



BIULETYN WAT
VOL. LV, NR 1, 2006

Zastosowanie regularyzowanej metody najmniejszych kwadratów w algorytmach lokalizacji źródeł emisji

ADAM KAWALEC, BRONISŁAW WAJSZCZYK

Wojskowa Akademia Techniczna, Wydział Elektroniki, Instytut Radioelektroniki,
00-908 Warszawa, ul. S. Kaliskiego 2

Streszczenie. Stosowane dotychczas algorytmy estymacji położenia obiektu w systemach rozpoznania radioelektronicznego wymagają wprowadzania określonych ograniczeń, które wynikają z tzw. zagadnień niepoprawnie postawionych. Prowadzi to do powstawania znacznych błędów w określaniu pozycji emitera lub wręcz uniemożliwia jego wyznaczenie. Metody rozwiązywania zagadnień niepoprawnie postawionych w fizyce matematycznej polegają na stosowaniu regularyzacji, z których najbardziej znana jest regularyzacja Tichonova. W tym zakresie bardzo aktualne są poszukiwania algorytmów w rozwiązywaniu istniejących problemów związanych z obliczeniami numerycznymi określania pozycji emitera na podstawie danych pomiarowych. W artykule przedstawiono zmodyfikowaną wersję algorytmu lokalizacji źródeł emisji dla metody wcięcia w przód, zbudowanego w oparciu o metodę najmniejszych kwadratów otrzymywania estymatorów. Modyfikacja algorytmu polegała na rozwiązaniu zadania przy wykorzystaniu rozkładu macierzy według wartości szczególnych (ang. *Singular Value Decomposition*) oraz zastosowaniu regularyzacji Tichonova. Dla tego algorytmu przedstawiono wyniki przeprowadzonych badań.

Słowa kluczowe: rozpoznanie radioelektroniczne, źródła emisji — lokalizacja

Symbole UKD: 621.396.96

Wstęp

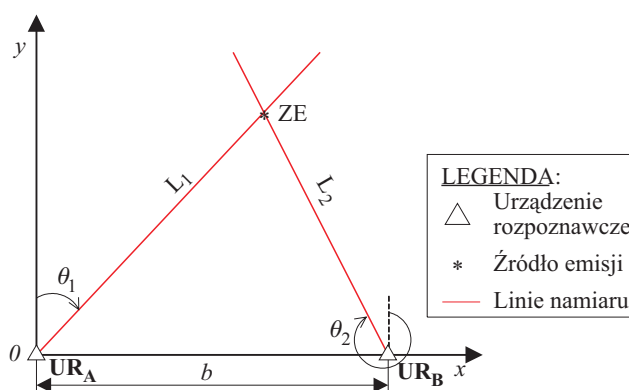
Jedną z najpoważniejszych trudności spotykanych przy wyznaczaniu pozycji źródła emisji mikrofalowej na podstawie zbioru obserwacji jest występowanie zagadnień źle uwarunkowanych lub wręcz źle postawionych zadań odwrotnych (ang. *ill-posed problems*) [8]. Z tego wynikają podstawowe trudności związane z dokładnym określeniem pozycji obiektu na podstawie niedokładnych danych pomiarowych.

Metody rozwiązywania zagadnień źle postawionych rozwijano niezależnie w ekonometrii (teoria słabo uwarunkowanych liniowych zadań najmniejszych kwadratów) pod nazwą „regresja grzbietowa” (ang. *Ridge Regression*) i w fizyce matematycznej (przede wszystkim regularyzacja Tichonowa). Od czasu opublikowania prac przez Hoerla i Kennarda [3] oraz Tichonowa [9] teoria zagadnień niepoprawnie postawionych stała się ważnym działem analizy. W technice jako standardową metodę rozwiązywania zagadnień niepoprawnie postawionych przyjmuje się metodę regularyzacji Tichonowa. Idea regularyzacji polega na wprowadzeniu ograniczeń na wektor dopuszczalnych rozwiązań. Głównym problemem przy wykorzystaniu regularyzacji Tichonowa jest dobór parametru regularyzacji.

W dziedzinie regularyzacji Tichonowa pojawiło się bardzo dużo prac, zarówno czysto teoretycznych, jak i aplikacyjnych. Powstała literatura techniczna dotycząca bardzo wąskich klas jej zastosowania. Pomimo że pojawiają się wzmianki o regularyzacji estymacji położenia źródła emisji, autorom nie są znane wyniki badań takich algorytmów wykorzystujących regularyzację Tichonowa. Podjęli więc próby jej zastosowania.

1. Algorytm macierzowy zbudowany w oparciu o metodę najmniejszych kwadratów otrzymywania estymatorów

W rozpoznaniu radioelektronicznym do określenia MPO na płaszczyźnie, podstawowym sposobem lokalizacji jest metoda wcięcia w przód. Polega ona na określeniu namiarów θ_1 i θ_2 na źródło emisji z przynajmniej dwóch urządzeń rozpoznawczych, znajdujących się w określonej względem siebie odległości b , określanej jako baza systemu (rys. 1). Miejsce położenia źródła emisji jest wyznaczone przez punkt przecięcia linii namiarów.



Rys. 1. Lokalizacja źródła emisji metodą wcięcia w przód na płaszczyźnie

W szczególności przy rozwiązywaniu zadania metodą wcięcia w przód ma zastosowanie algorytm macierzowy (1) zbudowany w oparciu o metodę najmniejszych kwadratów otrzymywania estymatorów [7]:

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1} = (\mathbf{G}_k^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{G}_k)^{-1} \mathbf{G}_k^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{w}_k, \quad (1)$$

gdzie: $\mathbf{w}_k = \mathbf{u} + \mathbf{G}_k \mathbf{x}_k - \mathbf{f}_k$; \mathbf{u} — wektor pojedynczej obserwacji; \mathbf{f}_k — wektor pojedynczych funkcji predykcji (nieliniowa funkcja wyrażająca dla i -tej obserwacji ścisłą zależność pomiędzy mierzoną wielkością geometryczną a wzajemnym rozmieszczeniem przestrzennym urządzeń rozpoznawczych i obiektu obserwacji), wartość ta nie jest znana i będzie podlegać estymacji; \mathbf{G}_k — macierz gradientów; \mathbf{R} — macierz kowariancji błędów obserwacji; \mathbf{w}_k — wektor pojedynczej obserwacji zmodyfikowanej; $k = 1, 2, \dots$ — k -ty krok iteracji.

Idea działania tego algorytmu oparta jest na wykorzystaniu metody Gaussa-Newtona [5]. Przekształcenie nieliniowych obserwacji względem szacowanych parametrów realizowane jest poprzez rozwinięcie ich w szereg Taylora z pominięciem członów nieliniowych tego rozwinięcia.

Przy rozwiązywaniu równań normalnych dla estymatora liniowego opartego na metodzie najmniejszych kwadratów (1) zwykle zakłada się nieosobliwość macierzy kowariancji

$$\mathbf{R}_x = (\mathbf{G}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{G})^{-1} \quad (2)$$

tak, że można otrzymać jednoznaczne rozwiązanie. W rzeczywistych warunkach pomiarowych powyższa macierz często jest macierzą osobliwą lub zbliżoną do macierzy osobliwej. Jest to spowodowane następującymi czynnikami:

- specyfiką danych wejściowych u_i ;
- błędami zaokrągleń występującymi w maszynach cyfrowych.

W estymacji pozycji źródeł emisji główną przyczyną złego uwarunkowania zadania jest występowanie współliniowości. Dokładna współliniowość pojawia się wtedy, gdy kolumny macierzy \mathbf{G} są liniowo zależne. W tym przypadku $\text{rank}(\mathbf{G}) < k + 1$ i macierz (2) jest macierzą osobliwą. Odwrócenie tej macierzy nie jest możliwe. Prowadzi to do niemożliwości policzenia estymatora najmniejszych kwadratów.

W takich przypadkach zastosowanie metody Gaussa-Newtona do estymacji parametrów może napotkać na trudności [2, 11]. Ogólnie poprawny algorytm Gaussa-Newtona staje się algorytmem niestabilnym, tzn. jest on wrażliwy na małe zaburzenia w danych wejściowych, dając w wyniku silne zaburzenia rozwiązania bardzo odległe od rozwiązania prawdziwego.

Ta niestabilność algorytmu (rozumiana w sensie definicji stosowanych w metodach numerycznych) przejawia się:

- brakiem zbieżności w kolejnych krokach iteracji;
- zatrzymaniem procesu obliczeń, spowodowanym tzw. nadmiarem numerycznym spowodowanym dzieleniem przez zero (wyznacznik macierzy nieodwracalnej) lub dzieleniem przez liczbę bliską zeru na tyle, że w wyniku zaokrągleń tracone są cyfry znaczące.

W algorytmach estymacji MPO można posłużyć się kilkoma metodami umożliwiającymi, pomimo złego uwarunkowania zadania, przeprowadzenie estymacji pozycji obiektu. Do takich metod należy zaliczyć:

- wykorzystanie rozkładu macierzy według wartości szczególnych;
- zastosowanie regularyzowanych metod rozwiązywania zadań najmniejszych kwadratów.

1.1. Wykorzystanie rozkładu macierzy według wartości szczególnych

W metodach numerycznych do wyznaczania rozwiązań zadań źle uwarunkowanych znalazła zastosowanie pseudoinwersja (pseudoodwrotność) macierzy (Moore'a-Penrose'a) [5, 14].

Na podstawie twierdzenia Urquharta-Greville'a [5 (tw. 8.1.8)] dla dowolnej macierzy prostokątnej $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m,n}$ istnieje jedna macierz $\mathbf{A}^+ \in \mathbb{R}^{m,n}$ taka, że wektor $\mathbf{x} = \mathbf{A}^+ \mathbf{b}$ dla każdego $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ jest rozwiązaniem normalnym zadania $\mathbf{A}\mathbf{x} \approx \mathbf{b}$. Jeśli posłużymy się rozkładem macierzy \mathbf{A} względem wartości szczególnych

$$\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^T, \quad (3)$$

gdzie $\mathbf{U} \in \mathbb{R}^m$ i $\mathbf{V} \in \mathbb{R}^n$ są macierzami ortonormalnymi, a

$$\mathbf{\Sigma} = \left[\begin{array}{ccc|c} \sigma_1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & \sigma_r & \\ \hline & & 0 & 0 \end{array} \right], \quad (4)$$

gdzie: $\mathbf{\Sigma}$ — jest przekątniową macierzą wartości szczególnych $\mathbf{\Sigma} \in \mathbb{R}^{m,n}$, $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots, \sigma_r > 0$; r — rząd macierzy \mathbf{A} ,

to macierz \mathbf{A}^+ będzie wyrażona wzorem

$$\mathbf{A}^+ = \mathbf{V}\mathbf{\Sigma}^+ \mathbf{U}^T \quad (5)$$

z macierzą $\mathbf{\Sigma}^+$ w postaci

$$\Sigma^+ = \left[\begin{array}{ccc|c} 1/\sigma_1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & 1/\sigma_r & 0 \\ \hline & & & 0 \end{array} \right] \in \mathbf{R}^{n,m}. \quad (6)$$

Macierz \mathbf{A}^+ nazywa się odwrotnością Moore'a-Penrose'a lub uogólnioną odwrotnością (pseudoodwrotnością) macierzy \mathbf{A} .

Przy wykorzystaniu uogólnionej macierzy odwrotnej, wyrażenie na estymatory dla algorytmu klasycznego (1) zapisujemy w postaci

$$\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{G}^+ \mathbf{w}. \quad (7)$$

1.2. Zastosowanie regularyzowanej metody najmniejszych kwadratów

Problem słabo uwarunkowanych równań normalnych jest częstą przyczyną występowania dużych trudności w estymacji pozycji źródła emisji. Jak wykazano w pracy [12], przedstawiony wyrażeniem (1) estymator dla algorytmu klasycznego jest w ogólności niepoprawnie postawiony. Pojawiające się problemy numeryczne związane z odwracaniem źle uwarunkowanej macierzy kowariancji (2) nie zawsze mogą być rozwiązane poprzez zastosowanie uogólnionej odwrotności Moore'a-Penrose'a (7).

Jedną z metod rozwiązywania zadań niepoprawnie sformułowanych jest metoda regularyzacji. Regularyzacja liniowego zadania najmniejszych kwadratów (RMNK) jest w literaturze przedmiotu nazywana regularyzacją Tichonowa (często używane jest pojęcie „regresja grzbietowa” (ang. *ridge regression*) [4, 9, 10].

Ogólnie idea regularyzacji polega na wprowadzeniu ograniczeń na dopuszczalny zbiór rozwiązań [1, 2, 3] poprzez sprowadzenie zadania niepoprawnie sformułowanego do zadania sformułowanego warunkowo poprawnie i dobrze uwarunkowanego numerycznie.

Liniowe zadanie najmniejszych kwadratów (8) w szczególności nie jest poprawnie postawione (sformułowane)

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}. \quad (8)$$

Regularyzacja Tichonowa polega na poszukiwaniu zamiast minimum funkcjonału $\|\mathbf{b} - \mathbf{Ax}\|_2^2$, minimum funkcjonału $\|\mathbf{b} - \mathbf{Ax}\|_2^2 + \alpha \|\mathbf{x}\|_2^2$ z małym parametrem regularyzacji $\alpha > 0$ i wektora minimalizującego go, czyli rozwiązania regularyzowanego.

Rozwiązanie zregularyzowane dla układu równań normalnych można przedstawić w postaci:

$$\mathbf{x}_\alpha = (\mathbf{A}^T \mathbf{A} + \alpha \mathbf{I})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{b}, \quad (9)$$

gdzie: \mathbf{x}_α — zregularyzowane rozwiązanie liniowego zadania najmniejszych kwadratów; α — parametr regularyzacji; \mathbf{I} — macierz diagonalna.

Powyższy estymator jest estymatorem obciążonym.

Macierz współczynników układu zregularyzowanego (9) jest symetryczna i dodatnio określona

$$\mathbf{M}_\alpha = (\mathbf{A}^T \mathbf{A} + \alpha \mathbf{I}). \quad (10)$$

Uwarunkowanie macierzy (10) zależy od parametru regularyzacji α

$$\text{cond}_F(\mathbf{M}_\alpha) \approx \frac{\|\mathbf{A}\|_F^2}{\alpha}, \quad (11)$$

gdzie:

$$\|\mathbf{A}\|_F = \left[\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m |a_{ij}|^2 \right]^{1/2} \quad (12)$$

jest normą Frobeniusa macierzy \mathbf{A} .

Dąży się do tego, aby rozwiązanie zregularyzowane \mathbf{x}_α było tym bliższe rozwiązaniu \mathbf{x} , im mniejszy jest poziom zaburzeń danych pomiarowych.

Głównym problemem jest znalezienie odpowiedniego parametru regularyzacji α . Parametr regularyzacji α powinien być tak wybrany, aby błąd

$$\|\hat{\mathbf{x}}_\alpha - \mathbf{x}\| \rightarrow 0, \quad \|\alpha\| \rightarrow 0. \quad (13)$$

W analizie numerycznej najczęściej przyjmuje się jako regularyzator parametr skalarny $\alpha > 0$ [6].

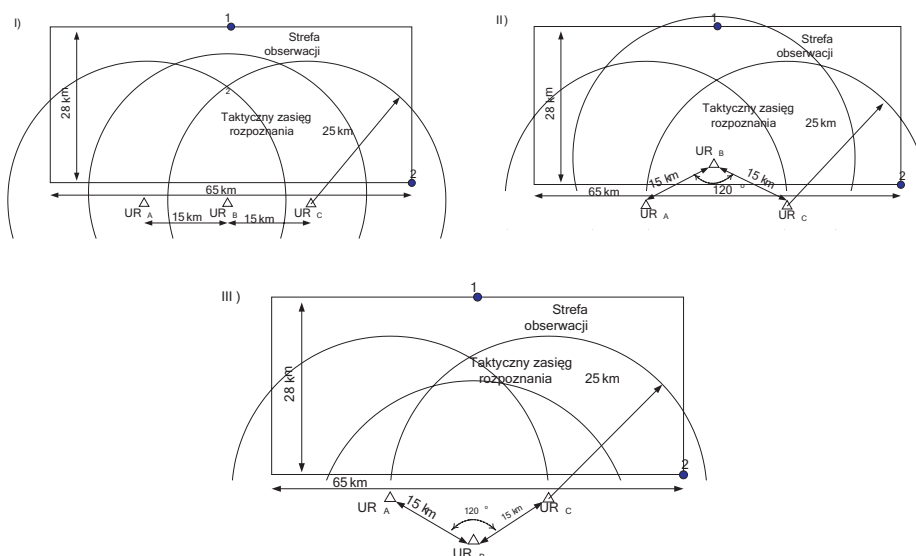
Dla dowolnych danych przybliżonych \mathbf{A} i \mathbf{b} istnieje rozwiązanie zregularyzowane \mathbf{x}_α . Można je wyznaczyć jako rozwiązanie zmodyfikowanego układu równań normalnych.

Dla algorytmu Gaussa-Newtona (1) stosuje się najczęściej stałą wartość parametru regularyzacji α . Wówczas estymator najmniejszych kwadratów (1) przyjmuje postać

$$\hat{\mathbf{x}} = (\mathbf{G}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{G} + \alpha \mathbf{I})^{-1} \mathbf{G}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{w}. \quad (14)$$

2. Wyniki badań

Badania wykonano dla trzech wariantów rozmieszczenia urządzeń rozpoznawczych (rys. 2).



Rys. 2. Warianty rozmieszczenia urządzeń rozpoznawczych względem obserwowanej strefy: I) szereg liniowy trzech urządzeń rozpoznawczych; II) szereg łamany trzech urządzeń rozpoznawczych „kątem w przód”; III) szereg łamany trzech urządzeń rozpoznawczych „kątem w tył”

Obliczenia wykonano dla całej strefy obserwacji (siatka punktów testowych) oraz dla charakterystycznych punktów strefy oznaczonych na rysunku 2 numerami 1 i 2. Badania wykonano dla systemu lokacji na płaszczyźnie. Założono błąd pomiaru kąta $\delta_\theta = 1$ [°] dla każdego z urządzeń rozpoznawczych (UR).

Wyniki badań przedstawione zostały na wykresach:

- RMSE — błąd średniokwadratowy lokacji obiektów;
- PNN — odsetek prób nieakceptowalnych;
- PPN — odsetek prób badań dla jednego punktu testowego, dla których otrzymano wynik akceptowalny $PNN = 100\% - PPN$.

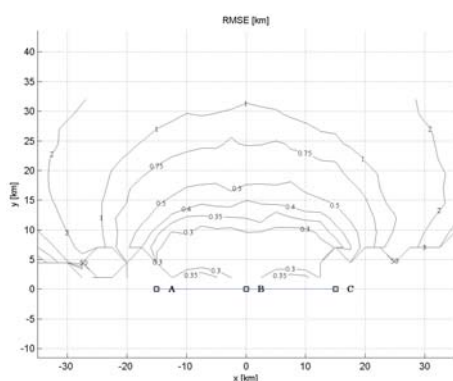
Nieakceptowalny wynik estymacji w artykule zdefiniowano jako jeden z poniższych przypadków:

- wynik dzielenia liczby przez zero;
- wynik działania niemieszczący się w zakresie reprezentacji liczby zmiennopozycyjnej w maszynie cyfrowej;
- osobliwość macierzy kowariancji (2).

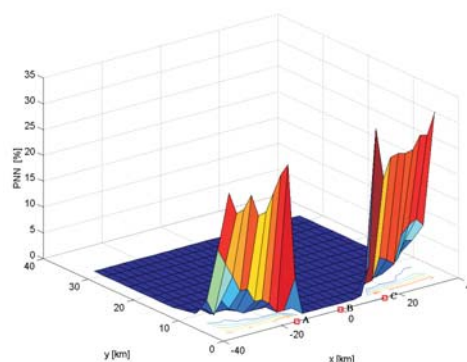
Rozmieszczenia urządzeń rozpoznawczych w szyku liniowym

Dla I wariantu rozmieszczenia urządzeń rozpoznawczych (szyk liniowy trzech stacji) w centralnej i tylnej części strefy obserwacji uzyskano wyniki estymacji pozycji źródła emisji na porównywalnym poziomie błędów RMSE. Tę sytuację przedstawiono na rysunku 3.

Inaczej przedstawia się sytuacja w przedniej lewej i przedniej prawej części strefy obserwacji. W tych obszarach zanotowano bardzo duże wartości błędów RMSE dyskwalifikujące wyniki estymacji. Dodatkowo wystąpiła pewna liczba prób (ok. 15 ÷ 20%) nieakceptowalnych (rys. 4).



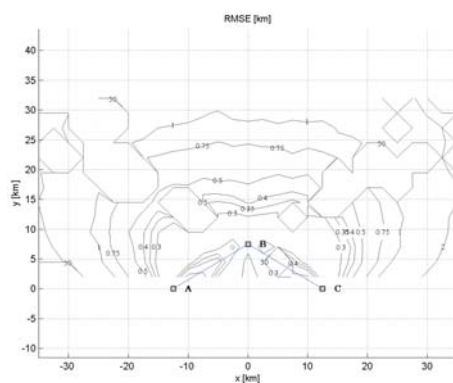
Rys. 3. Wybrane wartości błęd RMSE



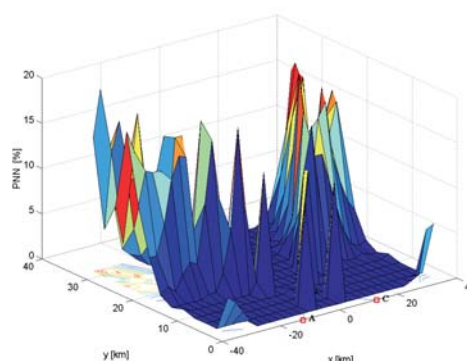
Rys. 4. Odsetek prób nieakceptowalnych

Rozmieszczenia urządzeń rozpoznawczych w szyku „kątem w przód”

Dla tego wariantu rozmieszczenia urządzeń rozpoznawczych na skrajach strefy obserwacji uzyskano błąd estymacji RMSE w zakresie 0,7 ÷ 2 km (rys. 5).



Rys. 5. Wybrane wartości błęd RMSE

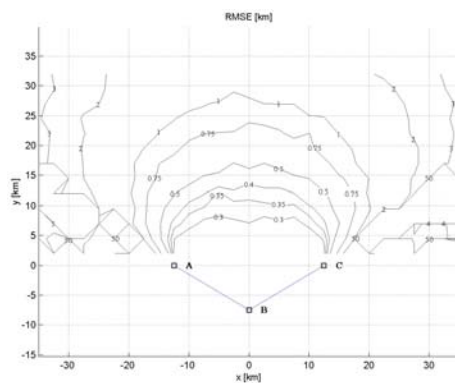


Rys. 6. Odsetek prób nieakceptowalnych

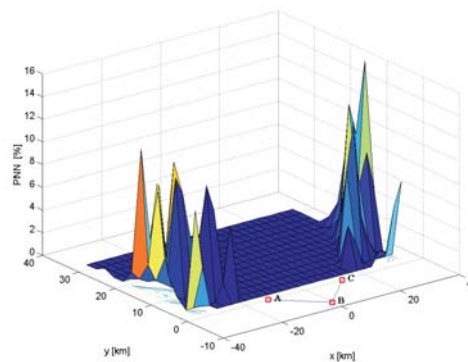
Inaczej sytuacja przedstawia się dla obszarów znajdujących się na przedłużeniu baz UR_A i UR_B oraz UR_B i UR_C , gdzie odnotowano występowanie prób nieakceptowalnych (rys. 6) dochodzących do $PNN = 20\%$. Pozostałe wyniki estymacji ($\sim 80\%$) również cechowały się znacznymi błędami lokalizacji (rys. 5).

Rozmieszczenia urządzeń rozpoznawczych w szyku „kątem w tył”

Podobnie jak dla innych wariantów rozmieszczenia urządzeń rozpoznawczych, zanotowano występowanie prób, dla których otrzymano wynik nieakceptowalny (rys. 8). Dotyczy to obszarów będących przedłużeniem baz pomiędzy UR_A i UR_B oraz UR_B i UR_C (rys. 7). Jest to spowodowane występowaniem silnej współliniowości w danych pomiarowych spowodowanej zbliżaniem się linii namiarów z UR_A i UR_B oraz UR_B i UR_C do linii równoległych.



Rys. 7. Wybrane wartości błędu RMSE



Rys. 8. Odsetek prób nieakceptowalnych

Wykorzystanie regularyzowanej metody najmniejszych kwadratów

Przedstawione na rysunkach 3-8 wyniki badań w niekorzystnych sytuacjach pomiarowych cechowały się bardzo dużymi błędami w ocenie pozycji źródła emisji. Dla wielu prób badań, pomimo zastosowania odwrotności Moore'a-Penrose'a (7), otrzymano nieakceptowalne wyniki estymacji. W tym punkcie przedstawiono wyniki badań algorytmu klasycznego z wykorzystaniem regularyzacji Tichonowa.

Głównym problemem zastosowania regularyzacji Tichonowa jest znalezienie odpowiedniego parametru regularyzacji. W związku z tym, że postępowanie regularyzacyjne jest niejednoznaczne, ponieważ wymaga dodatkowych informacji, których same obliczenia nie mogą dostarczyć, określenie odpowiednich wartości parametru regularyzacji jest możliwe poprzez wykonanie badań symulacyjnych dla różnych geometrii systemu lokalizacji.

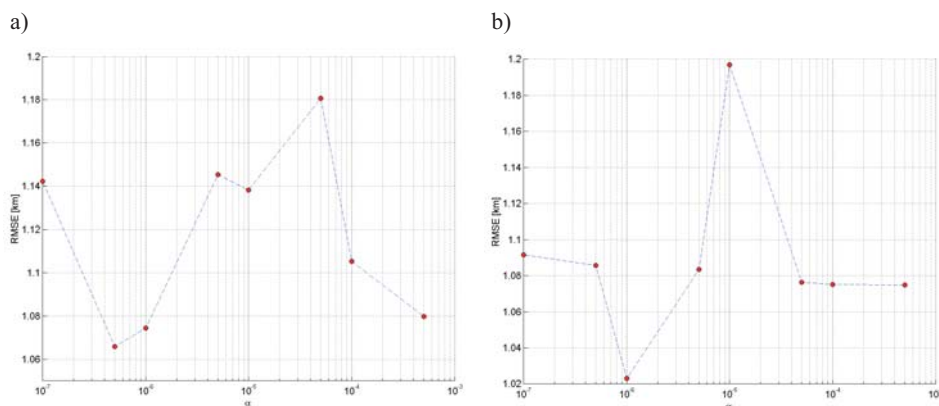
Jednym ze sposobów zastosowania regularyzacji Tichonowa jest wprowadzenie stałej wartości parametru regularyzacji. Wobec powyższego przeprowadzono badania, które zostały podzielone na dwa etapy:

1. dla dogodnych sytuacji pomiarowych wykonano badania błędów estymacji pozycji ZE dla różnych wartości parametru regularyzacji α .
2. określoną w pierwszym kroku najlepszą wartość parametru α zastosowano dla niedogodnej sytuacji pomiarowej.

Określenie wartości parametru regularyzacji α

Badania wykonano dla I wariantu rozmieszczenia urządzeń rozpoznawczych oraz punktu charakterystycznego nr 1. Do badań przyjęto $\delta_\theta = 1$ [°] dla każdego z urządzeń rozpoznawczych.

Celem tych badań było określenie optymalnej wartości parametru regularyzacji α , tzn. takiego, który po wprowadzeniu do algorytmu (14) nie spowoduje zwiększenia błędów estymacji pozycji źródła emisji, a zapewni poprawę wyników obliczeń w tych wypadkach. Na rysunku 9. przedstawiono dwie realizacje badań, które umożliwiły określenie optymalnej wartości parametru α w zakresie $10^{-6} \div 10^{-4}$ (wyniki badań dla sytuacji gdy $\alpha = 0$ znajdują się na osi y wykresów).



Rys. 9. Błędy estymacji RMSE dla różnych wartości parametru regularyzacji α , (a, b — dwie realizacje badań) (pkt. charakterystyczny nr 1, II wariant rozmieszczenia UR, $\delta_\theta = 1$ [°])

Badania algorytmu Gaussa-Newtona i RMNK z założoną wartością parametru regularyzacji α

W tabeli 1 przedstawiono wyniki badań uzyskane za pomocą algorytmu Gaussa-Newtona (G-N) i algorytmu wykorzystującego regularyzację Tichonowa (RMNK). Badania wykonano dla trzech wariantów rozmieszczenia urządzeń rozpoznawczych (I, II, III) oraz punktów charakterystycznych nr 1 i 2. Dla algorytmu RMKN przyjęto określone w etapie pierwszym wartości parametru regularyzacji 10^{-6} , 10^{-5} , 10^{-4} .

TABELA 1

Wyniki badań dla algorytmów: Gaussa-Newtona i RMNK

Lp.	Pkt. char.	Wariant rozm. UR	Algorytm	α	RMSE [km]	PPN [%]	cond(A)
1	1	I	G-N	–	1,09	100	8,17
2			RMNK	10^{-6}	1,09	100	8,17
3				10^{-5}	1,09	100	8,17
4				10^{-4}	1,09	100	8,17
5		II	G-N	–	1,15	100	14
6			RMNK	10^{-6}	1,15	100	14
7				10^{-5}	1,15	100	14
8				10^{-4}	1,15	100	14
9		III	G-N	–	1,29	100	9,61
10			RMNK	10^{-6}	1,29	100	9,61
11				10^{-5}	1,29	100	9,61
12				10^{-4}	1,28	100	9,61
13	2	I	G-N	–	$2,68 \cdot 10^{13}$	44,5	$2,11 \cdot 10^6$
14			RMNK	10^{-6}	4944	100	80802
15				10^{-5}	2185,9	100	55932
16				10^{-4}	1046	100	23719
17		II	G-N	–	$1,58 \cdot 10^8$	89	613
18			RMNK	10^{-6}	2488	100	523,86
19				10^{-5}	2247,5	100	365,6
20				10^{-4}	840	100	229,3
21		III	G-N	–	$5,71 \cdot 10^{12}$	84	4870
22			RMNK	10^{-6}	1245	100	489,22
23				10^{-5}	787,79	100	355,79
24				10^{-4}	307,69	100	287,4

Jak wynika z przeprowadzonych badań, dla punktu charakterystycznego nr 1 dla obydwu algorytmów uzyskano prawie identyczne wyniki estymacji (tab. 1, poz. 1-12). Wprowadzenie parametru regularyzacji nie pogorszyło dokładności rozwiązania i nie zostały zmienione wskaźniki uwarunkowania zadania.

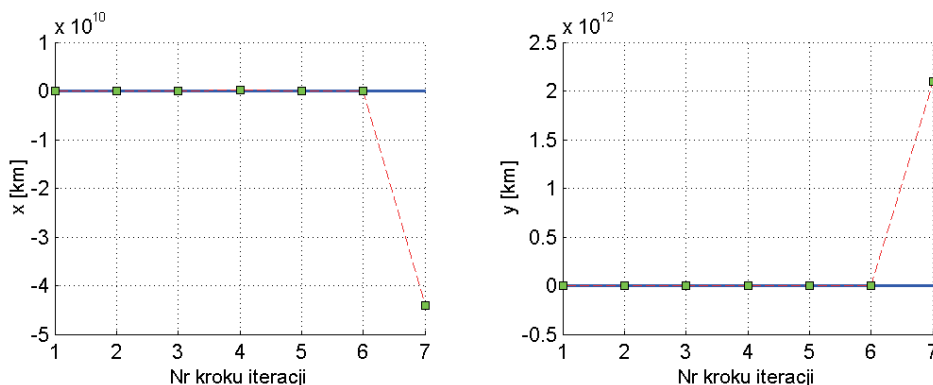
Dla punktu charakterystycznego nr 2 przy wykorzystaniu algorytmu RMNK (tab. 1, poz. 14-16) dla I wariantu rozmieszczenia urządzeń rozpoznawczych uzyskano poprawę dokładności lokalizacji po zastosowaniu regularyzacji.

Dla pozostałych wariantów (tab. 1, poz. 17-24) w każdym przypadku uzyskano 100% wyników akceptowalnych.

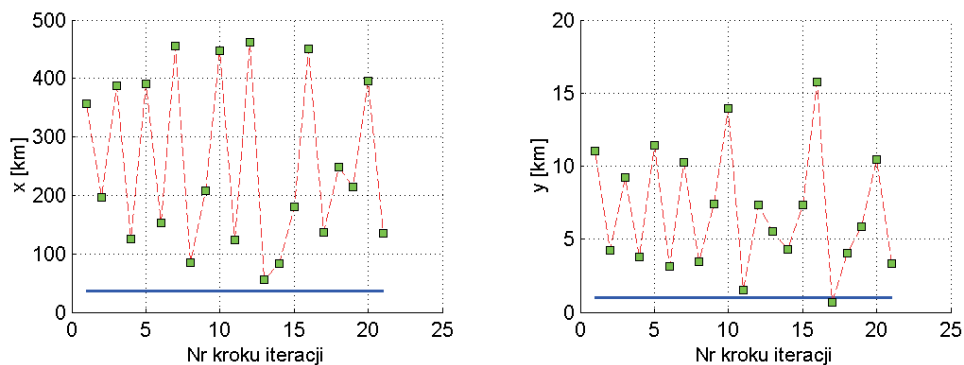
Dla tych wariantów badań uzyskano znacznie mniejsze błędy estymacji pozycji RMSE w porównaniu do algorytmu Gaussa-Newtona (dla którego charakterystyki błędów były określone tylko dla prób akceptowalnych).

Na rysunkach 10-14 przedstawiono wyniki estymacji położenia źródła emisji (dla współrzędnych x i y) w kolejnych krokach iteracji dla pojedynczej realizacji badań (tab. 1) przy różnych wartościach parametru regularyzacji α (pkt. charakterystyczny nr 2, I wariant rozmieszczenia urządzeń rozpoznawczych, $\delta_\theta = 1$ [°]). Na wykresach pogrubioną linią zaznaczono rzeczywiste współrzędne źródła emisji [13].

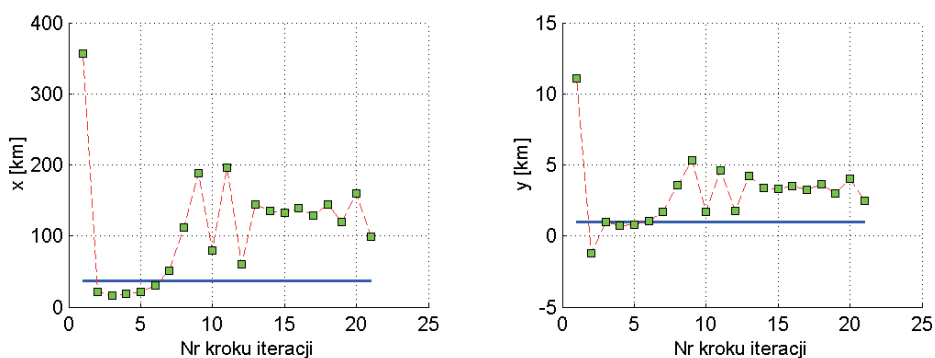
Dla wariantu z $\alpha = 0$ (rys. 10) zaobserwowano, że po siedmiu krokach iteracji algorytm został przerwany ze względu na niespełnienie kryterium akceptowalności wyniku. Po zastosowaniu regularyzacji (rysunki 11-13) dla parametru $\alpha \in (10^{-6}, 10^{-5}, 10^{-4})$ zaobserwowano zmniejszenie oscylacji wyniku estymacji wokół rzeczywistej pozycji źródła emisji w kolejnych krokach ($x = 35, y = 1$ [km]). Dalsze zwiększanie wartości parametru regularyzacji $\alpha = 10^{-3}$ doprowadziło do zmniejszenia stabilizującego wpływu parametru regularyzacji na wynik estymacji (rys. 14).



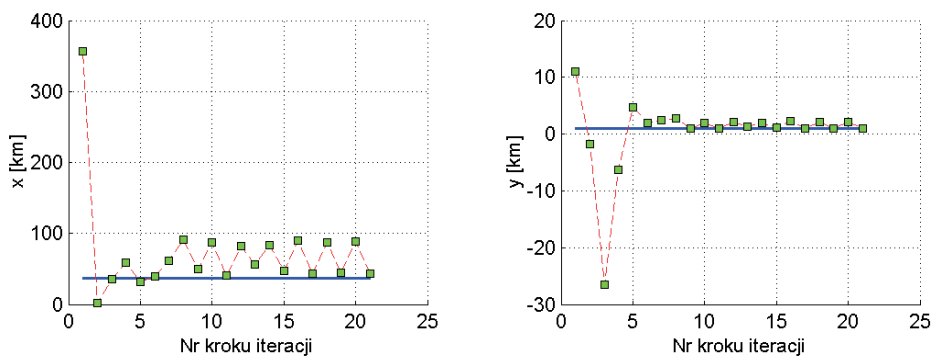
Rys. 10. Estymowane współrzędne pozycji źródła emisji w kolejnych krokach iteracji dla $\alpha = 0$ (pkt. charakterystyczny nr 2, I wariant rozmieszczenia urządzeń rozpoznawczych, $\delta_\theta = 1$ [°])



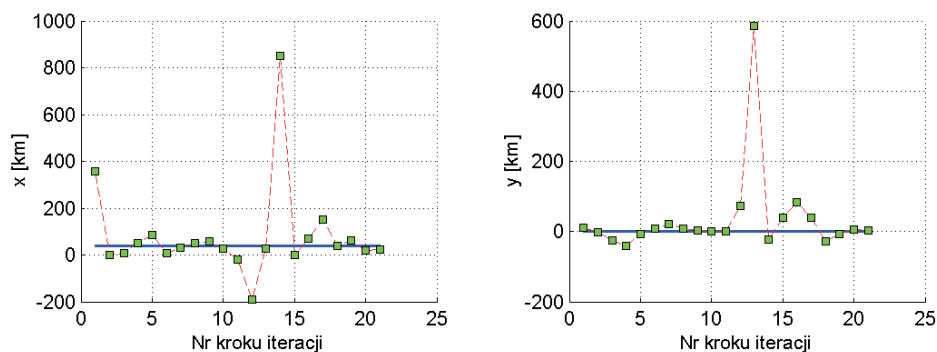
Rys. 11. Estymowane współrzędne pozycji źródła emisji w kolejnych krokach iteracji dla $\alpha = 10^{-6}$ (pkt. charakterystyczny nr 2, I wariant rozmieszczenia urządzeń rozpoznawczych, $\delta_\theta = 1$ [°])



Rys. 12. Estymowane współrzędne pozycji ZE w kolejnych krokach iteracji dla $\alpha = 10^{-5}$ (pkt. charakterystyczny nr 2, I wariant rozmieszczenia urządzeń rozpoznawczych, $\delta_\theta = 1$ [°])



Rys. 13. Estymowane współrzędne pozycji źródła emisji w kolejnych krokach iteracji dla $\alpha = 10^{-4}$ (pkt. charakterystyczny nr 2, I wariant rozmieszczenia urządzeń rozpoznawczych, $\delta_\theta = 1$ [°])



Rys. 14. Estymowane współrzędne pozycji źródła emisji w kolejnych krokach iteracji dla $\alpha = 10^{-3}$ (pkt. charakterystyczny nr 2, I wariant rozmieszczenia urządzeń rozpoznawczych, $\delta_\theta = 1$ [°])

3. Podsumowanie

W artykule poruszono problem wykorzystania regularyzowanej metody najmniejszych kwadratów. Jak wykazano, zastosowanie regularyzacji Tichonowa poprawia efektywność algorytmu klasycznego. Ważną cechą zaobserwowaną podczas badań jest to, że w sytuacjach dobrego uwarunkowania zadania estymacji, zastosowanie regularyzacji Tichonowa nie wprowadza dodatkowego obciążenia do wyniku estymacji. W przypadkach złego uwarunkowania zadania regularyzacja umożliwia zaś osiągnięcie w miarę poprawnego wyniku estymacji oraz zapewnia stabilność numeryczną algorytmu.

Zdaniem autorów, dalsze badania powinny być prowadzone nad określeniem odpowiednich parametrów regularyzacji oraz wprowadzaniem ograniczeń na dopuszczalny zbiór rozwiązań zarówno typu deterministycznego, jak i probabilistycznego, opartych na odpowiedniej interpretacji apriorycznej wiedzy o efektywności algorytmów i jakości danych pomiarowych.

Praca naukowa finansowana ze środków Komitetu Badań Naukowych w latach 2004/05 jako projekt badawczy O T00A 014 27.

Artykuł wpłynął do redakcji 20.10.2005 r. Zweryfikowaną wersję po recenzji otrzymano w marcu 2006 r.

LITERATURA

- [1] V. FRIEDRICH, *Some Remarks On Best Regularization*, Comput. Math.-Banach Center Pub., vol. 13, PWN — Polish Sci. Pub., Warsaw 1984, 719-724.
- [2] W. GÓRAL, *Bias in regularized least squares method*, Scientific Bulletins of the Stanisław Staszic Academy of Mining And Metallurgy, no. 1289, Geodesy B. 104. Cracow, Poland 1989.

- [3] A. E. HOERL, R. W. KENNARD, *Ridge Regression: Biased Estimation for Nonorthogonal Problems*, Technometrics, vol. 12, no 1, 1970.
- [4] A. E. HOERL, R. W. KENNARD, *Ridge Regression: Application to nonorthogonal problems*, Technometrics, vol. 12, no 1, 1970.
- [5] A. KIELBASIŃSKI, H. SCHWETLICK, *Numeryczna algebra liniowa. Wprowadzenie do obliczeń zautomatyzowanych*, WNT, Warszawa 1992.
- [6] M. A. KOJDECKI, *New criterion of regularisation parameter choice in Tikhonov's method*, Biul. WAT, Mathematics and Operations Research, Part VI, Warszawa 2000.
- [7] L. PARADOWSKI, B. WAJSZCZYK, *Object position determination from netted radar systems operating in active and passive modes*, International Radar Symposium IRSI-2001, Bangalore, India, 11-14.12.2001, 656-666.
- [8] P. C. SABATIER, *Inverse Problems — An Introduction*. Inverse Problems, vol. 1, no 1, Feb. 1985.
- [9] N. TICHONOW, *O rozwiązywaniu zagadnień niepoprawnie postawionych i metodzie regularyzacji*, Dokv. ANZSRR, t. 151, nr 3, 1963, s. 501-504 (ros).
- [10] N. TICHONOW, A. V. GONČARSKII, V. V. STEPANOV, A. G. JAGOLA, *Regularizirujušije algoritmy i apriornaja informacija*, Izd. NAUKA, Moskva 1983.
- [11] D. J. TORRIERI, *Statistical theory of passive location systems*, IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, AES-20, no 2, 1984, 183-198.
- [12] B. WAJSZCZYK, *Badanie stabilności numerycznej algorytmów lokalizacji źródeł emisji w systemie pelengacyjnym*, raport naukowy z pracy badawczej PBW 543 „Metody klasyfikacji, identyfikacji i lokalizacji źródeł emisji z uwzględnieniem selektywności czasowej, częstotliwościowej i przestrzennej”, rozdz. 4, Instytut Radiolokacji WEL WAT, Warszawa 2003.
- [13] B. WAJSZCZYK, *Efektywność algorytmów estymacji pozycji źródła emisji mikrofalowej w pasywnym systemie obserwacji technicznej*, rozprawa doktorska, WAT, Warszawa 2005.
- [14] G. ZIELKE, *A Survey of Generalized Matrix Inverses*, Comput. Math.-Banach Center Pub., vol. 13, PWN — Polish Sci. Pub., Warsaw 1984, 499-526.

A. KAWALEC, B. WAJSZCZYK

An estimation of microwave emitter position based on regularisation of a least-squares method

Abstract. The basic method of passive radar reconnaissance of microwave emitter position is intersection triangulation method.

In this paper, a modified version of iterative matrix estimator algorithm for localising emitter by intersection method is presented.

The problem of emitter localisation should be regularised. The variant of the iterative algorithm for localising emitter, modified by exploiting Tikhonov regularisation with constant parameter is stable. The value of parameter was chosen on the base of results of numerical experiments. Such regularisation makes possible to obtain estimates of emitter position in the case of their inconsistency or singularity.

Better, finite (i.e. non-iterative) method together with regularising algorithm by the authors is presented in this paper.

Keywords: radar recognition, algorithm for emitter position estimation

Universal Decimal Classification: 621.396.96