



BIULETYN WAT
VOL. LV, NR 2, 2006

Zastosowanie statystyk wyższego rzędu do pomiaru przesuwu częstotliwości sygnału FSK

JÓZEF KWIATOSZ, MARCIN JAKUBASZEK

Wojskowa Akademia Techniczna, Wydział Elektroniki,
00-908 Warszawa, ul. S. Kaliskiego 2

Streszczenie. Do przesyłania danych binarnych w systemach telekomunikacyjnych wykorzystywany jest sygnał z dwuwartościową manipulacją częstotliwości (FSK), którego podstawowym parametrem jest przesuw częstotliwości. W systemach rozpoznania radioelektronicznego często zachodzi potrzeba dokładnego pomiaru przesuwu częstotliwości w celu identyfikacji egzemplarza radiostacji. Stosowanie standardowych metod pomiaru tego parametru, opartych na analizie korelacyjnej lub widmowej nie daje zadowalających rezultatów, zwłaszcza przy małym stosunku sygnału i szumu.

W referacie przedstawiono matematyczne podstawy oraz opis algorytmu i wyniki pomiaru przesuwu częstotliwości w oparciu o analizę wyższego rzędu, a ściślej kumulanty drugiego i czwartego rzędu. Wykorzystano algorytm MUSIC (ang. *Multiple Signal Classification*), który bazuje na analizie wektorów własnych macierzy korelacji sygnału z szumem. Badania symulacyjne przeprowadzono przy pomocy narzędzi MATLAB-SIMULINK dla różnych stosunków sygnału i szumu oraz różnej liczby próbek.

Zastosowana metoda zapewnia dokładność pomiaru przesuwu częstotliwości rzędu dziesiątych części Hz przy stosunku sygnału i szumu 0 dB. Taki rezultat umożliwia wykorzystanie tej metody w procesie identyfikacji nadajnika radiowego.

Słowa kluczowe: teoria sygnałów, sygnały — analiza, sygnały — pomiar przesuwu częstotliwości
Symbole UKD: 621.391

1. Wprowadzenie

Rozwój techniki komputerowej umożliwia stosowanie w technicznej analizie sygnałów złożonych narzędzi matematycznych i realizację skomplikowanych algorytmów przetwarzania sygnałów. W analizie sygnałów losowych podstawowymi narzędziami są momenty pierwszego i drugiego rzędu, czyli wartość śred-

nia i funkcja korelacji. Więcej informacji o sygnale zawierają jednak statystyki wyższych rzędów, które są kombinacją momentów niższych rzędów. Dla stacjonarnego procesu losowego statystyki te noszą nazwę kumulantów, które są szczególnie przydatne w analizie sygnałów zakłóconych addytywnym szumem gausowskim. Kumulanty umożliwiają estymację widma sygnału metodami przestrzennymi, które zapewniają wysoką dokładność częstotliwościową, dzięki czemu możliwa jest precyzyjna analiza techniczna sygnałów. Szczególnie zachęcające są wyniki uzyskiwane metodą MUSIC, która została wykorzystana do pomiaru podstawowego parametru sygnału z manipulacją częstotliwości (FSK), jakim jest przesuw częstotliwości. W referacie przedstawiono definicję kumulantów, podstawy teoretyczne metody MUSIC oraz wyniki pomiaru przesuwu częstotliwości z wykorzystaniem kumulantów do estymacji widma.

2. Zastosowanie kumulantów do opisu sygnału

Dla procesu stacjonarnego $y(n)$ z zerową wartością średnią, kumulanty kolejnych rzędów określone są zależnościami [6]:

$$C_{1y} = E\{y(n)\}, \quad (1)$$

$$C_{2y}(k) = E\{y^*(n)y(n+k)\}, \quad (2)$$

$$C_{3y}(k,l) = E\{y^*(n)y(n+l)y(n+k)\}, \quad (3)$$

$$C_{4y}(k,l,m) = E\{y^*(n)y(n+k)y(n+l)y^*(n+m)\} - C_{2y}(k) \cdot C_{2y}(l-m) - C_{2y}(l) \cdot C_{2y}(k-m) - M_{2y}^*(m) \cdot M_{2y}(k-l), \quad (4)$$

gdzie:

$$M_{2y}(m) = E\{y(n)y(n+m)\}, \quad (5)$$

$$C_{2y}(k) = E\{y^*(n)y(n+k)\}. \quad (6)$$

Dla sumy statystycznie niezależnych zmiennych losowych $x(n)$ i $z(n)$:

$$y(n) = x(n) + z(n), \quad (7)$$

kumulant rzędu $p > 2$ jest równy sumie kumulantów składowych sygnału.

Dla sygnału stacjonarnego o rzeczywistych wartościach kumulanty spełniają warunki [6]:

$$C_{2y}(k) = C_{2y}(-k), \quad (8)$$

$$C_{3y}(k, l) = C_{3y}(l, k) = C_{3y}(-k, l - k), \quad (9)$$

$$C_{4y}(k, l, m) = C_{4y}(k, m, l) = C_{4y}(m, l, k) = C_{4y}(-k, m - k, l - k), \quad (10)$$

co oznacza, że są one symetryczne względem argumentu.

Kumulanty mogą być wykorzystane do estymacji widma sygnału metodą parametryczną, nieparametryczną lub przestrzenną. Największą dokładność estymacji widma uzyskuje się metodami przestrzennymi, dlatego w dalszej części bardziej szczegółowo zostanie przedstawiona metoda MUSIC należąca do tej grupy.

3. Estymacja widma sygnału metodą music

Metody przestrzenne opierają się na analizie wektorów własnych macierzy korelacji. Macierz korelacji \mathbf{R}_y sumy sygnału i szumu jest sumą macierzy korelacji sygnału \mathbf{Y} oraz macierzy korelacji szumu \mathbf{N} :

$$\mathbf{R}_y = \mathbf{Y} + \mathbf{N}. \quad (11)$$

Wektory własne macierzy korelacji można podzielić na dwie ortogonalne grupy: wektory własne powiązane z sygnałem i wektory własne powiązane z szumem.

Jeśli sygnał zawiera L sygnałów harmonicznym o różnych częstotliwościach oraz addytywny szum o wariancji σ^2 , to uśredniona z M próbek macierz korelacji \mathbf{R}_y tego sygnału może być zapisana w postaci [1, 2]:

$$\mathbf{R}_y = \mathbf{S}\mathbf{D}\mathbf{S}^H + \sigma^2\mathbf{I}. \quad (12)$$

Macierz \mathbf{S} jest macierzą częstotliwościową (zwaną macierzą skanującą) o wymiarze $(M+1) \times L$, natomiast \mathbf{I} jest macierzą jednostkową o wymiarze $(M+1) \times (M+1)$.

Dla macierzy korelacji \mathbf{R}_y można wyznaczyć wektory własne skojarzone z wartościami własnymi i wydzielić:

- macierz wektorów własnych skojarzonych z L największymi wartościami własnymi

$$\mathbf{V}_S = [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_L], \quad (13)$$

- macierz wektorów własnych skojarzonych z $M+1-L$ najmniejszymi wartościami własnymi:

$$\mathbf{V}_N = [\mathbf{v}_{L+1}, \mathbf{v}_{L+2}, \dots, \mathbf{v}_{M+1}]. \quad (14)$$

Te dwa wektory są ortogonalne, więc spełniają zależność:

$$\mathbf{V}_N^H \mathbf{V}_S = 0. \quad (15)$$

Widmo sygnału wyznaczone według algorytmu MUSIC opisane jest zależnością [3, 5]:

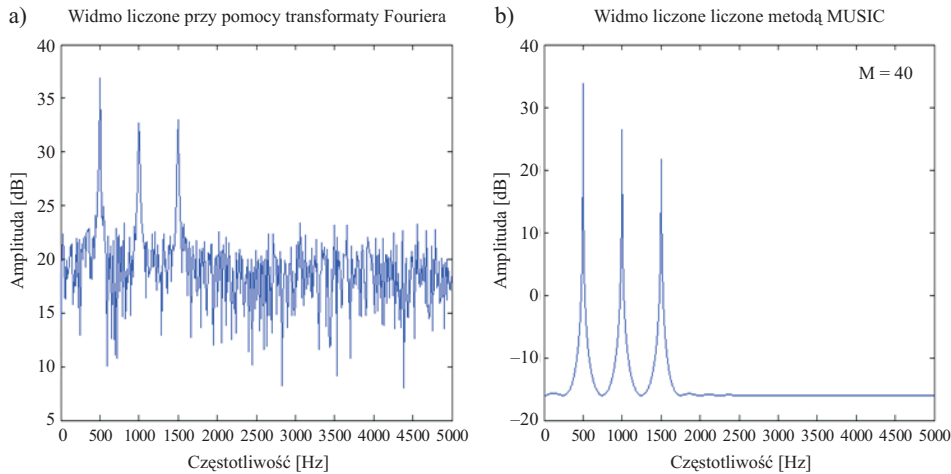
$$\hat{S}_{MUSIC}(\omega) = \frac{1}{\sum_{i=L+1}^{M+1} |\mathbf{s}^H \mathbf{v}_i|^2} = \frac{1}{\mathbf{s}^H(\omega) \mathbf{V}_N \mathbf{V}_N^H \mathbf{s}(\omega)}, \quad (16)$$

gdzie: $\mathbf{s}^T(\omega)$ jest wektorem skanującym w postaci:

$$\mathbf{s}^T(\omega) = [1, e^{-j\omega}, \dots, e^{-j\omega(M-L)}], \quad (17)$$

a wyrażenie $\mathbf{V}_N \mathbf{V}_N^H$ reprezentuje rzutowanie macierzy na przestrzeń szumową.

Na rysunku 1 pokazano widma obliczone przy pomocy transformaty Fouriera (a) oraz przy pomocy metody MUSIC (b) dla sygnału stanowiącego sumę trzech sinusoid o częstotliwościach 500 Hz, 1000 Hz i 1500 Hz i jednakowych amplitudach z addytywnym szumem gaussowskim przy stosunku sygnał/szum równym 10 dB. Widać, że w metodzie MUSIC otrzymuje się maksima bardziej wyostrome oraz niższy poziom tła szumowego niż przy transformacji Fouriera.



Rys. 1. Porównanie widm sygnału obliczonych przy pomocy transformaty Fouriera (a) i metody MUSIC (b) dla stosunku sygnał/szum równego 10 dB

Macierz korelacji w (12) jest równoważna macierzy kumulantów drugiego rzędu:

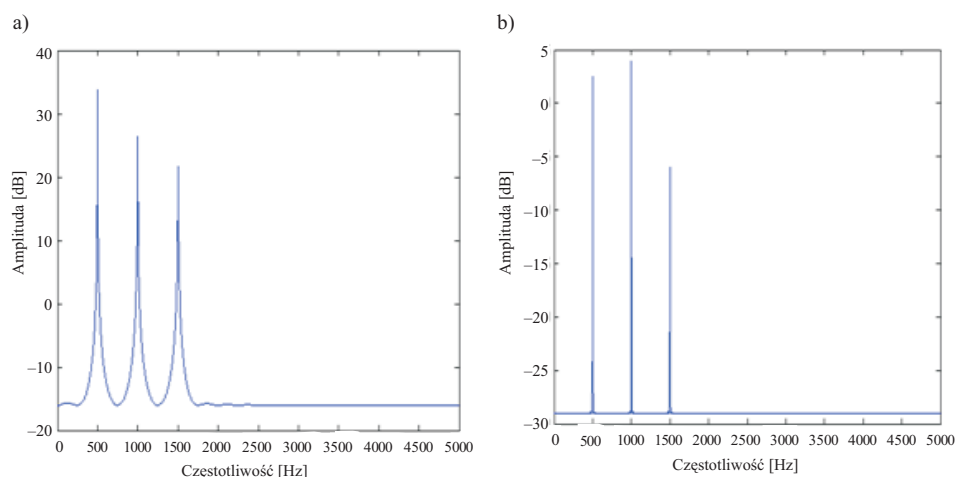
$$\mathbf{C}_{2y} = \begin{bmatrix} C_{2y}(0) & C_{2y}(1) & C_{2y}(2) & \dots & C_{2y}(M) \\ C_{2y}(-1) & C_{2y}(0) & C_{2y}(1) & \dots & C_{2y}(M-1) \\ C_{2y}(-2) & C_{2y}(-1) & C_{2y}(0) & \dots & C_{2y}(M-2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ C_{2y}(-M) & C_{2y}(-M+1) & C_{2y}(-M+2) & \dots & C_{2y}(0) \end{bmatrix}, \quad (18)$$

lub może być zastąpiona macierzą kumulantów czwartego rzędu [4]:

$$\mathbf{C}_{4y} = \begin{bmatrix} C_{4y}(0) & C_{4y}(1) & C_{4y}(2) & \dots & C_{4y}(M) \\ C_{4y}(1) & C_{4y}(0) & C_{4y}(1) & \dots & C_{4y}(M-1) \\ C_{4y}(2) & C_{4y}(1) & C_{4y}(0) & \dots & C_{4y}(M-2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ C_{4y}(M) & C_{4y}(M-1) & C_{4y}(M-2) & \dots & C_{4y}(0) \end{bmatrix}, \quad (19)$$

gdzie $C_{4y}(k)$ oznacza $C_{4y}(k,0,0)$ dla $k = \{1, 2, \dots, M\}$.

Na rysunku 2 przedstawiono przykładowe widma sumy trzech sygnałów harmonicznym o jednakowych amplitudach i częstotliwościach 500 Hz, 1000 Hz, 1500 Hz przy zastosowaniu kumulantów drugiego i czwartego rzędu dla $M = 240$



Rys. 2. Widmo sygnału obliczone metodą MUSIC przy wykorzystaniu kumulantów drugiego (a) i czwartego (b) rzędu

próbek. Widać, że widmo obliczone z wykorzystaniem kumulantów drugiego rzędu jest identyczne jak dla klasycznej metody MUSIC (rys. 1), natomiast zastosowanie kumulantów czwartego rzędu daje dalsze wyostrenie maksimów i obniżenie tła szumowego.

4. Pomiar przesuwu częstotliwości metodą music

Przesuw częstotliwości jest podstawowym parametrem sygnałów z manipulacją częstotliwości (FSK) i jest równy wartości bezwzględnej różnicy częstotliwości znamiennej dla stanów logicznych „1” (f_1) i „0” (f_0):

$$D = |f_1 - f_0|. \quad (20)$$

Pomiar przesuwu częstotliwości sprowadza się zatem do pomiaru częstotliwości znamiennej i określenia różnicy między nimi. Należy jednak zaznaczyć, że w procesie manipulacji stany logiczne „1” i „0” (a zatem i częstotliwości znamienne f_1 i f_0) występują w sposób losowy. Z tego względu przy pomiarze przesuwu częstotliwości ważnym problemem jest to, aby w czasie pobierania próbek wystąpiły obie częstotliwości znamienne.

5. Przebieg i wyniki eksperymentu

5.1. Założenia wstępne

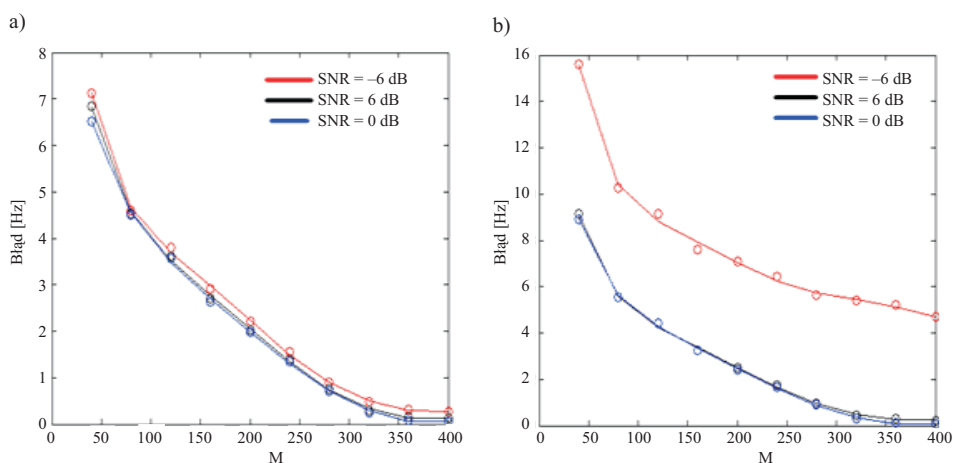
Do pomiaru przesuwu częstotliwości opracowano program symulacyjny w środowisku MATLAB, przy pomocy którego przeprowadzono badania symulacyjne dokładności i rozdzielczości pomiaru przesuwu częstotliwości.

Badania dokładności pomiaru przesuwu częstotliwości przeprowadzono na sygnale FSK o częstotliwościach znamiennej $f_1 = 2250$ Hz i $f_2 = 2750$ Hz z szybkością modulacji $\nu = 100$ Bd z addytywnym szumem gaussowskim. Częstotliwość próbkowania sygnału wynosiła $f_s = 10$ kHz, natomiast czas trwania sygnału wynosił 1 s. Badania dokładności pomiaru przesuwu częstotliwości przeprowadzono dla różnych stosunków sygnał/szum oraz różnej liczby próbek kumulantów sygnału M przy zastosowaniu kumulantów 2 i 4 rzędu.

Przez rozdzielczość pomiaru przesuwu częstotliwości metody rozumie się minimalną różnicę częstotliwości znamiennej, przy której metoda je rozróżnia. Badania rozdzielczości przeprowadzono przy zastosowaniu kumulantów 2 i 4 rzędu przy stałej liczbie próbek $M = 320$ dla różnych stosunków sygnał/szum i zmniejszającej się wartości przesuwu częstotliwości.

5.2. Dokładność pomiaru przesuwu częstotliwości w funkcji liczby próbek

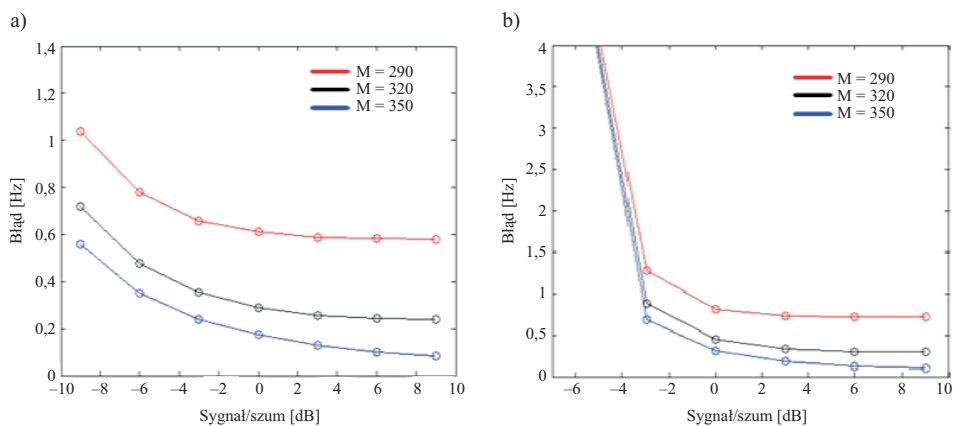
Uśrednione wyniki błędu pomiaru przesuwu częstotliwości w funkcji liczby próbek przy zastosowaniu kumulantów drugiego i czwartego rzędu są pokazane na rysunku 3. Widać, że w obu przypadkach błąd pomiaru maleje wraz ze wzrostem liczby próbek kumulantów M . Stwierdzono, że powyżej $M = 320$ dynamika poprawy dokładności maleje, natomiast czas obliczeń rośnie wykładniczo w funkcji M .



Rys. 3. Dokładność pomiaru przesuwu częstotliwości w funkcji liczby próbek M kumulantów drugiego (a) i czwartego (b) rzędu

5.3. Dokładność pomiaru przesuwu częstotliwości w funkcji stosunku sygnał/szum

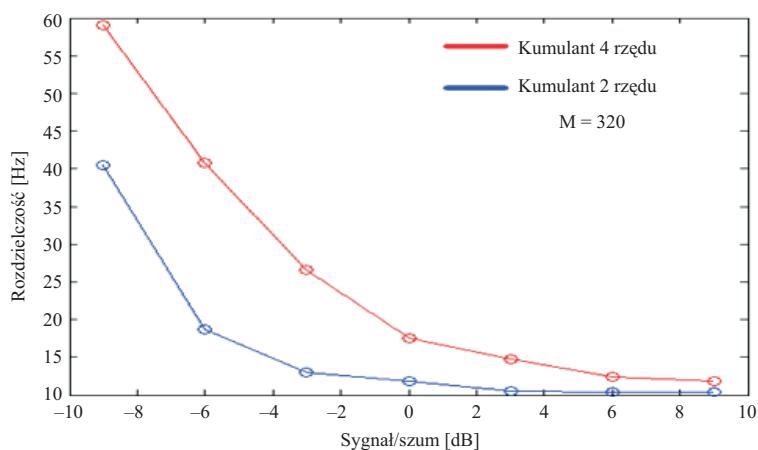
Wykres błędów pomiaru przesuwu częstotliwości w funkcji stosunku sygnał/szum przy zastosowaniu kumulantów drugiego i czwartego rzędu dla liczby próbek $M = 290, 320$ i 350 jest pokazany na rysunku 4. Widać, że ten błąd maleje wraz ze wzrostem stosunku sygnał/szum, przy czym jest on mniejszy w przypadku kumulantu drugiego rzędu.



Rys. 4. Wykres błęd pomiaru przesuwu częstotliwości w funkcji stosunku sygnał/szum metodą MUSIC przy zastosowaniu kumulantów drugiego (a) i czwartego (b) rzędu dla różnych wartości liczby próbek M

5.4. Badanie rozdzielczości częstotliwościowej pomiaru przesuwu częstotliwości

Wykres minimalnej różnicy częstotliwości znamiennej sygnału FSK, przy której możliwe jest ich rozróżnienie, w funkcji stosunku sygnał/szum przy zastosowaniu kumulantów drugiego i czwartego rzędu i stałej liczbie próbek $M = 320$ jest pokazany na rysunku 5. Widać, że rozdzielczość częstotliwościowa metody poprawia się wraz ze wzrostem stosunku sygnał/szum, przy czym jest ona lepsza przy zastosowaniu kumulantów drugiego rzędu. Stanowi to potwierdzenie wyni-



Rys. 5. Porównanie wartości minimalnego przesuwu częstotliwości w funkcji stosunku sygnał/szum dla metody MUSIC liczonej z zastosowaniem kumulantów drugiego i czwartego rzędu

ków z poprzednich badań i świadczy o większej przydatności kumulantów drugiego rzędu. Należy jednak stwierdzić, że w obu przypadkach uzyskuje się wystarczającą rozdzielczość dla realnie występujących stosunków sygnał/szum i praktycznie stosowanych przesuwach częstotliwości.

6. Wnioski

Z przeprowadzonych badań dokładności pomiaru przesuwu częstotliwości i rozdzielczości częstotliwościowej wynikają następujące wnioski:

1. Przestrzenna metoda estymacji widma MUSIC zapewnia wysoką dokładność określania składowych harmonicznych sygnału. Szczególną zaletą tej metody polega na tym, że poszczególne składowe są w widmie reprezentowane przez ostre i strome maksima, co nie jest możliwe do uzyskania przy pomocy innych metod estymacji widma.
2. Zastosowanie kumulantów drugiego rzędu do estymacji widma sygnału z manipulacją częstotliwości (FSK) metodą MUSIC daje lepsze rezultaty niż zastosowanie kumulantów czwartego rzędu.
3. Ze wzrostem stosunku sygnał/szum dokładność pomiaru poszczególnych częstotliwości składowych rośnie przy czym ten przyrost przy stosunku sygnał/szum większym niż 3 dB jest nieznaczny, co oznacza, że metoda MUSIC nadaje się do analizy słabych sygnałów.
4. Dokładność pomiaru częstotliwości składowych sygnału rośnie ze wzrostem liczby próbek wykorzystywanych do obliczenia kumulantów, przy czym ten przyrost dokładności jest już nieznaczny przy liczbie próbek większej od 320. Ze wzrostem liczby próbek czas obliczeń rośnie wykładniczo, więc dla osiągnięcia zadowalających wyników w rozsądnym czasie przy obecnym poziomie techniki wskazane jest stosowanie około 320 próbek.
5. Dzięki dużej stromości maksimów w widmie sygnału uzyskanym metodą MUSIC uzyskuje się stosunkowo wysoką rozdzielczość częstotliwościową, co jest szczególnie przydatne przy analizie sygnałów FSK z małym przesuwem częstotliwości.
6. Dokładność pomiaru przesuwu częstotliwości sygnału FSK na poziomie ułamków Hz umożliwia precyzyjną realizację procesu klasyfikacji sygnałów a nawet identyfikacji źródeł promieniowania. Jest to cecha szczególnie przydatna we współczesnym rozpoznaniu radioelektronicznym.
7. Wysoka dokładność pomiaru częstotliwości umożliwi również precyzyjną analizę techniczną sygnałów ze zwielokrotnieniem częstotliwościowym, w tym dokładne określenie liczby kanałów zwielokrotnienia oraz odstepu częstotliwości między tymi kanałami.

Artykuł wpłynął do redakcji 20.10.2005 r. Zweryfikowaną wersję po recenzji otrzymano w styczniu 2006 r.

LITERATURA

- [1] M. BOUZAIEN, A. MANSOUR, *HOS Criteria & ICA Algorithms Applied to Radar Detection*, 4th International Symposium on Independent Component Analysis and Blind Signal Separation (ICA2003), kwiecień 2003, Nara, Japonia.
- [2] H. CHIEN, H. YANG, CH. CHI, *Parametric Cumulant Based Phase Estimation of 1-D and 2-D Nonminimum Phase Systems by Allpass Filterin*, IEEE TRANSACTIONS ON SIGNAL PROCESSING, Vol. 45, No. 7, lipiec 1997.
- [3] S. HAYKIN, *Adaptive Filter Theory*, Prentice Hall, Upper Saddle River, 1996.
- [4] E. MOULINES, J. CARDOSO, *Second-Order Versus Four-Order MUSIC Alorithms: An Asymptotical Statistical Analisys*, Télécom Paris — CNRS URA-820, 1999.
- [5] B. SMITH, CH. FIELD, *Symbolic Cumulant calculations for frequency domain time series*, Dalhousie Univesity, marzec 1999.
- [6] *HOSA Analysis Guide User*, Mathworks Company, 1994.

J. KWIATOSZ, M. JAKUBASZEK

Frequency shift measurement in the FSK signal using higher-order statistic

Abstract. FSK signal is used for binary data transmission in telecommunication systems. Basic parameters for FSK signal is the frequency shift. Accurate measurement of the frequency shift is necessary in radio electronics reconnaissance for given radio station identification. Using standard measurement methods of this parameter, based on correlation or spectrum analysis is not efficient, especially in the presence of the small signal-to-noise ratio.

In this paper mathematical rules as well as algorithm description and frequency shift measurements results based on higher order analysis are presented. Experiments carried out based on the second and the fourth cumulant analysis. Multiple Signal Classification method (MUSIC) based on eigenvector correlation matrix for signal with noise was used. Computer simulation experiments were carried on using Matlab-Simulink programmable science environment for various noise-to-signal ratios as well as various samples number.

Method used in the presented experiments guarantees frequency shift accuracy measurement in the order ten parts per Hz in the presence signal-to-noise ratio 0dB. This result enables this method to be used in the radio transmitter identification process.

Keywords: signal theory, signals — analysis, signals — frequency shift measurement

Universal Decimal Classification: 621.391