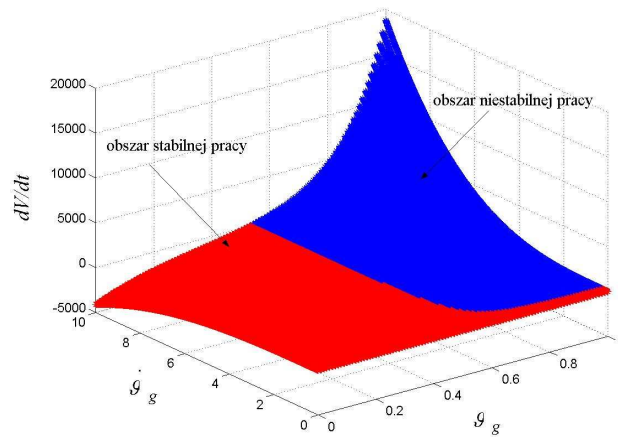
Rys. 3. Obszary stabilności pracy giroskopu dla różnych zakresów wartości prędkości kątowej $\dot{\varphi}_g$ i $\dot{\psi}_g$ przy $\varphi_g = \psi_g = 1,0$ rad

Fig. 3. Gyroscope stability areas for different ranges of values of angular velocities $\dot{\varphi}_g$ and $\dot{\psi}_g$ at $\varphi_g = \psi_g = 1,0$ rad



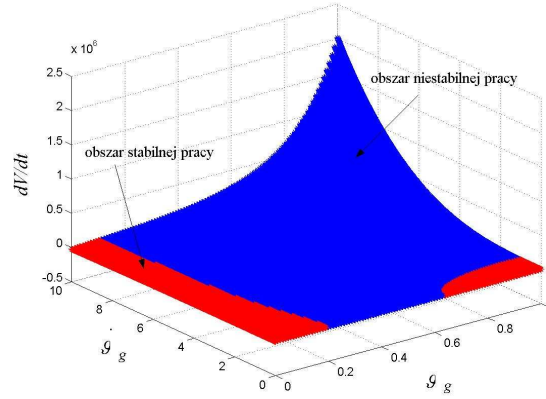
Rys. 4. Obszary stabilności pracy giroskopu dla różnych zakresów wartości prędkości kątowej $\dot{\vartheta}_g$ i kąta ϑ_g przy: $\psi_g = 0,0$ rad, $\dot{\psi}_g = 5,0$ rad/s, $n_g = 200$ rad/s

Fig. 4. Gyroscope stability areas for different ranges of values of angular velocity $\dot{\vartheta}_g$ and angle ϑ_g at: $\psi_g = 0,0$ rad, $\dot{\psi}_g = 5,0$ rad/s, $n_g = 200$ rad/s



Rys. 5. Obszary stabilności pracy giroskopu dla różnych zakresów wartości prędkości kątowej $\dot{\vartheta}_g$ i kąta ϑ_g przy: $\psi_g = 0,0$ rad, $\dot{\psi}_g = 1,0$ rad/s, $n_g = 200$ rad/s

Fig. 5. Gyroscope stability areas for different ranges of values of angular velocity $\dot{\vartheta}_g$ and angle ϑ_g at: $\psi_g = 0,0$ rad, $\dot{\psi}_g = 1,0$ rad/s, $n_g = 200$ rad/s



Rys. 6. Obszary stabilności pracy giroskopu dla różnych zakresów wartości prędkości kątowej $\dot{\vartheta}_g$ i kąta ϑ_g przy: $\psi_g = 0,0$ rad, $\dot{\psi}_g = 5,0$ rad/s, $n_g = 200$ rad/s, $\eta_b = \eta_c = 0$ Nms

Fig. 6. Gyroscope stability areas for different ranges of values of angular velocity $\dot{\vartheta}_g$ and angle ϑ_g at: $\psi_g = 0,0$ rad, $\dot{\psi}_g = 5,0$ rad/s, $n_g = 200$ rad/s, $\eta_b = \eta_c = 0$ Nms

3. STABILNOŚĆ NIELINIOWEGO GIROSKOPU STEROWANEGO

Weźmy pod uwagę nieliniowe równania sterowanego giroskopu o postaci:

$$J_{gk} \ddot{\vartheta}_g + \eta_b \dot{\vartheta}_g + \frac{1}{2} J_{gk} \dot{\psi}_g^2 \sin 2\vartheta_g - J_{go} n_g \dot{\psi}_g \cos \vartheta_g = u_b \quad (6a)$$

$$J_{gk} \ddot{\psi}_g \cos^2 \vartheta_g + \eta_c \dot{\psi}_g - J_{gk} \dot{\psi}_g \dot{\vartheta}_g \sin 2\vartheta_g + J_{go} n_g \dot{\vartheta}_g \cos \vartheta_g = u_c \quad (6b)$$

Wielkości u_b i u_c występujące w równaniach (6) są sterowaniami typu:

$$u_b = -k_b \vartheta_g + k_c \psi_g - h_g \dot{\vartheta}_g \quad (7a)$$

$$u_c = -k_c \vartheta_g - k_b \psi_g - h_g \dot{\psi}_g \quad (7b)$$

Po podstawieniu (7) do (6) i dokonaniu przekształceń otrzymujemy:

$$\frac{d^2 \vartheta_g}{d\tau^2} = -\bar{h}_b \frac{d\vartheta_g}{d\tau} - \frac{1}{2} \left(\frac{d\psi_g}{d\tau} \right)^2 \sin 2\vartheta_g + \frac{d\psi_g}{d\tau} \cos \vartheta_g - \bar{k}_b \vartheta_g + \bar{k}_c \psi_g \quad (8a)$$

$$\frac{d^2 \psi_g}{d\tau^2} = -\bar{h}_c \frac{d\psi_g}{d\tau} \frac{1}{\cos^2 \vartheta_g} + 2 \frac{d\psi_g}{d\tau} \frac{d\vartheta_g}{d\tau} \operatorname{tg} \vartheta_g - \frac{d\vartheta_g}{d\tau} \frac{1}{\cos \vartheta_g} - \bar{k}_c \frac{\vartheta_g}{\cos^2 \vartheta_g} - \bar{k}_b \frac{\psi_g}{\cos^2 \vartheta_g} \quad (8b)$$

gdzie:

$$\tau = t \cdot \Omega, \quad \Omega = \frac{J_{g0} n_g}{J_g}, \quad \bar{k}_b = \frac{k_b}{J_g \Omega^2}, \quad \bar{k}_c = \frac{k_c}{J_g \Omega^2}, \quad \bar{h}_b = \frac{h_g + \eta_b}{J_g \Omega},$$

$$\bar{h}_c = \frac{h_g + \eta_c}{J_g \Omega}.$$

Wprowadzamy zmienne stanu:

$$x_1 = \vartheta_g, \quad x_2 = \frac{d\vartheta_g}{d\tau}, \quad x_3 = \psi_g, \quad x_4 = \frac{d\psi_g}{d\tau}$$

Otrzymujemy następujący układ równań:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}) \quad (9)$$

gdzie:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ -\bar{h}_b x_2 - \frac{1}{2} x_4^2 \sin 2x_1 + x_4 \cos x_1 - \bar{k}_b x_1 + \bar{k}_c x_3 \\ x_4 \\ -\bar{h}_c \frac{x_4}{\cos^2 x_1} + 2x_2 x_4 \operatorname{tg} x_1 - \frac{x_2}{\cos x_1} - \bar{k}_c \frac{x_1}{\cos^2 x_1} - \bar{k}_b \frac{x_3}{\cos^2 x_1} \end{bmatrix} \quad (10)$$

Jako funkcję Lapunowa układu przyjmujemy funkcję zaproponowaną przez Krasowskiego o postaci [2, 9]:

$$\mathbf{V}(\mathbf{x}) = \mathbf{F}^T(\mathbf{x}) \mathbf{F}(\mathbf{x})$$

Pochodna funkcji Lapunowa wynosi:

$$\dot{\mathbf{V}}(\mathbf{x}) = \mathbf{F}^T(\mathbf{x}) [\mathbf{A} + \mathbf{A}^T] \mathbf{F}(\mathbf{x}) \quad (11)$$

Macierz Jacobiego układu wynosi:

$$\mathbf{A} = \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \quad (12)$$

gdzie:

$$a_{11} = 0, \quad a_{12} = 1, \quad a_{13} = 0, \quad a_{14} = 0, \quad a_{31} = 0, \quad a_{32} = 0, \quad a_{33} = 0, \quad a_{34} = 1,$$

$$a_{21} = -\bar{k}_b - x_4 \sin x_1 - x_4^2 \cos 2x_1, \quad a_{22} = -\bar{h}_b, \quad a_{23} = \bar{k}_c, \quad a_{24} = -x_4 \sin 2x_1 + \cos x_1$$

$$a_{41} = -2\bar{h}_c \frac{x_4 \sin x_1}{\cos^3 x_1} + \frac{2x_2 x_4}{\cos^2 x_1} - \frac{x_2 \sin x_1}{\cos^2 x_1} - \frac{\bar{k}_c}{\cos^2 x_1} - 2\bar{k}_c \frac{x_1 \sin x_1}{\cos^3 x_1} - 2\bar{k}_b \frac{x_3 \sin x_1}{\cos^3 x_1},$$

$$a_{42} = 2x_4 \operatorname{tg} x_1 - \frac{1}{\cos x_1}, \quad a_{34} = -\frac{\bar{k}_b}{\cos^2 x_1}, \quad a_{44} = \frac{-\bar{h}_c}{\cos^2 x_1} + 2x_2 \operatorname{tg} x_1$$

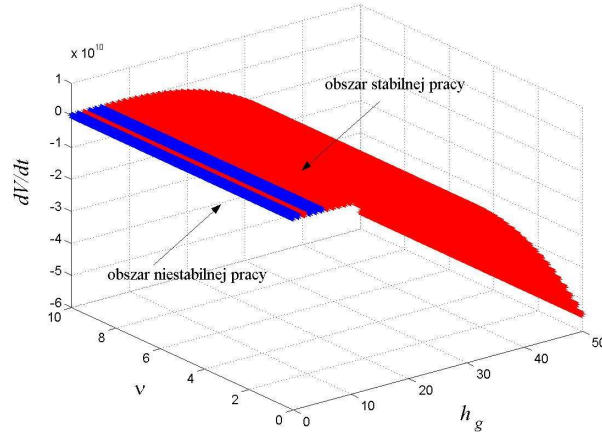
Weźmy pod uwagę giroskop sterowany o następujących wyjściowych parametrach:

$$J_{go} = 5 \cdot 10^{-4} \text{ kgm}^2, \quad J_{gk} = 2,5 \cdot 10^{-4} \text{ kgm}^2, \quad n_g = 500 \text{ rad/s},$$

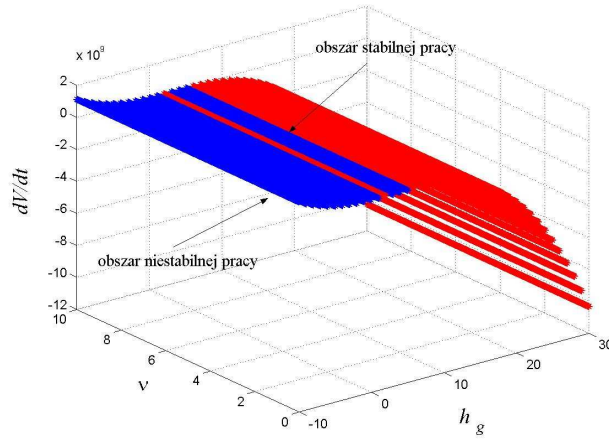
$$\eta_c = \eta_b = 0,01 \text{ Nms/rad}, \quad k_b = 31,48 \text{ Nm/rad}, \quad k_c = -2,986 \text{ Nm/rad},$$

$$h_g = 31,525 \text{ Nms/rad}$$

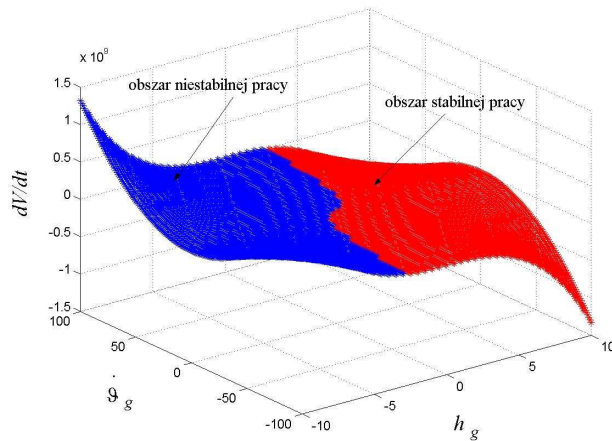
Na rysunkach 7-10 zaprezentowano przykłady obszarów stabilności i niestabilności pracy giroskopu sterowanego dla różnych zakresów zmian parametrów i zmiennych stanu.



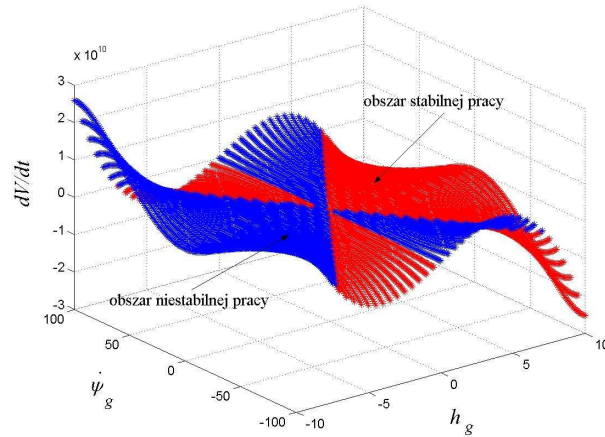
Rys. 7. Obszary stabilności pracy giroskopu dla różnych zakresów wartości współczynników $\nu = k_b / k_c$ i h_g dla $\vartheta_g = \psi_g = 1,0 \text{ rad}$, $\dot{\vartheta}_g = \dot{\psi}_g = 10,0 \text{ rad/s}$
 Fig. 7. Gyroscope stability areas for different ranges of values of coefficients $\nu = k_b / k_c$ and h_g at $\vartheta_g = \psi_g = 1,0 \text{ rad}$, $\dot{\vartheta}_g = \dot{\psi}_g = 10,0 \text{ rad/s}$



Rys. 8. Obszary stabilności pracy giroskopu dla różnych zakresów wartości współczynników $\nu = k_b / k_c$ i h_g dla $\vartheta_g = \psi_g = 1,0$ rad, $\dot{\vartheta}_g = \dot{\psi}_g = 10,0$ rad/s
 Fig. 8. Gyroscope stability areas for different ranges of values of coefficients $\nu = k_b / k_c$ and h_g at $\vartheta_g = \psi_g = 1,0$ rad, $\dot{\vartheta}_g = \dot{\psi}_g = 10,0$ rad/s



Rys. 9. Obszary stabilności pracy giroskopu dla różnych zakresów wartości prędkości kątowej $\dot{\vartheta}_g$ i współczynnika h_g dla $\vartheta_g = \psi_g = 1,0$ rad, $\dot{\psi}_g = 0,0$ rad/s
 Fig. 9. Gyroscope stability areas for different ranges of values of angular velocity $\dot{\vartheta}_g$ and coefficient h_g at $\vartheta_g = \psi_g = 1,0$ rad, $\dot{\psi}_g = 0,0$ rad/s



Rys. 10. Obszary stabilności pracy giroskopu dla różnych zakresów wartości prędkości kątowej $\dot{\psi}_g$ i współczynnika h_g dla $\vartheta_g = \psi_g = 1,0$ rad, $\dot{\vartheta}_g = 0,0$ rad/s

Fig. 10. Gyroscope stability areas for different ranges of values of angular velocity $\dot{\psi}_g$ and coefficient h_g at $\vartheta_g = \psi_g = 1,0$ rad, $\dot{\vartheta}_g = 0,0$ rad/s

4. WNIOSKI

Otrzymane wyniki rozważań teoretycznych i badań symulacyjnych pokazały, że przy niewłaściwie dobranych parametrach masowych i dynamicznych giroskopu, można przy różnych zakresach wychyleń i prędkości kątowych osi giroskopu wejść w obszar niestabilnej jego pracy. Przedstawiają to wykresy na rysunkach 1-6, a szczególnie wyraźnie to widać na rysunkach 2, 4 i 6. Podobnie przedstawia się sytuacja w przypadku doboru współczynników wzmocnień w układzie sterowania giroskopem. Można to prześledzić na rysunkach 7-10. Należy zatem, projektując układ giroskopowy, dobierać tylko takie jego parametry i wprowadzać takie ograniczenia na zmienne jego stanu, by uniknąć obszarów niestabilnej pracy giroskopu. Wspomniane obszary wpływają bowiem bardzo niekorzystnie na dokładność naprowadzania pocisku raketowego na cel, a nawet na całkowite jego wyjście z pola widzenia układu optycznego głowicy śledzącej.

LITERATURA

- [1] Datta, Biswa Nath, *Numerical methods for linear control systems – design and analysis*, Elsevier, 2004.
- [2] Kaczorek T., Dzieliński A., Dąbrowski W., Łopatka R., *Podstawy teorii sterowania*, WNT, Warszawa, 2006.
- [3] Koruba Z., Elementy teorii i zastosowań giroskopu sterowanego, *Monografie, Studia, Rozprawy M 7*, Politechnika Świętokrzyska, Kielce s. 241, 2008.
- [4] Koruba Z., Dynamika i sterowanie giroskopem na pokładzie obiektu latającego, *Monografie, Studia, Rozprawy nr 25*, Politechnika Świętokrzyska, Kielce, s. 285, 2001.
- [5] Koruba Z., Osiecki J.W., Budowa, dynamika i nawigacja wybranych broni precyzyjnego rażenia, *podręcznik akademicki*, Wyd. Politechniki Świętokrzyskiej, Kielce, s. 484, 2006.
- [6] Leigh J.R., *Control Theory (2nd Edition)*, Institution of Engineering and Technology, 2004.
- [7] Machowski J., Białek J., Bumby J.R., *Power system dynamics – stability and control (2nd Edition)*, John Wiley & Sons, 2008.
- [8] Nizioł J., Dynamika żyroskopów ze szczególnym uwzględnieniem żyroskopu całkowitego w nieliniowym ujęciu deterministycznym i probabilistycznym (rozprawa habilitacyjna), *Zeszyty Naukowe Politechniki Krakowskiej, Mechanika*, z. 48, Kraków, 1975.
- [9] Radziszewski B., *Elementy teorii stabilności*. Monografia nr 19, Wyd. Politechniki Świętokrzyskiej, Kielce, 1999.
- [10] WIE, BONG, *Space vehicle dynamics and control (2nd Edition)*, American Institute of Aeronautics and Astronautics, 2008.

The Analysis of the Stability of Nonlinear Gyroscopic System as a Drive in the Target Coordinator of Anti-Aircraft Missile

Zbigniew KORUBA, Izabela KRZYSZTOFIK

Abstract. The paper presents an analysis of stability by Lyapunov method for nonlinear gyroscopic system, both free and controlled. Gyro-controlled system is very common in the optical drive coordinator for homing missile, which is why it is particularly important to know the stable range of his work. As a function of Lyapunov function was adopted Krasovsky. Areas of stability are presented in graphic form.

Keywords: mechatronics, gyroscope, stability, target coordinator