

## Wykorzystanie modeli pokrycia i alokacji zasobów do wspomaganie decyzji w działaniach ratowniczych i reagowaniu kryzysowym

Z. TARAPATA, Ł. DALEKI  
e-mail: zbigniew.tarapata@wat.edu.pl

Instytut Systemów Informatycznych  
Wydział Cybernetyki, Wojskowa Akademia Techniczna  
ul. Gen. S. Kaliskiego 2, 00-908 Warszawa

---

Praca dotyczy analizy istniejących modeli wspomaganie decyzji w działaniach ratowniczych i reagowaniu kryzysowym oraz ich zastosowań w praktycznych problemach związanych z zarządzaniem kryzysowym. W pracy skupiono się wyłącznie na specyficznych modelach pokrycia i alokacji zasobów, które są jednymi z wielu modeli wykorzystywanych we wspomnianych problemach. Przedstawiono przegląd różnorodnych modeli (pokrycia, *P*-medianowych i *P*-wyśrodkowanych) w odniesieniu zarówno do pojedynczej sytuacji kryzysowej, jak i zbioru tych sytuacji oraz opis ich zastosowań w działaniach ratowniczych i reagowaniu kryzysowym. Sformułowano modele optymalizacyjne opisanych problemów pokrycia i alokacji oraz odniesiono się do złożoności obliczeniowej tych problemów. Zaprezentowano przykład liczbowy wykorzystania jednego ze zdefiniowanych modeli w celu optymalnego rozlokowania służb ratowniczych, w oparciu o zbiór zagrożeń będących źródłami hipotetycznych sytuacji kryzysowych w aglomeracji warszawskiej.

---

**Keywords:** modele pokrycia i alokacji zasobów, systemy zarządzania kryzysowego, wspomaganie decyzji w działaniach ratowniczych

### 1. Wprowadzenie

Działalność związana z ratownictwem i reagowaniem kryzysowym, jak każda inna działalność, jest związana z planowaniem, organizowaniem, realizacją i kontrolowaniem wykonania zbioru zadań. Podporządkowana jest określonemu celowi lub celom, wymaga istnienia odpowiednich zasobów materialnych oraz informacyjnych i jest elementem szerszego frontu działań związanego z zarządzaniem kryzysowym. W polskim prawodawstwie istnieje ustawa o zarządzaniu kryzysowym [31], według której: „[...] zarządzanie kryzysowe to działalność organów administracji publicznej będąca elementem kierowania bezpieczeństwem narodowym, która polega na zapobieganiu sytuacjom kryzysowym, przygotowaniu do przejmowania nad nimi kontroli w drodze zaplanowanych działań, reagowaniu w przypadku wystąpienia sytuacji kryzysowych oraz na odtwarzaniu infrastruktury lub przywróceniu jej pierwotnego charakteru [...]”. W związku ze wspomnianą ustawą organizuje się tzw. Centra Zarządzania Kryzysowego, których działalność sprowadza się do realizacji zadań związanych z zarządzaniem kryzysowym. Dwoma z takich zadań są: zapobieganie sytuacjom kryzysowym i reagowanie

w przypadku ich wystąpienia (np. sposób użycia służb ratowniczych). Następstwem coraz to nowych wymagań stawianych ratownictwu w kontekście zarządzania kryzysowego, narzucających wysoką jakość i szybsze działanie służb ratowniczych, jest zwiększenie ich zdolności do działań, co może być szczególnie istotne w momencie pojawienia się katastrofy o dużej sile i zasięgu rażenia. W efekcie klasyczne sposoby zarządzania oparte na intuicji i doświadczeniu zaczynają zawodzić. Powoduje to coraz większe zapotrzebowanie na metody usprawniające ten proces. Możliwość usprawnień dopatruje się w odpowiednich metodach wspomaganie decyzji i rozwiązaniach informatycznych, które stają się standardowymi elementami wyposażenia Centrów Zarządzania Kryzysowego.

Jednym z podstawowych problemów związanych z działaniami ratowniczymi jest problem odpowiedniego rozmieszczenia służb ratowniczych tak, aby w przypadku ewentualnego wystąpienia sytuacji kryzysowej efektywność wykorzystania tych służb była jak najlepsza. Problemy optymalnego rozmieszczenia służb ratowniczych doczekały się bardzo wielu modeli rozwiązujących przeróżne kwestie dotyczące tego właśnie tematu. Jednakże w wielu pracach rozważa się

wyłącznie problem alokacji służb ratowniczych w odniesieniu do rutynowych zdarzeń takich, jak wypadki samochodowe, czy niewielkie pożary. Zapomina się, że wydarzenia dużej skali, które wywołują sytuacje kryzysowe, posiadają specyficzną charakterystykę i nie powinno się w pełni przenosić wszystkich rozwiązań dotyczących rutynowej działalności służb ratowniczych. Analizując zagadnienia alokacji w wypadku sytuacji kryzysowych powinno się przede wszystkim rozstrzygnąć kwestię liczby i położenia służb. Dodatkowo ze względu na rzadkość i dużą, potencjalną siłę i zakres oddziaływania takich zdarzeń sformułowane modele powinny rozważyć: odpowiednią strategię rozmieszczania, liczbę służb przypadającą na każde potencjalne miejsce katastrofy oraz odległość między służbami, a miejscami możliwej katastrofy. Mimo różnic jakie dzielą sytuacje kryzysowe od rutynowych wypadków, obie te grupy zdarzeń posiadają szereg znaczących podobieństw, które decydują bardzo często o tym, iż wykorzystuje się do nich podobne modele.

Celem niniejszej pracy jest dokonanie analizy istniejących modeli wspomagania decyzji w działaniach ratowniczych i reagowaniu kryzysowym oraz wskazanie, na przykładzie aglomeracji warszawskiej, sposobu wykorzystania tychże modeli. Skupimy się przy tym wyłącznie na specyficznych modelach pokrycia i alokacji zasobów, które są jednymi z wielu modeli wykorzystywanych we wspomnianych problemach. W rozdziale 2 dokonano przeglądu modeli pokrycia i alokacji w działaniach ratowniczych i reagowaniu kryzysowym. Rozdział 3 zawiera sformułowania modeli matematycznych problemów pokrycia i alokacji z rozdziału 2. Rozdział 4 dotyczy krótkiej analizy złożoności sformułowanych problemów. W rozdziale 5 zaprezentowano przykład liczbowy wykorzystania jednego ze zdefiniowanych modeli.

## **2. Przegląd modeli pokrycia i alokacji w działaniach ratowniczych i reagowaniu kryzysowym**

Przedstawimy obecnie przegląd różnorodnych modeli pokrycia i alokacji zasobów występujących w literaturze oraz krótkie odniesienie do ich zastosowań w działaniach ratowniczych i reagowaniu kryzysowym.

### **Modele pokrycia (ang. *Covering Models*)**

Modele pokrycia są najbardziej powszechnymi modelami dla problemów alokacji służb ratowniczych. Celem tych modeli jest zapewnienie odpowiedniego „pokrycia” wszystkich miejsc z wybranego obszaru. Dany obszar uznaje się za „pokryty”, jeśli pomoc służb ratowniczych jest dostępna i znajdują się one w odpowiedniej odległości. W literaturze problem pokrycia dzieli się na dwa zasadnicze typy: problem rozmieszczenia (LSCP – *Location Set Covering Problem*) oraz problem maksymalnego pokrycia (MCLP – *Maximal Covering Location Problem*).

Problem LSCP został podjęty wcześniej, bo już w 1971r. przez Toregasa [30]. Głównym celem tego zagadnienia jest rozmieszczenie jak najmniejszej liczby służb ratowniczych tak, aby pokrywały wszystkie punkty danego obszaru bez względu na liczbę mieszkańców, odległość i liczebność. Badając ten problem, Chuch i ReVelle [5] oraz White i Case [33], rozpoczęli w 1974r. rozwijać model MCLP, który nie wymagał pokrycia przez służby ratownicze wszystkich punktów. To właśnie model MCLP i różne jego odmiany miały rzeczywiste zastosowanie do rozwiązywania problemów alokacji służb ratowniczych. Przykładem może być praca Eatona [9] z 1985r., która przyczyniła się do zastosowania modelu MCLP do rozplanowania położenia służb medycznych w Austin w Teksasie. Rozwiązanie to w znacznym stopniu ograniczyło średni czas reakcji służb pomimo ciągłego wzrostu liczby zgłoszeń. Innym przykładem może być uogólniony model MCLP Schillinga [25] z 1979r., dzięki któremu rozplanowano położenie jednostek straży pożarnej w Baltimore.

Dotychczasowe modele nie uwzględniały jednak faktu, iż system ratownictwa może „nie wytrzymać” dużej liczby zgłoszeń oraz nie brały pod uwagę czasowej niedostępności poszczególnych jednostek. Dlatego też powstało szereg modeli, które uwzględniały te czynniki poprzez zapewnienie nadmiarowego lub zapasowego pokrycia. Na uwagę zasługują tu prace Benedicta [1] (1983r.), Eatona [10] (1985r.), Hogana i ReVelle’a [13] (1986r.), którzy sformułowali model MCLP, zapewniający dodatkową, zapasową ochronę wszystkich punktów określonego obszaru. Model ten zwany popularnie BACOP1 (*Backup Coverage Problem 1*) zakładał dostępność zapasowej jednostki ratowniczej w przypadku nieosiągalności jednostki podstawowej.

Kolejne badania przyniosły modele uwzględniające stochastyczne i probabilistyczne właściwości wypadków, takie jak złożoność i niepewność tych zdarzeń. Duży wkład w rozwój modeli stochastycznych wniósł Daskin [8] (1983r.), który wprowadził parametr reprezentujący prawdopodobieństwo, że co najmniej jedna jednostka ratownicza jest w stanie obsłużyć każdy punkt wybranego obszaru. Opracowany przez niego model MEXCLP (*Maximum Expected Covering Location Problem*) w sposób formalny opisywał problem rozmieszczenia  $P$  służb ratowniczych w celu maksymalnego pokrycia obszaru z oczekiwaną liczbą ludności. W 1986r. ReVelle i Hogan [22] zmienili nieco model MEXCLP i zaproponowali PLSCP (*Probabilistic Location Set Covering Problem*). W modelu tym dodatkowo zdefiniowali średnią niedostępność służb ratowniczych dla każdego punktu oraz ich niezawodność. Tak więc, położenie jednostek uzależnione było od prawdopodobieństwa ich dostępności.

Innym podejściem do modeli stochastycznych było użycie scenariuszy, reprezentujących odpowiednie wartości parametrów dla danych rodzajów wypadków. Schilling [24] (1982 r.) rozszerzył model MCLP, uwzględniając scenariusze tak, aby powstały model maksymalizował pokrycie punktów dla wszystkich możliwych scenariuszy. Model miał rozstrzygać ostateczne położenie jednostek w taki sposób, aby było ono optymalne dla każdego scenariusza.

Jedną z podstawowych metod w teorii alokacji jest metoda kolejkowa. Do najbardziej znanych modeli opartych na teorii kolejek, wykorzystywanych do rozwiązywania problemów rozmieszczenia służb ratowniczych należą: model hipersześcianu (ang. *hypercube*) i przybliżony model hipersześcianu opracowane przez Larsona [17], [18] (1974 r., 1975 r.). Model hipersześcianu był używany do oceny wartości szeregu charakterystyk wyjściowych takich, jak wskaźniki wykorzystania pojazdów i średni czas przemieszczania. W 1986 r. model ten został rozszerzony o heurystyczne planowanie rozmieszczenia i znalazł rzeczywiste zastosowanie w optymalizacji położenia karetek w Bostonie i Nowym Yorku. W 1996 r. Marianov i ReVelle [19] sformułowali realistyczny model alokacji służb ratowniczych bazując na teorii kolejek. W swoim modelu założyli, że czas przemieszczania, czy też pokonywana odległość przez służby ratownicze, są wartościami losowymi. Celem tego modelu było natomiast takie rozmieszczenie określonej

liczby pojazdów np. karetek, aby maksymalizować liczbę obsługiwanych zgłoszeń.

O nieklasycznych modelach i metodach planowania tras (uwzględniających m.in. zmianę charakterystyk sieci komunikacyjnej w czasie oraz problemy tzw. tras najprostszych), które mają zastosowanie m.in. w problemach planowania rozmieszczenia służb ratowniczych traktuje praca [29].

### Modele $P$ -medianowe (ang. *P-Median Models*)

Inną miarą oceny efektywności rozmieszczenia służb ratowniczych jest kryterium średniej (całkowitej) odległości między zgłoszeniami (punktami) z określonego obszaru, a jednostkami ratowniczymi. Jeśli wartość ta maleje, to efektywność rozmieszczenia rośnie. Zagadnienie  $P$ -medianowe jako pierwszy podjął Hakimi [12] w 1964 r. i zdefiniował je w następujący sposób: należy rozmieścić  $P$  służb ratowniczych w taki sposób, aby minimalizować średnią (całkowitą) odległość między punktami z danego obszaru, a położeniem jednostek ratowniczych. Następnie ReVelle i Swain [23] w 1970 r. sformułowali na podstawie problemu  $P$ -medianowego zadanie programowania liniowego i użyli metody podziału i ograniczeń do rozwiązania tego zadania. Od tego czasu sformułowany model  $P$ -medianowy zyskał dużą popularność w rozwiązywaniu problemów alokacji służb ratowniczych. W 1974r. Carbone [3] sformułowal deterministyczny model  $P$ -medianowy do minimalizacji odległości pokonywanej przez ludzi między jednostkami medycznymi. Zauważył jednak, że liczba ludzi przypadająca na dany punkt jest wartością niepewną, dlatego też przekształcił model deterministyczny w model stochastyczny. W 1973 r. Calvo i Marks [6] natomiast sformułowali model do rozplanowania położenia całej hierarchii jednostek służby zdrowia takich jak: szpitale, przychodnie i ośrodki zdrowia. Model miał na celu minimalizować pokonywaną odległość i koszty ponoszone przez pacjentów, a maksymalizować wykorzystanie jednostek. W 2004 r. Paluzzi [21] omówił i przetestował heurystyczny model  $P$ -medianowy do planowania położenia służb ratowniczych w mieście Carbondale. Celem tego modelu było takie ułożenie nowych posterunków straży pożarnej, aby zminimalizować sumaryczną odległość między wyznaczonymi punktami danego obszaru, a posterunkami straży.

Jednym z najważniejszych zastosowań modelu  $P$ -medianowego jest dynamiczna



alokacja pojazdów ratowniczych podczas wypadków. Duży wkład w rozwój tego tematu mieli Carson i Batta [4], którzy opracowali i sformułowali w 1990 r. model dla tego zagadnienia. W modelu zostały użyte scenariusze do odzwierciedlenia warunków, jakie mogą panować w miejscu zgłoszenia. Karetki miałyby być tak rozlokowane, aby przy uwzględnieniu opracowanych scenariuszy zminimalizować średni czas reakcji na zgłoszenie. W 1976 r. Berlin [2] użył dwa modele  $P$ -medianowe dla rozlokowania szpitali i karetek. Celem pierwszego modelu było skrócenie średniej odległości między szpitalem a potencjalnym pacjentem oraz zminimalizowanie średniego czasu dojazdu karetek. Natomiast drugi model miał na celu zminimalizować średnią odległość między bazą karetek, a szpitalem.

Zagadnienia niepewności były również rozważane w wielu modelach  $P$ -medianowych. Na uwagę zasługuje tu praca Mirchandaniego [20], który w 1980 r. sprawdził możliwości tego modelu, uwzględniając stochastyczne właściwości przemieszczania i zgłoszenia, do rozmieszczenia posterunków straży pożarnej. Autor założył w swoim modelu, iż służby ratownicze nie zawsze są w stanie obsłużyć zgłoszenie i użył procesu Markowa do skonstruowania modelu, gdzie jego stan był określony przez rodzaj zgłoszenia, czas przemieszczenia i obsługi oraz dostępność jednostek ratowniczych. W 1999 r. inny model  $P$ -medianowy Serra'y i Marianova [26] uwzględniający niepewność, jaka towarzyszy zgłoszeniu, przemieszczeniu i odległości został z powodzeniem użyty w Barcelonie do rozlokowania posterunków straży pożarnej.

### **Modele $P$ -wyśrodkowane (ang. $P$ -Center Models)**

W odróżnieniu od modeli  $P$ -medianowych, które skupiają się na optymalizacji całkowitych lub średnich wartości charakterystyk całego systemu (np. systemu ratownictwa), modele  $P$ -wyśrodkowane mają na celu minimalizowanie najgorszych wartości charakterystyk tego systemu i znacznie ważniejsze są tu odchylenia w pracy systemu, niż jego średnie „osiągi”. W literaturze te modele często używane są jako modele minimaksowe do minimalizacji maksymalnej odległości między punktem obsługi a najbliższą jednostką. W związku z tym, że w modelach  $P$ -wyśrodkowanych każde zgłoszenie jest zawsze obsługiwane przez

najbliższą jednostkę, to pełne pokrycie wszystkich punktów jest zawsze zapewnione.

Opisywany w tym rozdziale problem został podjęty bardzo wcześnie, bo już w 1857 r. przez Sylwestera [27], jednak dopiero w ostatnich kilku dekadach model  $P$ -wyśrodkowany oraz jego rozszerzenia zostały w pełni wykorzystywane do alokacji jednostek takich, jak szpitale, posterunki straży pożarnej oraz inne instytucje. W 1977 r. Garfinkel [11] przetestował omawiany model do rozlokowania określonej liczby służb ratowniczych w zadanej sieci drogowej. Do rozwiązania sformułowanego zadania użył programowania liniowego, które wykorzystywało specjalne techniki wyszukiwania oraz kombinację testów i heurystyki. W 1989 r. został sformułowany model  $P$ -wyśrodkowany do rozplanowania położenia jednostek ratowniczych tak, aby zminimalizować maksymalną odległość przy zadanym prawdopodobieństwie dostępności jednostek. Stochastyczny model  $P$ -wyśrodkowany został również sformułowany w 1998 r. przez Hochbauma i Pathria [14] w celu minimalizacji maksymalnej odległości w sieci we wszystkich przedziałach czasowych. Koszt oraz odległość między rozlokowanymi jednostkami zmieniała się w zależności od przedziału czasu. Autorzy użyli  $k$  zdefiniowanych sieci dla reprezentacji różnych przedziałów czasowych i dla każdej takiej sieci uzyskali rozwiązanie dzięki użyciu specjalnego algorytmu aproksymacji. W 2002 r. model  $P$ -wyśrodkowany Talmara [28] został użyty do rozlokowania trzech helikopterów ratunkowych tak, aby mogły one obsłużyć rosnącą liczbę wypadków w Alpach. Głównym celem sformułowanego modelu było zminimalizowanie maksymalnego, a więc najgorszego, czasu odpowiedzi na zgłoszenie. Autorzy użyli efektywnej metody heurystycznej do rozwiązania tego problemu.

### **3. Sformułowania problemów pokrycia i alokacji w działaniach ratowniczych**

W rozdziale tym skonstruujemy modele optymalizacyjne dla problemów pokrycia i alokacji zasobów w działaniach ratowniczych opisanych w rozdziale 2.

#### **Uogólniony model alokacji służb ratowniczych dla sytuacji kryzysowych**

Zaproponowany model alokacji służb ratowniczych będzie uwzględniał cechy

charakterystyczne wydarzeń dużej skali i będzie mógł zostać użyty jako uogólnienie modelu pokrycia, modelu  $P$ -medianowego i modelu  $P$ -wyśrodkowanego. Będziemy rozważać zbiór  $\mathbf{I}$ , który będzie zawierał numery wszystkich punktów będących środkami obszarów wymagających obsługi przez jednostki ratownicze oraz zbiór  $\mathbf{J}$ , który będzie zawierał numery punktów będących środkami możliwych lokalizacji służb ratowniczych. Ilekroć będzie mowa o określonym punkcie  $i \in \mathbf{I}$  lub  $j \in \mathbf{J}$ , to będzie to równoznaczne z odnoszeniem się do określonego obszaru. Oznaczmy przez  $I$  oraz  $J$  moce zbiorów, odpowiednio  $\mathbf{I}$  oraz  $\mathbf{J}$ . Zdefiniujemy trzy grupy zmiennych decyzyjnych [16]:

$$x_j = \begin{cases} 1, & \text{jeśli dowolna jednostka ratownicza} \\ & \text{znajduje się w } j \in \mathbf{J} \\ 0, & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}$$

$$z_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{jeśli jednostka z punktu } j \in \mathbf{J} \\ & \text{obsługuje punkt } i \in I \\ 0, & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}$$

$$u_i = \begin{cases} 1, & \text{jeśli punkt } i \in \mathbf{I} \text{ jest pokryty} \\ 0, & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}$$

Punkt  $i$  uważa się za pokryty, jeśli obsługuje go co najmniej minimalna, wymagana przez niego liczba jednostek ratowniczych. Aby oddać niepewność jaka towarzyszy zgłoszeniu należy zdefiniować scenariusze możliwych sytuacji kryzysowych, których numery będą się znajdować w zbiorze  $\mathbf{K}$  (przez  $K$  oznaczmy moc zbioru  $\mathbf{K}$ ). Dlatego też definiujemy następujące parametry:  $\beta_{ik} \in [0,1]$  reprezentujący prawdopodobieństwo, że sytuacja kryzysowa  $k$  wystąpi w lokalizacji ze środkiem w punkcie  $i$ ;  $e_{ik} \in [0,1]$  reprezentujący „siłę” oddziaływania sytuacji kryzysowej na ludność z punktu  $i$ ;  $M_i$  określający liczbę ludności w punkcie  $i$ . Zdefiniowane prawdopodobieństwa nie sumują się do jedynki, gdyż może pojawić się więcej niż jedno wydarzenie w rozpatrywanym czasie oraz jedna sytuacja kryzysowa może mieć wpływ na wiele punktów jednocześnie. W związku z tym wielkość zagrożonej populacji w punkcie  $i$ , podczas wystąpienia sytuacji  $k$ , będzie reprezentowana przez iloczyn:  $\beta_{ik} e_{ik} M_i$ . Wartość ta jest jednocześnie wagą  $i$ -tego punktu, dla  $k$ -tej sytuacji kryzysowej w naszym modelu alokacji.

Niech  $S_k = \langle \langle x_j \rangle_{j \in \mathbf{J}}, [z_{ij}]_{i \in \mathbf{I}, j \in \mathbf{J}}, \langle u_i \rangle_{i \in \mathbf{I}} \rangle$  oznacza wektor zmiennych decyzyjnych. Każdy z trzech omawianych modeli (model pokrycia, model  $P$ -medianowy i model  $P$ -wyśrodkowany) posiada funkcję celu, która wprawdzie będzie się różniła dla każdego modelu, jednak będzie uwzględniała zdefiniowane wyżej zmienne decyzyjne  $S_k$  i wymagane parametry ( $\beta_{ik}, e_{ik}, M_i$ ). Uogólniona postać tej funkcji będzie przedstawiała się w następujący sposób:  $\sigma(S_k)$ . Dodatkowo należy rozważyć następujące parametry wejściowe [16]:  $Q_i$  - minimalna liczba służb ratowniczych, które muszą być przypisane do punktu  $i$ , aby mógł być uznany za pokryty;  $P$  - maksymalna liczba jednostek ratowniczych możliwa do rozlokowania w zbiorze  $\mathbf{J}$ ,  $p_{jk} \in [0,1]$  - współczynnik zmniejszenia zdolności działania jednostki z punktu  $j \in \mathbf{J}$  w wyniku zaistnienia sytuacji  $k$ . Współczynnik  $p_{jk}$  utraty zdolności do działania przez jednostkę  $j$  podczas wystąpienia sytuacji kryzysowej  $k$  wynika z założenia, że zdolność jednostek do prowadzenia działań w trakcie pojawienia się sytuacji kryzysowej może zostać utracona w wyniku np. ciężkiej sytuacji na drodze lub awarii jednostki. Sformułowanie ogólnego zadania alokacji  $P$  służb ratowniczych w momencie pojawienia się sytuacji kryzysowej  $k$  tak, aby każdy obszar ze środkiem w punkcie  $i$  był obsługiwany przez wymagane  $Q_i$  jednostek ma postać:

$$\sigma(S_k) \rightarrow \max/\min \quad (1)$$

przy ograniczeniach:

$$\sum_{j \in \mathbf{J}} x_j \leq P \quad (2)$$

$$\sum_{j \in \mathbf{J}} z_{ij} p_{jk} \geq Q_i u_i \quad \forall i \in \mathbf{I} \quad (3)$$

$$z_{ij} \leq x_j \quad \forall i \in \mathbf{I}, j \in \mathbf{J} \quad (4)$$

$$x_j \in \{0,1\} \quad \forall j \in \mathbf{J} \quad (5)$$

$$z_{ij}, u_i \in \{0,1\} \quad \forall i \in \mathbf{I}, j \in \mathbf{J} \quad (6)$$

Ograniczenia (2) i (5) reprezentują fakt, że istnieje  $P$  jednostek ratowniczych, które należy rozmieścić w zbiorze  $\mathbf{J}$  możliwych lokalizacji. Ograniczenie (3) zapewnia, że punkt  $i$  jest uważany za pokryty, jeśli  $Q_i$  jednostek ratowniczych jest przypisanych do niego. Szczegółowe sformułowania zadań optymalizacji (w szczególności postaci funkcji celu) w dalszej części gwarantują, że nie wystarczy przyjąć  $u_i=0$ ,  $i \in \mathbf{I}$ , aby grupa

ograniczeń (3) była spełniona. Można zauważyć, że zmniejszenie zdolności do działania przez jednostki ratownicze jest wyrażone przez iloczyn  $z_{ij}p_{jk}$ . Ograniczenie (4) wymusza, aby zgłoszenie w punkcie  $i$  było obsługiwane tylko i wyłącznie przez jednostkę ratowniczą  $j$ , która może świadczyć usługi w tym punkcie. Ostatni warunek (6) zapewnia, że  $z_{ij}$  i  $u_i$  będą przyjmowały wartości jeden lub zero.

Sformułowane powyżej zadanie optymalizacyjne uwzględnia tylko jeden scenariusz ( $k$ -ty) sytuacji kryzysowej. Jeśli jednocześnie miałyby miejsce wiele sytuacji kryzysowych, wówczas funkcja celu musiałaby je brać wszystkie pod uwagę. Modyfikację tę przedstawimy w dalszej części rozdziału.

### Model pokrycia i alokacji służb ratowniczych dla sytuacji kryzysowych

Mając odpowiednie wymagania co do pokrycia obranego obszaru jesteśmy zainteresowani tym, aby obszar pokrycia obejmował jak najwięcej punktów. Zakładając, że znamy scenariusz sytuacji kryzysowej  $k$ , wartość pokrycia obranego obszaru (tzn. wielkość zagrożonej populacji w tym obszarze) będzie wynosiła:

$\sum_{i \in \mathbf{I}} \beta_{ik} e_{ik} M_i u_i$ . W związku z tym funkcja celu będzie przedstawiała się następująco [16]:

$$\sigma(S_k) = \sum_{i \in \mathbf{I}} \beta_{ik} e_{ik} M_i u_i \rightarrow \max \quad (7)$$

Wartość funkcji (7) dla rozwiązania optymalnego oznaczmy przez  $V_k$ . Tak sformułowana funkcja celu pozwoli odnaleźć rozwiązanie optymalne  $S_k^*$  dla sytuacji kryzysowej  $k$ . Przy każdym innym scenariuszu rozplanowanie położenia służb ratowniczych zgodne z  $S_k^*$  może wyglądać inaczej. Dlatego też jeśli chcielibyśmy wziąć pod uwagę jednocześnie cały zbiór sytuacji kryzysowych, wówczas otrzymalibyśmy rozwiązanie globalne  $\bar{S}$ , a funkcja celu mogłaby przedstawiać się w następujący sposób:

$$\sum_{k \in \mathbf{K}} R_k \rightarrow \min \quad (8)$$

gdzie:

$$R_k = V^* - V_k \quad (9)$$

$$V^* = \max \{V_k : k \in \mathbf{K}\} \quad (10)$$

$V^*$  jest najlepszą wartością rozwiązania ze zbioru  $\{V_k : k \in \mathbf{K}\}$ , a więc w tym przypadku jest to wartość maksymalna.  $R_k$  stanowi różnicę między wartością rozwiązania najlepszego  $V^*$ , a wartością  $V_k$  rozwiązania dla sytuacji kryzysowej  $k$ . W związku z tym funkcja celu (8) postuluje, aby sumaryczna wartość, jaka dzieli najlepszą wartość rozwiązania od wartości rozwiązań dla wszystkich sytuacji kryzysowych, była jak najmniejsza. Jeśli natomiast wzięłoby się pod uwagę, że prawdopodobieństwo i siła występujących jednocześnie sytuacji kryzysowych może być różna, wówczas można jeszcze wprowadzić parametr  $w_k$ , który byłby wagą danej sytuacji kryzysowej. W związku z tym ostateczna postać funkcji celu w przypadku pojawienia się jednocześnie wielu sytuacji kryzysowych może wyglądać następująco:

$$\sum_{k \in \mathbf{K}} w_k R_k \rightarrow \min \quad (11)$$

Modele pokrycia powinny zawierać warunek określający, kiedy jednostki ratownicze mogą obsługiwać zgłoszenie. Jako przykład można tu podać sytuację, kiedy zgłoszenie mogą obsłużyć jednostki, które znajdują się tylko w odpowiedniej odległości od zgłoszenia |w punkcie  $i$  ograniczonej przez  $D_i$ . Jeśli  $d_{ij}$  będzie reprezentowało najkrótszą odległość między punktem  $i$ , a jednostką położoną w punkcie  $j$ , to warunek będzie sformułowany w następujący sposób:

$$z_{ij} = 0 \quad \text{gdy } d_{ij} > D_i \quad \forall i \in \mathbf{I}, j \in \mathbf{J} \quad (12)$$

W takim razie w zbiorze  $\mathbf{N}_i = \{j \in \mathbf{J} : d_{ij} \leq D_i\}$  będą znajdowały się wszystkie możliwe położenia jednostek ratowniczych, które będą mogły obsługiwać zgłoszenia w punkcie  $i$ . W związku z tym poniżej została przedstawiona proponowana postać modelu pokrycia alokacji służb ratowniczych dla  $k$ -tej sytuacji kryzysowej (problem *PP*):

$$\sum_{i \in \mathbf{I}} \beta_{ik} e_{ik} M_i u_i \rightarrow \max \quad (13)$$

przy ograniczeniach:

$$\sum_{j \in \mathbf{N}_i} x_j p_{jk} \geq Q_i u_i \quad \forall i \in \mathbf{I} \quad (14)$$

$$\sum_{j \in \mathbf{J}} x_j \leq P \quad (15)$$

$$x_j, u_i \in \{0,1\} \quad \forall i \in \mathbf{I}, j \in \mathbf{J} \quad (16)$$

Po uwzględnieniu wag  $w_k$  sytuacji kryzysowych proponowana wersja modelu pokrycia i alokacji dla całego zbioru  $\mathbf{K}$  sytuacji kryzysowych może przedstawiać się następująco (problem *PPK*):

$$\sum_{k \in \mathbf{K}} w_k R_k \rightarrow \min \quad (17)$$

przy ograniczeniach:

$$\sum_{j \in N_i} x_j p_{jk} \geq Q_i u_i, \quad \forall i \in \mathbf{I}, k \in \mathbf{K} \quad (18)$$

oraz (15) i (16).

### Model *P*-medianowy alokacji służb ratowniczych dla sytuacji kryzysowych

Model *P*-medianowy definiuje sytuację, w której poszukujemy takiego położenia służb ratowniczych, aby odległość pomiędzy punktem zgłoszenia a jednostką ratowniczą była jak najmniejsza. Tak obrane kryterium oceny bazuje na stwierdzeniu, że efektywność alokacji rośnie wraz ze zmniejszaniem się odległości między punktem obsługi a rozlokowywaną jednostką. W związku z tym, skoro dystans dla zgłoszenia z obszaru ze środkiem w punkcie  $i$  jest definiowany jako suma odległości między punktem  $i$  a lokalizacjami wszystkich jednostek obsługujących to zgłoszenie, to funkcja celu dla  $k$ -tej sytuacji kryzysowej będzie wyrażona w następujący sposób [16]:

$$\sum_{i \in \mathbf{I}} \sum_{j \in \mathbf{J}} \beta_{ik} e_{ik} M_i d_{ij} z_{ij} \rightarrow \min \quad (19)$$

przy czym przyjmujemy założenie, że każdy punkt  $i$  jest obsługiwany, tzn. do każdego punktu  $i$ , co najmniej  $Q_i$  jednostek ratowniczych jest przypisanych do obsługi (patrz (22)). W związku z tym zachodzi:  $u_i = 1, \forall i \in \mathbf{I}$ .

Zwróćmy uwagę, że autorzy pracy [16] proponując postać funkcji celu (19) „ważą” sumaryczny dystans  $\sum_{j \in \mathbf{J}} d_{ij}$  dla ustalonego

punktu  $i \in \mathbf{I}$  iloczynem  $\beta_{ik} e_{ik} M_i$ , który można interpretować jako wielkość zagrożonej populacji w obszarze o środku w punkcie  $i$  (waga punktu  $i$ ). Wydaje się, że można pokusić się o bardziej adekwatną postać funkcji celu dla tego modelu (ale ewentualne zmiany mogą prowadzić do modelu nieliniowego).

W ostateczności, model *P*-medianowy dla podanej sytuacji kryzysowej  $k$ , będzie sformułowany w następujący sposób (problem *PM*) [16]:

$$\sum_{i \in \mathbf{I}} \sum_{j \in \mathbf{J}} \beta_{ik} e_{ik} M_i d_{ij} z_{ij} \rightarrow \min \quad (20)$$

przy ograniczeniach:

$$\sum_{j \in \mathbf{J}} x_j \leq P \quad (21)$$

$$\sum_{j \in \mathbf{J}} z_{ij} p_{jk} \geq Q_i \quad \forall i \in \mathbf{I} \quad (22)$$

$$z_{ij} \leq x_j \quad \forall i \in \mathbf{I}, j \in \mathbf{J} \quad (23)$$

$$x_j, z_{ij} \in \{0, 1\} \quad \forall i \in \mathbf{I}, j \in \mathbf{J} \quad (24)$$

Jeśli wartość funkcji celu dla rozwiązania optymalnego powyższego modelu zostanie oznaczona przez  $V'_k$ , to funkcja celu modelu uwzględniającego cały zbiór  $\mathbf{K}$  sytuacji kryzysowych, które mogą zajść jednocześnie może przedstawiać się następująco:

$$\sum_{k \in \mathbf{K}} R'_k \rightarrow \min \quad (25)$$

gdzie:

$$R'_k = V'_k - V^{**} \quad (26)$$

$$V^{**} = \min \{V'_k : k \in \mathbf{K}\} \quad (27)$$

Po uwzględnieniu wag  $w'_k$  sytuacji kryzysowych proponowana wersja modelu dla całego zbioru  $\mathbf{K}$  sytuacji kryzysowych będzie przedstawiała się następująco (problem *PMK*):

$$\sum_{k \in \mathbf{K}} w'_k R'_k \rightarrow \min \quad (28)$$

przy ograniczeniach:

$$\sum_{j \in \mathbf{J}} z_{ij} p_{jk} \geq Q_i \quad \forall i \in \mathbf{I}, k \in \mathbf{K} \quad (29)$$

oraz (21), (23) i (24).

### Model *P*-wyśrodkowany alokacji służb ratowniczych dla sytuacji kryzysowych

Model *P*-wyśrodkowany alokacji służb ratowniczych dla sytuacji kryzysowych zostanie sformułowany w ten sposób, aby minimalizował maksymalny dystans dla wszystkich zgłoszeń (punktów). Maksymalny dystans oznaczać będziemy przez  $L$ . Dystans dla zgłoszenia w punkcie  $i$  można zdefiniować jako średnią odległość, jaka dzieli obszar ze środkiem w punkcie  $i$  ze wszystkimi najbliższymi jednostkami ratowniczymi  $Q_i$ . Model *P*-wyśrodkowany dla danej sytuacji kryzysowej  $k$  można sformułować następująco (problem *PW*) [16]:



$$L \rightarrow \min \quad (30)$$

przy ograniczeniach:

$$\sum_{j \in \mathbf{J}} x_j \leq P \quad (31)$$

$$\sum_{j \in \mathbf{J}} z_{ij} p_{jk} \geq Q_i \quad \forall i \in \mathbf{I} \quad (32)$$

$$\frac{\sum_{j \in \mathbf{J}} \beta_{ik} e_{ik} M_i d_{ij} z_{ij}}{Q_i} \leq L, \quad \forall i \in \mathbf{I} \quad (33)$$

$$z_{ij} \leq x_j \quad \forall i \in \mathbf{I}, j \in \mathbf{J} \quad (34)$$

$$z_{ij}, u_i \in \{0, 1\} \quad \forall i \in \mathbf{I}, j \in \mathbf{J} \quad (35)$$

Model  $P$ -wyśrodkowany różni się od modelu  $P$ -medianowego jedynie funkcją celu (30) oraz ograniczeniem (33), gdyż w modelu tym zakłada się minimalizację maksymalnego dystansu dla wszystkich zgłoszeń, która wynika z (30) i (33), przy czym iloczyn  $\beta_{ik} e_{ik} M_i$  można traktować raczej jako wagę  $i$ -tego punktu, a nie wielkość zagrożonej populacji w obszarze o środku w punkcie  $i$ .

Jeśli wartość funkcji celu dla rozwiązania optymalnego powyższego modelu zostanie oznaczona przez  $V_k''$ , to funkcja celu modelu uwzględniającego cały zbiór  $\mathbf{K}$  sytuacji kryzysowych, które mogą zajść jednocześnie będzie przedstawiała się następująco:

$$\sum_{k \in \mathbf{K}} R_k'' \rightarrow \min \quad (36)$$

gdzie:

$$R_k'' = V_k'' - \bar{V} \quad (37)$$

$$\bar{V} = \min \{V_k'' : k \in \mathbf{K}\} \quad (38)$$

Po uwzględnieniu wag  $w_k''$  sytuacji kryzysowych proponowana wersja modelu dla całego zbioru sytuacji kryzysowych  $\mathbf{K}$  może przedstawiać się następująco (problem  $PWK$ ):

$$\sum_{k \in \mathbf{K}} w_k'' R_k'' \rightarrow \min \quad (39)$$

przy ograniczeniach:

$$\sum_{j \in \mathbf{J}} z_{ij} p_{jk} \geq Q_i, \quad \forall i \in \mathbf{I}, k \in \mathbf{K} \quad (40)$$

$$\frac{\sum_{j \in \mathbf{J}} \beta_{ik} e_{ik} M_i d_{ij} z_{ij}}{Q_i} \leq L, \quad \forall i \in \mathbf{I}, k \in \mathbf{K} \quad (41)$$

oraz (31), (34) i (35).

#### 4. Analiza złożoności sformułowanych problemów pokrycia i alokacji

Wszystkie sformułowane w rozdziale 3 problemy optymalizacyjne:  $PP$  definiowany przez (13)-(16),  $PM$  definiowany przez (20)-(24),  $PW$  definiowany przez (30)-(35),  $PPK$  definiowany przez (17)-(18) oraz (15) i (16),  $PMK$  definiowany przez (28)-(29) oraz (21), (23) i (24),  $PWK$  definiowany przez (39)-(41) oraz (31), (34) i (35), są liniowymi zadaniami programowania binarnego.

W Tabeli 1 podano rozmiary sformułowanych w rozdziale 3 problemów.

Problem	Liczba zmiennych decyzyjnych	Liczba ograniczeń
$PP$	$I+J$	$I+1$
$PM$	$I \cdot J+J$	$I \cdot J+I+1$
$PW$	$I \cdot J+I+J$	$I \cdot J+2 \cdot I+1$
$PPK$	$I+J$	$I \cdot K+1$
$PMK$	$I \cdot J+J$	$I \cdot J+I \cdot K+1$
$PWK$	$I \cdot J+I+J$	$I \cdot J+2 \cdot I \cdot K+1$

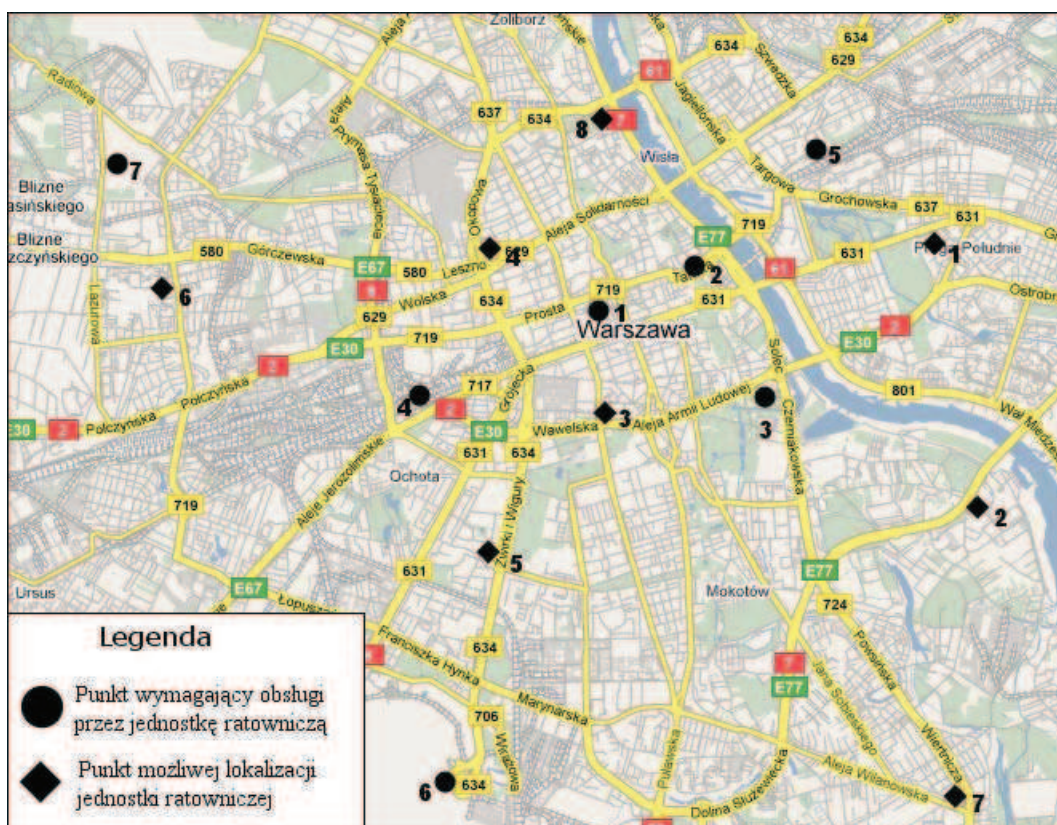
Tabela 1. Rozmiary danych dla sformułowanych problemów

W przypadku dużej liczności zbiorów  $\mathbf{I}$  oraz  $\mathbf{J}$  rozwiązanie wszystkich zadań staje się czasochłonne (wykorzystując np. do rozwiązania algorytm Balasa, którego złożoność oczekiwana jest zbliżona do wielomianowej, ale pesymistyczna złożoność jest wykładnicza). Najłatwiejszym do rozwiązania (posiadającym najmniejszy rozmiar danych wejściowych, tzn. sumę liczby zmiennych decyzyjnych i ograniczeń) jest problem  $PP$ , następnie problem  $PM$ , w dalszej kolejności problem  $PW$ , a najtrudniejszymi – problem  $PPK$ ,  $PMK$  i  $PWK$ . Zwróćmy uwagę, że problemy  $PPK$ ,  $PMK$  i  $PWK$  dotyczą  $K$  sytuacji kryzysowych jednocześnie (są rozszerzonymi problemami, odpowiednio  $PP$ ,  $PM$  i  $PW$ , dla  $K$  sytuacji). Rozwiązanie tych problemów sprowadza się w pierwszej kolejności do rozwiązania  $K$  problemów, odpowiednio  $PP$ ,  $PM$  i  $PW$ , i dopiero wówczas możemy skonstruować funkcję celu tych problemów oraz je rozwiązać.

#### 5. Przykład liczbowy

Na Rysunku 1 został przedstawiony fragment mapy Warszawy, dla którego zaprezentujemy przykład wykorzystania modelu  $P$ -medianowego opisanego przez (28)-(29) oraz (21), (23) i (24).





Rysunek 1. Fragment mapy Warszawy z zaznaczonymi punktami wystąpienia potencjalnych sytuacji kryzysowych oraz możliwych lokalizacji jednostek ratowniczych, źródło: [7]

Fragment mapy zawiera punkty będące środkami obszarów wymagających obsługi przez jednostki ratownicze ( $I=7$ ) oraz punkty będące środkami możliwych lokalizacji jednostek ratowniczych ( $J=8$ ). W ramach omawianego przykładu będą rozpatrywane  $K=3$  rodzaje sytuacji kryzysowych: katastrofa z udziałem niebezpiecznych substancji chemicznych, rozległy pożar oraz zamach terrorystyczny z udziałem ładunku wybuchowego. Wartości wszystkich parametrów zamieszczonych w przykładzie mają charakter szacunkowy.

W Tabeli 2 zostały zamieszczone wartości wag dla rozpatrywanych sytuacji kryzysowych.

ID sytuacji kryzysowej $k$	Nazwa sytuacji kryzysowej $k$	Waga ( $w'_k$ )
1	Katastrofa z udziałem substancji chemicznych	0.3
2	Rozległy pożar	0.5
3	Zamach terrorystyczny z udziałem ładunku wybuchowego	0.2

Tabela 2. Wagi  $w'_k$  sytuacji kryzysowych, źródło: [7]

W Tabeli 3 zostały zamieszczone wartości parametrów  $M_i$  i  $Q_i$  wszystkich punktów zamieszczonych na mapie i wymagających obsługi przez jednostki ratownicze.

W Tabeli 4 zamieszczono odległości ( $d_{ij}$ ) w kilometrach, jakie dzielą punkty wymagające obsługi przez jednostki ratownicze ( $i$ ), a możliwe lokalizacje tych jednostek ( $j$ ).

W Tabeli 5 dla każdego punktu  $i$  zostały zamieszczone wartości parametrów uwzględniających sytuację kryzysową  $k$ .

ID punktu $i$	Nazwa punktu $i$	Ludność ( $M_i$ )	Wymagana liczba jednostek ( $Q_i$ )
1	Centrum	90 tys.	4
2	Powisłe i Stare Miasto	50 tys.	3
3	Stadion Legii	15 tys.	2
4	Dworzec Zachodni	5 tys.	1
5	Dworzec Wschodni	5 tys.	1
6	Port Lotniczy	10 tys.	1
7	WAT	10 tys.	1

Tabela 3. Parametry  $M_i$ ,  $Q_i$  punktów wymagających obsługi przez jednostki ratownicze, źródło: [7]

Nazwa punktu $i$	ID lokalizacji $j$							
	$j=1$	$j=2$	$j=3$	$j=4$	$j=5$	$j=6$	$j=7$	$j=8$
Centrum	3	8	1	1	4	8	10	2
Powisłe i Stare Miasto	2	8	2	2	5	9	10	1
Stadion Legii	2	4	1	3	4	10	7	5
Dworzec Zachodni	7	9	2	2	2	4	10	5
Dworzec Wschodni	1	6	5	6	7	10	10	2
Port Lotniczy	11	8	7	8	3	9	7	10
WAT	13	15	8	6	7	2	20	7

Tabela 4. Odległości  $d_{ij}$  między punktami, źródło: [7]

ID punktu $i$	ID sytuacji kryzysowej $k$	Prawdopodobieństwo zajścia katastrofy ( $\beta_{ik}$ )	Siła oddziaływania ( $e_{ik}$ )
1	1	0.1	0.2
1	2	0.4	0.8
1	3	0.3	0.8
2	1	0.1	0.3
2	2	0.6	0.7
2	3	0.1	0.4
3	1	0.1	0.6
3	2	0.6	0.8
3	3	0.4	0.9
4	1	0.5	0.4
4	2	0.4	0.5
4	3	0.4	0.8
5	1	0.6	0.5
5	2	0.4	0.5
5	3	0.4	0.8
6	1	0.6	0.3
6	2	0.3	0.3
6	3	0.7	0.9
7	1	0.3	0.4
7	2	0.4	0.6
7	3	0.1	0.6

Tabela 5. Parametry  $\beta_{ik}$ ,  $e_{ik}$  punktu  $i$  w zależności od sytuacji kryzysowej  $k$ , źródło: [7]

W Tabeli 6 dla każdej lokalizacji  $j$  został zamieszczony współczynnik zmniejszenia zdolności działania w wyniku sytuacji  $k$ . Do wymaganych przez model  $P$ -medianowy parametrów należy jeszcze dodać maksymalną liczbę jednostek ratowniczych możliwą do rozlokowania w potencjalnych lokalizacjach  $P=8$ . Wartość ta jest zgodna z liczbą możliwych lokalizacji, a więc istnieje możliwość obsadzenia wszystkich punktów.

ID lokalizacji $j$	ID sytuacji kryzysowej $k$	Zmniejszenie zdolności ( $p_{jk}$ )
1	1	0.3
1	2	0.2
1	3	0.5
2	1	0.4
2	2	0.2
2	3	0.4
3	1	0.1
3	2	0.2
3	3	0.7
4	1	0.3
4	2	0.4
4	3	0.3
5	1	0.5
5	2	0.4
5	3	0.1
6	1	0.2
6	2	0.2
6	3	0.6
7	1	0.8
7	2	0.1
7	3	0.1
8	1	0.3
8	2	0.4
8	3	0.3

Tabela 6. Parametry  $p_{jk}$  punktu  $j$  w zależności od sytuacji kryzysowej  $k$ , źródło: [7]

Zgodnie z wartościami przedstawionymi w Tabeli 1, rozmiar danych dla naszego problemu  $P$ -medianowego ( $PM$ ), dla pojedynczej sytuacji kryzysowej jest następujący: liczba zmiennych decyzyjnych wynosi  $I \cdot J + J = 64$ , liczba ograniczeń jest równa  $I \cdot J + I + 1 = 64$ . Aby rozwiązać zadanie opisane przez (28)-(29) oraz (21), (23) i (24) (problem  $PMK$ ) należy najpierw  $K=3$  razy rozwiązać problem  $PM$ , a następnie można skonstruować funkcję celu (28) problemu  $PMK$  i rozwiązać ten problem, który posiada:  $I \cdot J + J = 64$  zmiennych decyzyjnych oraz  $I \cdot J + I \cdot K + 1 = 78$  ograniczeń. Do rozwiązania problemu użyto implementacji GLPK 4.8 (GNU Linear Programming Kit), która jest zbiorem funkcji i procedur napisanych w języku C i zorganizowanych w jedną bibliotekę [34]. GLPK zawiera między innymi metody do rozwiązywania dużej skali problemów programowania liniowego (PL) oraz programowania mieszanego liniowego (MPL). GLPK 4.8 JNI jest interfejsem Java dla biblioteki GLPK 4.8 napisanym przy wykorzystaniu *Java Native Interface*. Technologia ta pozwala zintegrować Javę z innymi językami programowania, w tym przypadku z językiem C. Rozwiązanie problemu z wykorzystaniem wspomnianej biblioteki, na

komputerze z procesorem Intel Centrino® Core Duo 2.2GHz zajmuje kilkadziesiąt milisekund. Tabela 7 zawiera macierz przydziału optymalnego jednostek (ich lokalizacji,  $j$ ) do obszarów potencjalnego wystąpienia sytuacji kryzysowych  $i$  (wartości zmiennych decyzyjnych  $z_{ij}$ , liczba 1 oznacza przydział, pusta komórka oznacza brak przydziału). Wartość funkcji celu dla rozwiązania optymalnego wyniosła 220040, a jednostki ratownicze powinny się znaleźć w punktach o numerach: 1, 3, 4, 5, 6, 8.

ID punktu $i$	ID lokalizacji $j$							
	$j=1$	$j=2$	$j=3$	$j=4$	$j=5$	$j=6$	$j=7$	$j=8$
$i=1$	1		1	1				1
$i=2$	1			1				1
$i=3$	1		1					
$i=4$				1				
$i=5$	1							
$i=6$					1			
$i=7$						1		

Tabela 7. Macierz przydziału optymalnego jednostek (ich lokalizacji  $j$ ) do obszarów potencjalnego wystąpienia sytuacji kryzysowych  $i$  (wartości zmiennej decyzyjnej  $z_{ij}$ , liczba 1 oznacza przydział)

Dzięki uzyskanemu rozwiązaniu, można również zaplanować (wskazać), które jednostki będą obsługiwały poszczególne obszary. Dla przedstawionego rozwiązania będzie to wyglądało następująco:

- Centrum ( $i=1$ ) – jednostki o numerach ( $j$ ): 1, 3, 4, 8,
- Powiśle i Stare Miasto ( $i=2$ ) – jednostki o numerach ( $j$ ): 1, 4, 8,
- Stadion Legii ( $i=3$ ) – jednostki o numerach ( $j$ ): 1, 3,
- Dworzec Zachodni ( $i=4$ ) – jednostka o numerze ( $j$ ): 4,
- Dworzec Wschodni ( $i=5$ ) – jednostka o numerze: 1,
- Port Lotniczy ( $i=6$ ) – jednostka o numerze: 5,
- WAT ( $i=7$ ) – jednostka o numerze ( $j$ ): 6.

Analizując otrzymane rozwiązanie można zauważyć, iż lokalizacje o numerach 2 oraz 7 nie zostały wybrane jako odpowiednie miejsca na umieszczenie w nich jednostek ratowniczych oraz to, że wszystkie obszary posiadają wymaganą liczbę jednostek ratowniczych zgodnie z tym, co zostało podane w Tabeli 3. Wpływ na wybór takiego rozwiązania miała przyjęta przez model  $P$ -medianowy miara oceny

w postaci wartości funkcji celu (19) (dla  $k$ -tej sytuacji kryzysowej). Model ten wymaga poszukiwania takiego rozmieszczenia jednostek, aby odległość między ich położeniem a punktami wymagającymi obsługi była jak najmniejsza przy uwzględnieniu wagi w postaci iloczynu  $\beta_{ik} e_{ik} M_i$ , który można interpretować jako wielkość zagrożonej populacji w punkcie  $i$ , podczas wystąpienia sytuacji  $k$ . Wpływ odległości od punktów wymagających obsługi jest niezwykle zauważalny po przyjrzeniu się fragmentowi mapy (Rysunek 1). Zwłaszcza lokalizacja o numerze 7 już na „pierwszy rzut oka” odstaje od pozostałych punktów. Można również zauważyć, iż do obsługi punktu  $i$  zostały wybrane najbliższe mu lokalizacje jednostek ratowniczych. Przy tak rozplanowanym położeniu jednostek ratowniczych, w momencie pojawienia się realnego zagrożenia decydent będzie mógł dużo łatwiej i szybciej podjąć decyzję, które siły powinien wysłać na miejsce zdarzenia.

## 6. Podsumowanie

Przedstawione w pracy modele dotyczą realnych problemów zarządzania kryzysowego, a większość z nich, co podkreślano w rozdziale 2, została sprawdzona w praktyce. Określone w rozdziale 4 rozmiary danych sformułowanych problemów optymalizacyjnych sugerują, że w praktycznych zastosowaniach (w przypadku dużych liczb  $I$  oraz  $J$ ), rozwiązanie tych problemów z wykorzystaniem standardowych algorytmów może okazać się czasochłonne (co jest istotne zwłaszcza w przypadku konieczności reagowania *on-line*, wymagającego bardzo szybkiej decyzji). Dlatego też w wielu opisywanych pracach, pisze się o zastosowaniu algorytmów heurystycznych do rozwiązania sformułowanych problemów. Godząc się na to, że rozwiązanie może nie być optymalne (ale jednak nienajgorsze), zyskujemy na czasie potrzebnym na reakcję. Odrębnym zagadnieniem jest oszacowanie wartości parametrów:  $\beta_{ik}$ ,  $e_{ik}$  oraz  $p_{jk}$ . Wartości tych parametrów mogą (powinny) być szacowane przez ekspertów od zarządzania kryzysowego z udziałem analityków. Być może celowe jest również przeprowadzenie analizy scenariuszowej, w której dla różnych wariantów wartości parametrów i wariantów sytuacji kryzysowych można przeprowadzić analizę najgorszych skutków i na tej podstawie podejmować decyzje.



Praca częściowo finansowana z projektów: MNiSW PBZ-MIN/011/013/2004 pt.: „Modele zagrożeń aglomeracji miejskiej wraz z systemem zarządzania kryzysowego na przykładzie m.st. Warszawy” oraz MNiSW PBZ-MNiSW-DBO-01/I/2007 pt.: „Monitoring, identyfikacja i przeciwdziałanie zagrożeniom bezpieczeństwa obywateli”.

## 7. Bibliografia

- [1] Benedict J., Three hierarchical objective models which incorporate the concept of excess coverage for locating EMS vehicles or hospitals, *MSc thesis*, Northwestern University (1983)
- [2] Berlin G., ReVelle C., Elzinga J., Determining ambulance-hospital locations for on-scene and hospital services, *Environment and Planning*, vol. 8, 553-561 (1976)
- [3] Carbone R., Public facility location under stochastic demand, *INFOR*, vol.12, 261-270 (1974)
- [4] Carson Y., Batta R., Locating an ambulance on the Amherst campus of the State University of New York at Buffalo, *Interfaces*, vol.20, 43-49 (1990)
- [5] Church R., ReVelle C., The maximal covering location problem, *Papers of the Regional Science Association*, vol.32, 101-118 (1974)
- [6] Calvo A., Marks H., Location of health care facilities: An analytical approach, *Socio-Economic Planning Sciences*, vol.7, 407-422 (1973)
- [7] Daleki Ł., *Analiza metod wspomaganie podejmowania decyzji w działaniach ratowniczych i reagowaniu kryzysowym*, praca magisterska pod kierunkiem Z. Tarapaty, Wydział Cybernetyki, WAT, Warszawa (2008)
- [8] Daskin M., The maximal expected covering location model: Formulation, properties and heuristic solution, *Transportation Science*, vol.17, 48-70 (1983)
- [9] Eaton D.J., Daskin M.S., Simmons D., Bulloch B., Jansma G.: Determining emergency medical deployment in Austin, Texas, *Interfaces*, vol.15(1), 96-108 (1985)
- [10] Eaton D., Hector M., Sanchez V., Lantigua R., Morgan J.: Determining ambulance deployment in Santa Domingo, Dominican Republic, *Journal of the Operational Research Society*, vol.37, 113-126 (1986)
- [11] Garfinkel R. S., Neebe A. W., Rao M. R.: The m-center problem: Minimax facility location, *Management Science*, vol.23, 1133-1142 (1977)
- [12] Hakimi S.L., Optimum locations of switching centers and the absolute centers and medians of a graph, *Operations Research*, vol.12, 450-459 (1964)
- [13] Hogan K., ReVelle C., Concepts and applications of backup coverage, *Management Science*, vol.32(11), 1434-1444 (1986)
- [14] Hochbaum D.S., Pathria A., Locating centers in a dynamically changing network and related problems, *Location Science*, vol.6, 243-256 (1998)
- [15] Iannoni A. P., Morabito R., Saydam C., A hypercube queueing model embedded into a genetic algorithm for ambulance deployment on highways, *Annals of Operations Research*, 157(1), 207-224 (2008)
- [16] Jia H., Ordóñez F., Dessouky M., Epstein D., A Modeling Framework for Facility Location of Medical Services for Large-Scale Emergencies, *IIE Transactions*, vol.39, 41-55 (2007)
- [17] Larson R.C., A hypercube queueing model for facility location and redistricting in urban emergency services, *Computers and Operations Research*, vol., 67-95 (1974)
- [18] Larson R.C., Approximating the performance of urban emergency service systems, *Operations Research*, vol.23, 845-868 (1975)
- [19] Marianov V., ReVelle C., The queueing maximal availability location problem: A model for the siting of emergency vehicles, *European Journal of Operational Research*, vol.93, 110-120 (1996)
- [20] Mirchandani P.B., Locational decisions on stochastic networks, *Geographical Analysis*, vol.12, 172-183 (1980)
- [21] Paluzzi M., Testing a heuristic P-median location allocation model for siting emergency service facilities, *Proceedings of the Annual Meeting of Association of American Geographers*, Philadelphia 2004
- [22] ReVelle C., Hogan K., A reliability constrained siting model with local estimates of busy fractions, *Environment and Planning*, vol.15, 143-152 (1986)
- [23] ReVelle C., Swain R.W., Central facilities location, *Geographical Analysis*, vol.2, 30-42 (1970)
- [24] Schilling D.A., Strategic facility planning: The analysis of options, *Decision Sciences*, vol.13, 1-14 (1982)

- [25] Schilling D., Elzinga D., Cohon J., Church R., ReVelle C., The TEAM/FLEET models for simultaneous facility and equipment siting, *Transportation Science*, vol.13, 163-175 (1979)
- [26] Serra D., Marianov V., The P-median problem in a changing network: The case of Barcelona, *Location Science*, vol.6, 383-394 (1998)
- [27] Sylvester J.J., A question in the geometry of situation, *Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics*, vol.1, 79-79 (1857)
- [28] Talmar M., Location of rescue helicopters in South Tyrol, *Proceedings of the 37th Annual ORSNZ Conference*, Auckland, New Zealand (2002)
- [29] Tarapata Z.: Nieklasyczne modele i metody planowania tras w systemach wspomagania planowania ruchu: analiza złożoności, efektywności i zastosowań, *Prace Naukowe Politechniki Warszawskiej, seria Transport*, Zeszyt 60 (2007), 99-114.
- [30] Toregas C., Swain R., ReVelle C., Bergman L., The location of emergency service facility, *Operations Research*, vol.19, 1363-1373 (1971)
- [31] *Ustawa z dnia 26 kwietnia 2007 r. o zarządzaniu kryzysowym* (Dz. U. z 2007 r. Nr 89, poz. 590)
- [32] Wang Q., Batta R., Rump Ch., Algorithms for a Facility Location Problem with Stochastic Customer Demand and Immobile Servers, *Annals of Operations Research*, vol.111, 17-34 (2002)
- [33] White J., Case K., On covering problems and the central facility location problem, *Geographical Analysis*, vol.6, 281-293 (1974)
- [34] <http://bjoern.dapnet.de/glpk/index.htm>