BIULETYN WAT
VOL. LV, NR 1, 2006

O propagacji fal Stoneleya wzdłuż statystycznie nierównej międzypowierzchni materialnej

ANDRZEJ DUKATA, JERZY KAPELEWSKI

Wojskowa Akademia Techniczna, Wydział Elektroniki, Instytut Radioelektroniki,
01-980 Warszawa, ul. S. Kaliskiego 2

Streszczenie. Przedstawiono model propagacji fal typu Stoneleya (SW) wzdłuż statystycznie nierównej płaszczyzny łączącej dwa izotropowe ośrodki sprężyste. Skorzystano z metody funkcji Greena. Powierzchnię zamodelowano normalnym, izotropowym w szerszym sensie polem losowym. Uzyskano charakterystyki statystyczne zaburzonego pola dynamicznego. Praca stanowi fragment szerszej teorii badań nieniszczących międzypowierzchni materialnych.
Słowa kluczowe: badania nieniszczące, propagacja fal, fala Stoneleya
Symbole UKD: 620.179.1

1. Wstęp

Wzdłuż płaszczyzny łączącej dwa ośrodki sprężyste mogą propagować się bez tłumienia fale powierzchniowe zwane falami Stoneleya (SW). Dla zaistnienia SW muszą być spełnione bardzo ostre kryteria [1]. Jeśli prędkość fali Rayleigha, Stoneleya i objętościowej poprzecznej w ośrodku o większej gęstości oznaczymy odpowiednio przez v_R, v_S, v_T, to $v_R < v_S < v_T$. Ponadto dla obu ośrodków $v_S < v_T, v'_T$.

Fale Stoneleya mogą być używane do badań nieniszczących konstrukcji wykorzystujących ścisłe połączenie dwóch ośrodków sprężystych, dla których spełnione są kryteria istnienia tych fal. Przykładem są stosowane w technice lotniczej połączenia stal-aluminium i tytan-aluminium [2].

Przy zwiększaniu częstotliwości pracy urządzeń z AFP niezbędne stało się oszacowanie wielu poprzednio pomijanych czynników. Należą do nich m.in. zjawiska losowe, takie jak rozpraszanie AFP na powierzchniach nierównych, naprężeniach mechanicznych, niejednorodnościach warstwy przypowierzchniowej itp.

Problem rozpraszania fal na powierzchniach nierównych jest ogólnie znany i badany od dawna przez uczonych wielu specjalności (sejsmologia, łączność radiowa itp.). Ogólnego i ścisłego rozwiązania tego typu problemów jak dotąd nie znaleziono. Badacze korzystają z metod przybliżonych, związanych z określonymi modelami powierzchni nierównej.

Zakres niniejszej pracy nie pozwala na skrócony nawet opis tego problemu, a zainteresowanego czytelnika odsyłamy do pracy [3], w której polecamy wybór kilku monografii i artykułów przeglądowych o różnym stopniu trudności.

Przedstawiony przez nas sposób postępowania wykorzystaliśmy w pracy [3] do znalezienia ścisłych wyrażeń na wartość średnią i na widmową gęstość mocy wektorowego losowego pola przemieszczeń związanego z propagującą się falą Rayleigha na statystycznie nierównej powierzchni. Metoda ta opiera się na znanym w literaturze sposobie (zob. np. [4]) zastąpienia powierzchni nierównej ekwiwalentnym rozkładem naprężeń sprowadzonym do płaszczyzny średniej. Następnie można wyznaczyć za pomocą funkcji Greena ww. charakterystyki dla propagującej się na granicy dwóch izotropowych ośrodków sprężystych fali Stoneleya.

Oryginalność pracy polega na znalezieniu rozwiązania w postaci zamkniętej. Dla przyjętego modelu matematycznego powierzchni jest to metoda ścisła.

2. Sformułowanie zagadnienia

Rozważmy dwa różne ośrodki sprężyste wypełniające odpowiednio półprzestrzeń sprężystą $x_3 \geq \zeta(x_1, x_2)$ i $x_3 < \zeta(x_1, x_2)$, połączone powierzchnią $x_3 = \zeta(x_1, x_2)$.

Przyjmijmy, że

1) półprzestrzenie sprężyste są ośrodkami izotropowymi, jednorodnymi o gęstościach odpowiednio ρ, ρ' i stałych materiałowych tensora sprężystości C_{ijkl}, C'_{ijkl};
2) naprężenia i odkształcenia na powierzchni łączącej ośrodki są ciągłe, tzn.

$$\left.\begin{aligned} T_{nn}\big|_{x_3=+\zeta} - T_{ns}\big|_{x_3=-\zeta} &= 0; \\ u_k\big|_{x_3=+\zeta} - u_k\big|_{x_3=-\zeta} &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \text{dla } x_3 = \zeta(x_1, x_2); \tag{2.1}$$

3) powierzchnia łącząca dwa ośrodki sprężyste jest opisana przez pole losowe $\zeta(x_1, x_2)$, dla którego zakładamy, że ma znaną wartość średnią $m_\zeta(x_1, x_2) = 0$ i znaną funkcję korelacyjną $K_\zeta(\mathbf{r}_{||}, \mathbf{r}'_{||})$, gdzie $\mathbf{r}_{||} = (x_1, x_2)$, $\mathbf{r}'_{||} = (x'_1, x'_2)$.

W polu losowym $\zeta(x_1,x_2;\gamma)$ zakładamy, że:

1) $\zeta(x_1,x_2;\gamma)$ jest polem losowym rzeczywistym, ciągłym i różniczkowalnym w sensie średniokwadratowym,
2) krzywizna prawie wszystkich realizacji pola losowego $\zeta(x_1,x_2;\gamma)$ jest dostatecznie mała oraz „amplituda" A nierówności (dla prawie wszystkich realizacji) jest mała w porównaniu z długością rozważanej fali Stoneleya λ_S; ściśle rzecz biorąc, zakładamy, że zdarzenia

$$\left|\frac{A}{\lambda_S}\right| \ll 1, \quad \left|\frac{\partial\zeta}{\partial x_1}\right| \ll 1, \quad \left|\frac{\partial\zeta}{\partial x_2}\right| \ll 1 \tag{2.2}$$

zachodzą z prawdopodobieństwem równym 1.

W powyższych wzorach wskaźniki $i, j, \ldots = 1, 2, 3$ oznaczają składowe kartezjańskiego układu współrzędnych. Będziemy dalej używać konwencji sumacyjnej Einsteina (po powtarzających się wskaźnikach wektorowych i tensorowych).

Niech w kierunku x_1, wzdłuż idealnie płaskiej płaszczyzny łączącej dwa izotropowe ośrodki sprężyste, propaguje się płaska fala Stoneleya o przemieszczeniach

$$\left.\begin{aligned} u_1(x_1,x_3) &= [A_1 e^{-\alpha_1 x_3} + A_2 e^{-\alpha_2 x_3}]\exp[\mathrm{i}k_S(x_1 - \upsilon_S t)] \\ u_3(x_1,x_3) &= [\mathrm{i}\frac{\alpha_1}{k_S} A_1 e^{-\alpha_1 x_3} + \mathrm{i}\frac{k_S}{\alpha_2} A_2 e^{-\alpha_2 x_3}]\exp[\mathrm{i}k_S(x_1 - \upsilon_S t)] \end{aligned}\right\} \text{ w ośrodku I} \tag{2.3a}$$

$$\left.\begin{aligned} u_1'(x_1,x_3) &= [A_1' e^{\alpha_1' x_3} + A_2' e^{\alpha_2' x_3}]\exp[\mathrm{i}k_S(x_1 - \upsilon_S t)] \\ u_3'(x_1,x_3) &= [-\mathrm{i}\frac{\alpha_1'}{k_S} A_1' e^{\alpha_1' x_3} - \mathrm{i}\frac{k_S}{\alpha_2'} A_2 e^{\alpha_2' x_3}]\exp[\mathrm{i}k_S(x_1 - \upsilon_S t)] \end{aligned}\right\} \text{ w ośrodku II} \tag{2.3b}$$

Dla tej fali warunki brzegowe oznaczają ciągłość naprężeń i przemieszczeń na powierzchni

$$\left.\begin{aligned} T_{3k}\big|_{x_3=+0} - T_{3k}\big|_{x_3=-0} &= 0; \\ u_k^0\big|_{x_3=+0} - u_k^0\big|_{x_3=-0} &= 0 \end{aligned}\right. \quad \text{dla } x_3 = 0; \quad k = 1, 3. \tag{2.4}$$

W dodatku A zamieszczamy jawną postać wyrażeń (2.3) i wyjaśnienie wszystkich występujących współczynników.

Powierzchnię nierówną, wzdłuż której propaguje się SW, zastąpimy powierzchnią ekwiwalentną sprowadzoną do płaszczyzny średniej $x_3 = 0$, na której powstają małe, losowe naprężenia. Te losowe naprężenia wywołują rozproszenie fali Stoneleya. Postać ogólną tych naprężeń wyznaczymy w następnym rozdziale.

W naszym przypadku równanie na falę rozproszoną można wyznaczyć z relacji [6]

$$u_m(\mathbf{r}_{||}, x_3) = \int \delta(x_3')T_{ik}(\mathbf{r}', x_3')n_k G_{im}(\mathbf{r}_{||} - \mathbf{r}_{||}', x_3, x_3')\mathrm{d}\mathbf{r}_{||}'\mathrm{d}x_3', \tag{2.5}$$

gdzie wersor $\mathbf{n} = [0, 0, -1]$ ma wymiar powierzchni, G_{im} jest funkcją Greena dla dwóch połączonych półprzestrzeni o różnych właściwościach sprężystych.

Wprowadzając teraz wektorowe losowe pole przemieszczeń $\mathbf{w}(x_1, x_2)$ i wektorowe losowe pole naprężeń $\mathbf{t}(x_1, x_2)$ na powierzchni $x_3 = 0$, możemy zapisać wzór (2.5) w postaci

$$w_m(x_1, x_2) = t_k(x_1, x_2) ** G_{km}(x_1, x_2), \tag{2.6}$$

gdzie znak $**$ oznacza operację splotu dwuwymiarowego.

Wynika stąd, że naszym celem jest znalezienie charakterystyk probabilistycznych pola losowego $\mathbf{w}(\mathbf{r}_{||})$ związanego z polem losowym $\mathbf{t}(\mathbf{r}_{||})$ relacją (2.6). Z kolei $\mathbf{t}(\mathbf{r}_{||})$ wiąże się z polem losowym $\zeta(\mathbf{r}_{||})$ opisującym powierzchnię za pomocą relacji, które przedstawimy w następnym rozdziale. Zgodnie z teorią korelacyjną wystarczające jest znalezienie wektora wartości średniej i tensora korelacji wektorowego pola losowego $\mathbf{w}(\mathbf{r}_{||})$. Równoważną charakterystyką jest widmowa gęstość mocy tego pola, będąca dwuwymiarową transformatą tensora korelacji, które wyznaczymy.

3. Rozkład losowego pola naprężeń

Dla wyznaczenia rozkładu losowego pola naprężeń $\mathbf{t}(\mathbf{r}_{||})$ uogólnimy metodę zastosowaną do badania rozpraszania fal Rayleigha [3, 4]. Powierzchnię nierówną wzdłuż której propaguje się fala Stoneleya zastąpimy powierzchnią ekwiwalentną sprowadzoną do płaszczyzny średniej $x_3 = 0$, na której powstają losowe naprężenia. W pierwszym przybliżeniu:

$$\begin{aligned} &T_{31}(0) = \left(\frac{\partial T_{31}^0}{\partial x_3}\right)_{x_3=0} \zeta - \left(T_{11}^0\right)_{x_3=0} \frac{\partial \zeta}{\partial x_1}; \\ &T_{32}(0) = -\left(T_{22}^0\right)_{x_3=0} \frac{\partial \zeta}{\partial x_2}; \qquad T_{33}(0) = -\left(\frac{\partial T_{33}^0}{\partial x_3}\right)_{x_3=0} \zeta, \end{aligned} \tag{3.5}$$

gdzie wielkości z indeksem „0” oznaczają naprężenia wywołane w naszym przypadku płaską falą Stoneleya. Wielkości te można otrzymać, wstawiając (2.3) do ogólnych zależności między naprężeniami i odkształceniami

$$T_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl} \quad \text{gdzie} \quad \varepsilon_{kl} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_k}\right). \tag{3.6}$$

Jesli pominie się człon exp (–iωt), to pole losowe $\mathbf{t}(\mathbf{r}_{||})$ związane z naprężeniami na powierzchni spowodowanymi biegnącą falą Stoneleya można wyrazić przez

$$\begin{gathered} t_1(\mathbf{r}_{||}) = \left[T_1\zeta(\mathbf{r}_{||}) - \mathrm{i}T_1'\frac{\partial\zeta(\mathbf{r}_{||})}{\partial x_1}\right]\exp(\mathrm{i}k_S x_1); \\ t_2(\mathbf{r}_{||}) = \left[-\mathrm{i}T_2\frac{\partial\zeta(\mathbf{r}_{||})}{\partial x_2}\right]\exp(\mathrm{i}k_S x_1); \quad t_3(\mathbf{r}_{||}) = -\mathrm{i}T_3\zeta(\mathbf{r}_{||})\exp(\mathrm{i}k_S x_1), \end{gathered} \tag{3.7}$$

gdzie $\zeta(\mathbf{r}_{||})$ jest polem losowym o znanych parametrach opisujących właściwości powierzchni nierównej, a wielkości T_k, T_1' ($k = 1, 2, 3$) są liczbami rzeczywistymi zależnymi od parametrów materiałowych obu ośrodków oraz częstości ω. Postać tych wyrażeń jest następująca

$$\begin{aligned} T_1 &= A_1 2C_{44}\alpha_1^2 + A_2 C_{44}(\alpha_2^2 + k_S^2), \\ T_1' &= A_1 k_S\left[C_{11}\left(1 - \frac{\alpha_1^2}{k_S^2}\right) + 2C_{44}\frac{\alpha_1^2}{k_S^2}\right] + A_2 2C_{44}k_S, \\ T_2 &= A_1 k_S(C_{11} - 2C_{44})\left(1 - \frac{\alpha_1^2}{k_S^2}\right), \\ T_3 &= A_1 k_S\alpha_1\left[2C_{44} - C_{11}\left(1 - \frac{\alpha_1^2}{k_S^2}\right)\right] + A_2 2C_{44}\alpha_2 k_S. \end{aligned} \tag{3.8}$$

Wyrażenia (3.7) mają identyczną postać jak wzory (2.5) z naszej pracy [3]. Powyższy wniosek jest bardzo istotny dla dalszych rozważań. W rezultacie zagadnienie propagacji fal Stoneleya na powierzchni nierównej sprowadzono do zagadnienia propagacji fal Rayleigha na tejże powierzchni. Korzystając z tego, że w pracy [3] znajdują się szczegółowe rozważania, pozwolimy sobie tylko przytoczyć najbardziej istotne elementy tych rozważań.

4. Podstawowe charakterystyki losowego pola przemieszczeń

Jak wspomniano w rozdziale drugim, podstawowymi charakterystykami wektorowego losowego pola przemieszczeń $\mathbf{w}(\mathbf{r})$ są: wektor wartości średniej i tensor korelacji. Dwuwymiarowa transformata Fouriera tensora korelacji tego pola, którą oznaczymy przez $\tilde{R}_{w_m w_n}$, jest nazywana widmową gęstością mocy. Jest to charakterystyka równoważna. Jak wiemy (zob. np. [7] str. 44), widmowa gęstość mocy wektorowego losowego pola przemieszczeń z dokładnością do stałego mnożnika ma znaczenie średniej gęstości energii rozproszonej przypadającej na jednostkowy interwał wektora falowego.

W pracy [3] wykazaliśmy, że wiąże się ono z widmową gęstością mocy wektorowego losowego pola naprężeń formułą

$$\tilde{R}_{w_m w_n}(k_1,k_2) = \tilde{R}_{t_i t_j}(k_1,k_2)\tilde{G}_{im}(k_1,k_2)\tilde{G}^*_{jn}(k_1,k_2), \tag{4.1}$$

gdzie znak „~" nad symbolem oznacza dwuwymiarową transformatę Fouriera, znak „*" oznacza wielkość zespoloną sprzężoną, a k_1 i k_2 są tzw. częstotliwościami przestrzennymi transformaty Fouriera (składowymi dwuwymiarowego wektora falowego).

Przyjmijmy, że pole losowe $\zeta(\mathbf{r}_{\|})$ jest gaussowskie, izotropowe w szerszym sensie, o zerowej wartości średniej i funkcji korelacyjnej

$$K_\zeta(\rho) = \frac{A}{2\pi\sigma^2}\exp\left[-\frac{\rho^2}{2\sigma^2}\right], \tag{4.2}$$

gdzie: $\sqrt{2\sigma}$ jest tzw. promieniem korelacji powierzchni chropowatej, a A jest wielkością charakteryzującą nierówności. Dla takiego pola można wykazać [3], że wartość średnia pola losowego $\mathbf{w}(\mathbf{r}_{\|})$ jest zerowa.

Widmowa gęstość mocy wektorowego losowego pola naprężeń $\mathbf{t}(\mathbf{r}_{\|})$, będąca dwuwymiarową transformatą tensora korelacji, ma zaś identyczną postać jak podana we wzorach (6.1) w pracy [3] za wyjątkiem innego znaczenia, odpowiadającego fali SW, rzeczywistych współczynników T_m, T_1' ($m = 1, 2, 3$). Elementy tego tensora tworzą macierz

$$\tilde{R}_{t_i t_j}(k_1,k_2) = E\begin{pmatrix} T_1^2 + T_1'^2(k_1-k_S)^2 & T_1'T_2(k_1-k_S)k_2 + T_1T_2k_2 & \mathrm{i}T_1'T_3(k_1-k_S)+T_1T_3 \\ T_1'T_2(k_1-k_S)k_2 + T_1T_2k_2 & T_2^2k_2^2 & \mathrm{i}T_2T_3k_2 \\ -\mathrm{i}T_1'T_3(k_1-k_S)+T_1T_3 & -\mathrm{i}T_2T_3k_2 & -T_3^2 \end{pmatrix}, \tag{4.3}$$

gdzie

$$E = A\exp\left[-\frac{(k_1-k_S)+k_2^2}{2(1/\sigma)^2}\right]. \tag{4.4}$$

Wykonując transformację układu równań (4.1) względem macierzy $\hat{S}(\mathbf{k})$ określonej wzorem (B.7), otrzymujemy

$$\tilde{R}_{w_m w_n}(\mathbf{k}) = (2\pi)^2 \tilde{t}_{ij}(\mathbf{k}) \tilde{g}_{im}(\mathbf{k}) \tilde{g}^*_{jn}(\mathbf{k}), \tag{4.5}$$

gdzie

$$\tilde{t}_{ij}(\mathbf{k}) = S_{ia}(\mathbf{k}) \tilde{R}_{t_a t_b}(\mathbf{k}) S^{-1}_{bj}(\mathbf{k}). \tag{4.6}$$

Wprowadzając dalsze uproszczenia w zapisie wg schematu

$$\tilde{g}_{ij} = \begin{pmatrix} g_1 & 0 & \mathrm{i}g_5 \\ 0 & g_2 & 0 \\ \mathrm{i}g_5' & 0 & g_3 \end{pmatrix} \qquad \tilde{t}_{ij} = \begin{pmatrix} t_1 & t_6 & \mathrm{i}t_5 \\ t_6 & t_2 & \mathrm{i}t_4 \\ -\mathrm{i}t_5 & -\mathrm{i}t_4 & t_3 \end{pmatrix} \tag{4.7}$$

widmową gęstość mocy wektorowego losowego pola odkształceń $\mathbf{w}(\mathbf{r}_{\|})$ można wyrazić przez

$$\tilde{R}_{w_m w_n}(\mathbf{k}) = (2\pi)^2 \begin{pmatrix} t_1 g_1^2 + 2t_5 g_1 g_5' + t_3 g_5'^2 & t_6 g_1 g_2 + t_4 g_5' g_2 & \begin{matrix} -\mathrm{i}(t_1 g_1 g_5 + t_5 g_1 g_3 + \\ + t_5 g_5 g_5' + t_3 g_3 g_5') \end{matrix} \\ t_6 g_1 g_2 + t_4 g_5' g_2 & t_2 g_2^2 & -\mathrm{i}(t_6 g_2 g_5 + t_4 g_2 g_3) \\ \begin{matrix} \mathrm{i}(t_1 g_1 g_5 + t_5 g_1 g_3 + \\ + t_5 g_5 g_5' + t_3 g_3 g_5') \end{matrix} & \mathrm{i}(t_6 g_2 g_5 + t_4 g_2 g_3) & t_1 g_5^2 + 2t_5 g_3 g_5 + t_3 g_3^2 \end{pmatrix}. \tag{4.8}$$

Zgodnie z oczekiwaniami jest to macierz hermitowska. Postać funkcji Greena, odpowiadająca używanej przez nas transformacie $\tilde{g}_{im}(k_1, k_2)$, znajduje się np. w pracach [8, 9]. Najważniejsze wyniki dotyczące tej funkcji zamieszczono w dodatku B.

Zwracamy też uwagę na inną (z dokładnością do stałego mnożnika) postać funkcji Greena niż używana w ww. pracach (por. wzór (5.0) w pracy [6]).

5. Dyskusja

Przedstawione rozważania pozwalają na szczegółową analizę propagacji SW na powierzchniach nierównych modelowanych normalnym izotropowym w szerszym sensie polem losowym.

Postać transformaty funkcji Greena jest dość złożona. Uzyskanie wartości liczbowych, dla zadanych parametrów charakteryzujących powierzchnię nierówną, wymaga więc obliczeń numerycznych. Wyznaczenie liczby falowej k_S związanej z propagującą się SW dla zadanych parametrów materiałowych ośrodków, także wymaga numerycznego rozwiązania równania A.6. Należy zwrócić uwagę, że funkcja Greena wyrażona jest innymi formułami w obu półprzestrzeniach. Oprócz tego składa się z dwóch oddzielnych członów odpowiedzialnych za generację fal objętościowych i fali Stoneleya. Można więc uzyskać ilościowe wyniki w interesującym nas obszarze i dla konkretnych modów.

W pracy [5] wykazano teoretycznie, że stosując tzw. nieklasyczne warunki brzegowe, można spodziewać się istnienia SW w prawie wszystkich przypadkach. Wiąże się to z modelowaniem powierzchni materialnej w postaci bardzo cienkiej warstwy (4-10 nm), która istnieje zawsze bez względu na rodzaj powierzchni [10]. Fale te zwane falami Stoneleya typu Love'a stanowią obiecującą perspektywę w akustoelektronicznych badaniach nieniszczących.

Dodatek A

W dodatku podamy podstawowe zależności opisujące propagację fali Stoneleya wzdłuż granicy łączącej dwa idealne izotropowe ośrodki sprężyste I i II zajmujące odpowiednio półprzestrzeń $x_3 \geq 0$ i $x_3 < 0$. Dla uproszczenia zapisu, wektor falowy fali Stoneleya k_S oznaczymy przez k, a prędkość υ_S — przez υ. Ośrodki charakteryzują się gęstościami ρ, ρ' i stałymi sprężystymi $C_{11}, C_{44}, C'_{11}, C'_{44}$ zapisanymi w notacji zredukowanej.

Dla fali płaskiej poruszającej się w kierunku x_1 rozwiązanie ogólne w przemieszczeniach ma postać [11]:

$$\begin{aligned} u_1(x_1,x_3) &= [A_1 e^{-\alpha_1 x_3} + A_2 e^{-\alpha_2 x_3}]\exp[\mathrm{i}k(x_1 - \upsilon t)] \\ u_3(x_1,x_3) &= [\mathrm{i}\frac{\alpha_1}{k} A_1 e^{-\alpha_1 x_3} + \mathrm{i}\frac{k}{\alpha_2} A_2 e^{-\alpha_2 x_3}]\exp[\mathrm{i}k(x_1 - \upsilon t)] \end{aligned} \quad \text{w ośrodku 1} \qquad \text{(A.1a)}$$

$$\begin{aligned} u_1(x_1,x_3) &= [A'_1 e^{\alpha'_1 x_3} + A'_2 e^{\alpha'_2 x_3}]\exp[\mathrm{i}k(x_1 - \upsilon t)] \\ u_3(x_1,x_3) &= [-\mathrm{i}\frac{\alpha'_1}{k} A'_1 e^{\alpha'_1 x_3} - \mathrm{i}\frac{k}{\alpha'_2} A_2 e^{\alpha'_2 x_3}]\exp[\mathrm{i}k(x_1 - \upsilon t)], \end{aligned} \quad \text{w ośrodku 2} \qquad \text{(A.1b)}$$

gdzie

$$\begin{aligned} &\alpha_1 = k\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{\upsilon_L^2}}; \quad \alpha_2 = k\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{\upsilon_T^2}}; \\ &\alpha'_1 = k\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{\upsilon_L'^2}}; \quad \alpha'_2 = k\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{\upsilon_T'^2}}; \quad \upsilon = \frac{\omega}{k}, \end{aligned} \qquad \text{(A.2)}$$

a stałe υ_L, υ'_L oraz υ_T, υ'_T są odpowiednio prędkościami fal objętościowych podłużnych i poprzecznych w obu ośrodkach:

$$\upsilon_L = \sqrt{\frac{C_{11}}{\rho}}; \quad \upsilon'_L = \sqrt{\frac{C'_{11}}{\rho'}}; \quad \upsilon_T = \sqrt{\frac{C_{44}}{\rho}}; \quad \upsilon'_T = \sqrt{\frac{C'_{44}}{\rho'}}. \tag{A.3}$$

Warunek ciągłości przemieszczeń i naprężeń na powierzchni $x_3 = 0$ prowadzi do układu równań jednorodnych dla czterech stałych A_1, A_2, A'_1, A'_2. Jednym z warunków istnienia rozwiązań nietrywialnych jest zerowanie się wyznacznika głównego. Prowadzi to do równania

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ \dfrac{\alpha_1}{k} & \dfrac{k}{\alpha_2} & \dfrac{\alpha'_1}{k} & \dfrac{k}{\alpha'_2} \\ 2\dfrac{\alpha_1}{k} & \left(2-\dfrac{\upsilon^2}{\upsilon_T^2}\right)\dfrac{k}{\alpha_2} & 2\dfrac{C'_{44}}{C_{44}}\dfrac{\alpha'_1}{k} & \dfrac{C'_{44}}{C_{44}}\left(2-\dfrac{\upsilon^2}{\upsilon_T'^2}\right)\dfrac{k}{\alpha'_2} \\ 2-\dfrac{\upsilon^2}{\upsilon_T^2} & 2 & -\dfrac{C'_{44}}{C_{44}}\left(2-\dfrac{\upsilon^2}{\upsilon_T'^2}\right) & -2\dfrac{C'_{44}}{C_{44}} \end{vmatrix} = 0. \tag{A.4}$$

Wprowadzając bezwymiarowe współczynniki $\alpha_L, \alpha_T, \alpha'_L, \alpha'_T$ w postaci

$$\begin{gathered} \alpha_L = \frac{\alpha_1}{k} = \sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{\upsilon_L^2}}; \quad \alpha_T = \frac{\alpha_2}{k} = \sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{\upsilon_T^2}}; \\ \alpha'_L = \frac{\alpha'_1}{k} = \sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{\upsilon_L'^2}}; \quad \alpha'_T = \frac{\alpha'_2}{k} = \sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{\upsilon_T'^2}} \end{gathered} \tag{A.5}$$

otrzymujemy [2]

$$\begin{gathered} \upsilon^4\left[(\rho-\rho')^2 - (\rho\alpha'_L + \rho'\alpha_L)(\rho\alpha'_T + \rho'\alpha_T)\right] + \\ +2K\upsilon^2\left[\rho\alpha'_L\alpha'_T - \rho'\alpha_L\alpha_T - \rho + \rho'\right] + K^2(\alpha_L\alpha_T - 1)(\alpha'_L\alpha'_T - 1) = 0, \end{gathered} \tag{A.6}$$

gdzie $K = 2(\rho\alpha_T^2 - \rho'\alpha_T'^2)$. Wynikają stąd warunki na prędkość fali Stoneleya. Jak widać, liczba falowa k nie pojawia się w (A.6), więc SW są niedyspersyjne.

Dodatek B

W pracy [9] zaprezentowano sposób znalezienia funkcji Greena **G** dla przestrzeni wypełnionej przez dwa jednorodne izotropowe ośrodki sprężyste I i II zajmujące odpowiednio półprzestrzeń $x_3 \geq 0$ i $x_3 < 0$. Oznaczenia stałych materiałowych przyjmiemy jak w dodatku A. Funkcja Greena dla takiej konfiguracji jest rozwiązaniem układu równań niejednorodnych

$$\sum_k \left(\delta_{ik}\omega^2 + \frac{1}{\rho} \sum_{jl} C_{ijkl} \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_l} \right) G_{kj}(\mathbf{r},\mathbf{r}';\omega) = \delta_{ij}\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}') \quad \text{dla} \quad x_3 \geq 0 \tag{B.1a}$$

$$\sum_k \left(\delta_{ik}\omega^2 + \frac{1}{\rho'} \sum_{jl} C'_{ijkl} \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_l} \right) G_{kj}(\mathbf{r},\mathbf{r}';\omega) = \delta_{ij}\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}') \quad \text{dla} \quad x_3 < 0 \tag{B.1b}$$

gdzie $\mathbf{r}(x_1, x_2, x_3)$ jest wektorem położenia w przestrzeni kartezjańskiej. Ponadto z warunków ciągłości naprężeń i przemieszczeń na powierzchni granicznej $x_3 = 0$ mamy:

$$\sum_{kl} C_{i3kl} \frac{\partial^2}{\partial x_l} G_{kj}(\mathbf{r},\mathbf{r}';\omega) \Big|_{x_3=+0} = \sum_{kl} C'_{i3kl} \frac{\partial^2}{\partial x_l} G_{kj}(\mathbf{r},\mathbf{r}';\omega) \Big|_{x_3=-0} \tag{B.2}$$

$$G_{ij}(\mathbf{r},\mathbf{r}';\omega)\Big|_{x_3=+0} = G_{ij}(\mathbf{r},\mathbf{r}';\omega)\Big|_{x_3=-0}. \tag{B.3}$$

Rozkład fourierowski 2D funkcji Greena można zapisać w postaci

$$G_{ij}(\mathbf{r},\mathbf{r}';\omega) = \frac{1}{(2\pi)^2} \iint d_{ij}(\mathbf{k}\omega; x_3 x'_3) \exp[\mathrm{i}\mathbf{k}(\mathbf{r}_{||} - \mathbf{r}'_{||})] \mathrm{d}k_1 \mathrm{d}k_2, \tag{B.4}$$

gdzie: $\mathbf{r}_{||} = (x_1, x_2, 0)$, a $\mathbf{k} = (k_1, k_2, 0) = k(\cos\varphi, \sin\varphi, 0)$. Gdy (B.4) wraz z przedstawieniem funkcji $\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$

$$\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}') = \delta(x_3 - x'_3) \frac{1}{(2\pi)^2} \iint exp[i\mathbf{k}(\mathbf{r}_{||} - \mathbf{r}'_{||})] dk_1 dk_2 \tag{B.5}$$

wstawimy do (B.1), to otrzymamy nowy układ równań względem współczynników Fouriera $d_{ij}(\mathbf{k}\omega \,|\, x_3 x'_3)$

$$\sum_k L_{ik}(\mathbf{k}\omega; x_3) d_{kj}(\mathbf{k}\omega; x_3 x'_3) = \delta_{ij}\delta(x_3 - x'_3). \tag{B.6}$$

Następnie wykonujemy transformację układu równań (B.6) względem macierzy $\hat{S}(\mathbf{k})$

$$\hat{S}(\mathbf{k})=\begin{pmatrix}\cos\varphi & \sin\varphi & 0\\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix};\quad \hat{S}^{-1}(\mathbf{k})=\begin{pmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi & 0\\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}. \tag{B.7}$$

Układ równań (B.6) po transformacji przejdzie w następujący:

$$\sum_k L'_{ik}(k\omega;x_3)g_{kj}(k\omega;x_3x'_3)=\delta_{ij}\delta(x_3-x'_3), \tag{B.8}$$

gdzie

$$\hat{L}'(k\omega;x_3)=\hat{S}(\mathbf{k})\hat{L}(\mathbf{k}\omega;x_3)\hat{S}^{-1}(\mathbf{k}) \tag{B.9}$$

$$d_{im}(\mathbf{k}\omega;x_3x'_3)=\sum_{jk}S_{ji}(\mathbf{k})S_{km}(\mathbf{k})g_{jk}(k\omega;x_3x'_3). \tag{B.10}$$

Powyższa transformacja upraszcza postać macierzy operatora różniczkowego i uzależnia wyłącznie od modułu wektora $\mathbf{k}$. Można ją zapisać następująco

$$\begin{pmatrix}\omega^2+\dfrac{1}{\rho}\left(C_{44}\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x_3^2}-C_{11}k^2\right) & 0 & \dfrac{\mathrm{i}}{\rho}(C_{11}-C_{44})k\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x_3}\\ 0 & \omega^2+\dfrac{C_{44}}{\rho}\left(\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x_3^2}-k^2\right) & 0\\ \dfrac{\mathrm{i}}{\rho}(C_{11}-C_{44})k\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x_3} & 0 & \omega^2+\dfrac{1}{\rho}\left(C_{11}\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x_3^2}-C_{44}k^2\right)\end{pmatrix}\times$$

$$\times\begin{pmatrix}g_{11} & g_{12} & g_{13}\\ g_{21} & g_{22} & g_{23}\\ g_{31} & g_{32} & g_{33}\end{pmatrix}=\delta(x_3-x'_3)\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}. \tag{B.11}$$

Analogiczne równania otrzymujemy dla ośrodka II. Stąd warunki brzegowe (B.2) i (B.3) przyjmują postać

$$C_{44}\left(\frac{\mathrm{d}g_{1m}}{\mathrm{d}x_3}+\mathrm{i}kg_{3m}\right)_{x_3=+0}=C'_{44}\left(\frac{\mathrm{d}g_{1m}}{\mathrm{d}x_3}+\mathrm{i}kg_{3m}\right)_{x_3=-0} \tag{B.12a}$$

$$C_{44}\left(\frac{\mathrm{d}g_{2m}}{\mathrm{d}x_3}\right)_{x_3=+0} = C'_{44}\left(\frac{\mathrm{d}g_{2m}}{\mathrm{d}x_3}\right)_{x_3=-0} \tag{B.12b}$$

$$\begin{aligned}&\left(\mathrm{i}(C_{11}-2C_{44})kg_{1m} + C_{11}\frac{\mathrm{d}g_{3m}}{\mathrm{d}x_3}\right)_{x_3=+0} = \\ &= \left(\mathrm{i}(C'_{11}-2C'_{44})kg_{1m} + C'_{11}\frac{\mathrm{d}g_{3m}}{\mathrm{d}x_3}\right)_{x_3=-0}\end{aligned} \tag{B.12c}$$

$$\left(g_{mn}\right)_{x_3=+0} = \left(g_{mn}\right)_{x_3=-0}. \tag{B.12d}$$

Pomijając dalsze rozważania, zapiszemy ogólną formułę, opisującą postać dwuwymiarowej transformaty funkcji Greena w obu ośrodkach I i II:

$$\begin{aligned}\tilde{g}_{ij}(k\omega; x_3x'_3) = &\sum_{m=1,2} g^{m}_{(1)ij}(k\omega)\exp\left[-\alpha_m\left|x_3 - x'_3\right|\right] + \\ &+ \sum_{\substack{m=1,2\\ l=1,2(\mathrm{I})\\ l=1',2'(\mathrm{II})}} g^{ml}_{(2)ij}(k\omega)\exp\left[-\alpha_m\left|x_3\right| + \alpha_l\left|x'_3\right|\right],\end{aligned} \tag{B.13}$$

gdzie α_m określają wzory (A.2), a wskaźnik m oznacza numer modu fali objętościowej. Wydzielono tu pierwszą część wzoru odpowiadającą za powstawanie fal objętościowych i drugą — powodującą powstawanie fali Stoneleya.

Artykuł wpłynął do redakcji 20.10.2005 r. Zweryfikowaną wersję po recenzji otrzymano w lutym 2006 r.

LITERATURA

[1] J. Cheeke, N. David, *Fundamentals and Application of Ultrasonic Waves*, CRC Press, London, 2002, 191.

[2] D. A. Lee, D. M. Corbly, *Use of Interface Waves for Nondestructive Inspection*, IEEE Trans. on Sonics and Ultrasonics, vol. SU-24, 1977, 206-212.

[3] A. Dukata, J. Kapelewski, *Rozpraszanie sprężystych fal powierzchniowych na powierzchniach nierównych*, Biul. WAT, XXXVIII, 2, 1989, 39-53; w j. ang.: *Scattering of surface elastic waves by surface irregularities*, Acta Physicae Superficierum, vol. 1, 1990, 23-36.

[4] K. Sobczyk, *Scattering of Rayleigh Waves at a Random Boundary of Elastic Body*, Proc. of Vibr. Probl., vol. 4, 1966, 363-374.

[5] A. I. Murdoch, *The effect of interfacial stress on the propagation of Stoneley waves*, Journ. of Sound and Vibrations, vol. 50, 1977, 1-11.

[6] A. DUKATA, J. KAPELEWSKI, *Analiza rozpraszanie sprężystych fal powierzchniowych na strukturach kropkowych dla ośrodka heksagonalnego z sześciokrotną osią obrotu w kierunku normalnym do płaszczyzny propagacji*, Biul. WAT, XXXVII, 4, 1988, 47-59; w j. ang.: *Scattering of elastic surface waves on localized mechanical load of the surface*, Archives of Acoustics, vol. 15, 3-4, 1990, 257-269.

[7] F. G. BASS, I. M. FUKS, *Rasseyanie voln na statisticheski nerovnoi poverkhnosti*, Nauka, Moskwa, 1972; tłum. ang.: *Wave Scattering from Statistically Rough Surfaces*, Pergamon Press, Oxford, 1979.

[8] B. DJAFARI-ROUHANI, L. DOBRZYNSKI, *Vibrational contribution to the low-temperature specific heat of the interface between two different crystals*, Phys. Rev. B, vol. 14, 1976, 2296-2300.

[9] B. DJAFARI-ROUHANI, L. DOBRZYNSKI, R. F. WALLIS, *Elastic continuum theory of interface-atom mean-square desplacements*, Phys. Rev. B, vol. 16, 1977, 741-749.

[10] V. V. KRYLOV, *Effect of surface phenomena in solids on surface acoustic waves*, Progr. in Surf. Sci., vol. 32, 1989, 39-110.

[11] J. D. ACHENBACH, *Wave propagation in elastic solids*, North-Holland, Amsterdam, 1973.

A. DUKATA, J. KAPELEWSKI

An approach to propagation of Stoneley waves along statistically rough material interfaces

Abstract. The continuing development of surface acoustic wave technology, with growing role of the high frequency region, stimulates the need for a more comprehensive study of the effect of various surface and interface inhomogeneities on the propagation characteristics of such waves. Although this topic has been treated for a long time (references, see e.g. [3]), the existing solutions essentially concern very simplified model schemes, basing predominantly on perturbation techniques. The paper deals with propagation of Stoneley waves on rough interfaces between two different materials. The surface profile is modelled by the random field with the known mean value and the correlation function. We use a method based on the Green function technique combined with a well known approach [4] which resides in replacing a rough interface between two different materials by an ideal one with a randomly distributed stress tensor. This enables us to find consistent closed form expressions describing the frequency power spectrum of the random field of displacements.

Keywords: non-destructive evaluations (NDE), wave propagation, Stoneley waves
Universal Decimal Classification: 620.179.1