

prof. dr hab. inż. Krzysztof Magnucki
 Politechnika Poznańska
 Instytut Pojazdów Szynowych „TABOR”
 dr inż. Paweł Kuligowski
 dr Leszek Wittenbeck
 Instytut Pojazdów Szynowych „TABOR”

Zginanie sprężystych belek trójwarstwowych z rdzeniem falistym

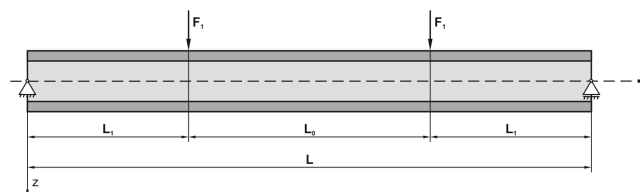
W pracy opisano model teoretyczny belki-pasma trójwarstwowego z rdzeniem wykonanym z cienkiej pofalowanej blachy. Sformułowano sztywności tego pasma i wyznaczono jego ugięcia. Wyróżniono dwa kierunki zginania walcowego pasma, jeden zgodny z kierunkiem pofalowania rdzenia, drugi prostopadły do pofalowania. Ugięcia wyznaczone analitycznie porównano z ugięciami uzyskanych doświadczalnie. Wykazano poprawność modelu analitycznego w zakresie zginania pasma płytowego – belki trójwarstwowej w dwóch charakterystycznych kierunkach. Praca jest realizowana w ramach projektu rozwojowego nr R 10 0047/06/2009 „Konstrukcja pojazdu szynowego z zastosowaniem najnowszych lekkich materiałów o wysokich parametrach wytrzymałościowych i o minimalnym oddziaływaniu na środowisko”

1. Wprowadzenie

Podła wagonów osobowych są konstrukcjami cienkościennymi, których rozwój trwa od ponad stu lat, co krótko scharakteryzowali Magnucki, Kuligowski i Kruś [9]. Podstawy mechaniki konstrukcji cienkościennych z uwzględnieniem zagadnień wytrzymałości i stateczności przedstawiono m.in. w pracach [4],[7],[11],[13] i [14]. Konstrukcje warstwowe, z uwagi na swe właściwości mechaniczne, są stosowane od wielu lat w budowie samolotów lub pojazdów kosmicznych. Podstawy mechaniki tych konstrukcji omówiono w [3] i [10]. Modelowanie płyt trójwarstwowych z rdzeniem o strukturze falistej opisano w [1],[2],[5],[6],[8] i [12].

Przedmiotem badań są aluminiowe belki-pasma trójwarstwowe z rdzeniem wykonanym z cienkiej blachy falistej o długości L i szerokości a poddane czystemu zginaniu. Połączenie okładzin z rdzeniem zrealizowano za pomocą cienkiej warstwy kleju. Sposób obciążenia belki-pasma, taki jak dla czteropunktowego zginania, dwoma siłami skupionymi przyłożonymi symetrycznie względem jej środka przedstawiono na rys.1. Przyjęto następujące własności mechaniczne materiału oraz wymiary geometryczne:
 $E = 69000 \text{ MPa}$, $\nu = 0.3$, $L = 750 \text{ mm}$, $L_1 = L_0 = 250 \text{ mm}$.

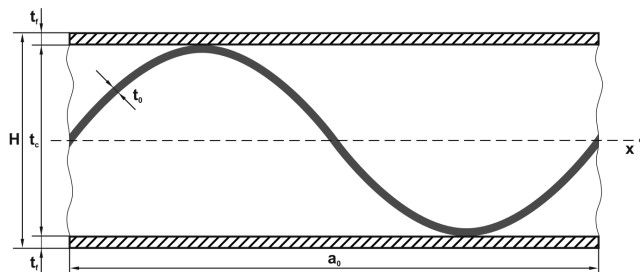
Rozpatrzono zależność między momentem zginającym a ugięciem dla wzdłużnego i poprzecznego ułożenia pofalowania rdzenia.



Rys.1. Schemat obciążenia belki-pasma trójwarstwowego

2. Sztywności belki

Przekrój poprzeczny analizowanej belki-pasma płytowego przedstawiono na rys. 2.



Rys.2. Przekrój poprzeczny belki-pasma płytowego trójwarstwowego

gdzie:

- a_0 – podziałka pofalowania
- t_c – wysokość pofalowania
- t_0 – grubość blachy falistej
- t_f – grubość okładzin
- H – całkowita wysokość pasma

Założono, że powierzchnia środkowa pofalowanego rdzenia ma kształt sinusoidalny:

$$f_c(x) = \frac{1}{2} t_c (1 - x_0) \sin(2\pi\xi), \quad (1)$$

gdzie x_0 i ξ bezwymiarowe zmienne zdefiniowane poniżej:

$$x_0 = \frac{t_0}{t_c}, \quad \xi = \frac{x}{a_0}.$$

Bezwymiarową długość powierzchni środkowej jednej podziałki pofalowanego rdzenia zapisano jako:

$$S_0 = \int_0^1 \sqrt{1 + c_0^2 \cos^2(2\pi\xi)} d\xi, \quad (2)$$

gdzie:

$$c_0 = \frac{\pi t_c}{a_0} (1 - x_0).$$

Całkowaną powierzchnię przekroju poprzecznego oraz moment bezwładności na jednostkę długości względem osi y przedstawiono w postaci wyrażenia:

$$A_x = (2 + k) \cdot t_f, \quad (3)$$

$$I_x = \frac{1}{12} t_c^3 [2x_1(4x_1^2 + 6x_1 + 3) + 3x_0(1 - x_0^2)S_1], \quad (4)$$

gdzie:

$$x_1 = \frac{t_f}{t_c}, \quad k = \frac{x_0^3}{4x_1[S_2x_0^2 + 3 \cdot (1 - x_0^2) \cdot S_3]},$$

$$S_1 = \int_0^1 \sin^2(2\pi\xi) \sqrt{1 + c_0^2 \cos^2(2\pi\xi)} d\xi,$$

$$S_2 = \int_0^{\frac{1}{4}} \frac{d\xi}{\sqrt{1 + c_0^2 \cos^2(2\pi\xi)}},$$

$$S_3 = \int_0^{\frac{1}{4}} \sin^2(2\pi\xi) \sqrt{1 + c_0^2 \cos^2(2\pi\xi)} d\xi.$$

Całkowaną powierzchnię przekroju poprzecznego oraz moment bezwładności na jednostkę długości względem osi x przedstawiono w postaci wyrażenia:

$$A_y = t_c (2x_1 + x_0 \cdot S_0), \quad (5)$$

$$I_y = \frac{1}{12} t_c^3 \left[2x_1(4x_1^2 + 6x_1 + 3) + \frac{x_0^3}{S_0} \right]. \quad (6)$$

Sztywności zginania pasma płytowego trójwarstwowego z pofalowanym rdzeniem zapisano w postaci:

$$D_x = E \cdot I_y, \quad D_y = E \cdot I_x, \quad (7)$$

gdzie:

E – moduł Young'a.

3. Model analityczny belki trójwarstwowej

Zależność między momentem zginającym M_b i funkcją ugięcia $w(y)$ w osi obojętnej, w oparciu o teorię zginania belek Eulera-Bernoulli'ego, zapisano w postaci:

$$a \cdot D_y \frac{d^2 w}{dy^2} = -M_b. \quad (8)$$

Moment gnący w części środkowej belki ($L_1 \leq y \leq L_1 + L_2$) określono zależnością:

$$M_b(y) = -F_1 y + F_1 (y - L_1) \quad (9)$$

Równanie (8) podwójnie całkowano przyjmując następujące warunki brzegowe dla stałych całkowania:

$$w(0) = 0, \quad \frac{dw}{dy}(L/2) = 0.$$

Funkcję ugięcia dla części środkowej ($L_1 \leq y \leq L_1 + L_2$) można, więc zapisać w postaci:

$$w(y) = \frac{F_1}{a \cdot D_y} \left[-\frac{1}{6} y^3 + \frac{1}{6} (y - L_1)^3 + \frac{1}{2} L_1 (L - L_1) y \right]$$

(10)

Maksymalne ugięcie $w_{\max} = w(L/2)$ jest równe:

$$w_{\max} = \frac{F_1}{a \cdot D_y} \frac{L^3 \lambda_1}{8} \left(1 - \frac{4}{3} \lambda_1^2 \right) \quad (11)$$

gdzie:

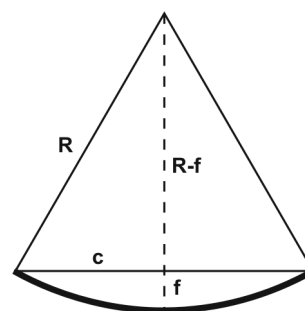
$$\lambda_1 = \frac{L_1}{L}.$$

Zależność między momentem gnącym a promieniem krzywizny ma postać:

$$\frac{1}{R} = \frac{M_g}{a \cdot D_y}, \quad (12)$$

gdzie:

R – promień krzywizny.



Rys. 3. Schemat ugięcia belki-pasma

Dla małych ugięć ($f \ll c$) współczynnik M_g/f można zapisać w postaci:

$$\frac{M_g}{f} = \frac{2 \cdot a \cdot D_y}{c^2}, \quad (13)$$

gdzie:

f – strzałka ugięcia,
 c – odcinek pomiarowy.

Dla belki-pasma trójwarstwowego z wzdłużnie pofalowanym rdzeniem o następujących parametrach: $t_0 = 0.3$ mm, $t_f = 1$ mm, $t_c = 9.5$ mm, $a_0 = 14$ mm, $c = 50$ mm wyznaczono, z zależności (11) i (13), następujące wartości: $w_{max} = 28.933$ mm, $M_g/f = 331.226$ Nm/mm.

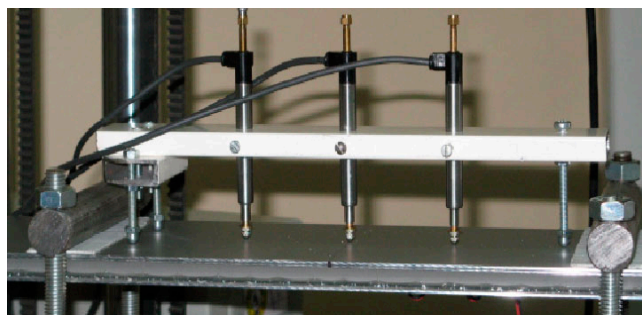
Zależności na maksymalne ugięcie w_{max} i współczynnik M_g/f dla pofalowania poprzecznego uzyskano poprzez zastąpienie zmiennej y przez zmienną x w zależnościach (11) i (13). Wówczas otrzymano następujące wartości: $w_{max} = 31.399$ mm, $M_g/f = 305.210$ Nm/mm.

4. Badania eksperymentalne belek

Sztywności rozważanych belek trójwarstwowych wyznaczono również doświadczalnie. Specjalne stanowisko zbudowane na bazie maszyny Zwick Z100 realizowało zginanie 4-punktowe badanych obiektów. Ogólny widok stanowiska przedstawiono na rys. 4. W [15] omówiono szczegóły badań doświadczalnych. Czteropunktowe zginanie belek zrealizowano za pomocą układu rozciąganych belek, co umożliwiło uniknięcie powstanie sił poziomych w badanych obiektach. Siłę obciążającą F_I mierzono siłomierzem tensometrycznym S9 50 kN firmy HBM, natomiast do pomiaru ugięć f zastosowano trzy czujniki indukcyjne WA 10 mm HBM. Układ pomiarowy przedstawiono na rys. 5. Podczas badań stanowiskowych rejestrowano wartości sił F_I i ugięć f .



Rys. 4. Ogólny widok stanowiska



Rys. 5. Schemat pomiaru ugięć

5. Porównanie wyników

Rezultaty obliczeń analitycznych oraz badań doświadczalnych w postaci współczynnika M_g/f , dla belki z rdzeniem pofalowanym wzdłuż dłuższego boku, zestawiono w tabeli 1, a dla belki z rdzeniem pofalowanym poprzecznie do dłuższego boku w tabeli 2.

Rezultaty analiz dla belki z rdzeniem pofalowanym wzdłuż dłuższego boku
Tabela 1

L. p.	t_0 [mm]	t_f [mm]	Współczynnik M_g/f [Nm/mm]		Różnica [%]
			Analityczne	Doświadczalnie	
1	0.3	1	331.22	330.1	0.34

Rezultaty analiz dla belki z rdzeniem pofalowanym poprzecznie do dłuższego boku
Tabela 2

L. p.	t_0 [mm]	t_f [mm]	Współczynnik M_g/f [Nm/mm]		Różnica [%]
			Analityczne	Doświadczalnie	
1	0.3	1	305.21	304.9	0.10

6. Zakończenie

Przedmiotem rozważań było czteropunktowe zginanie aluminiowej belki trójwarstwowej z rdzeniem wykonanym z blachy falistej. Rozpatrzono obciążenie w kierunku zgodnym oraz prostopadłym do pofalowania rdzenia. Przedstawiono zależności określające sztywności belki w obu kierunkach. Z rezultatów przedstawionych w tabeli 1 i 2 wynika, że belka trójwarstwowa z rdzeniem pofalowanym wzdłuż długości belki jest sztywniejsza niż w kierunku prostopadłym. Maksymalna różnica między wynikami obliczeń analitycznych oraz badań doświadczalnych, nieprzekraczająca 0.34%, wskazuje na wystarczającą zbieżność rezultatów a tym samym potwierdza poprawność modelu obliczeniowego.

Literatura

- [1] Abbes B., Guo Y.Q., *Analytic homogenization for torsion of orthotropic sandwich plates: Application to corrugated cardboard*. *Composite Structures*, **92**, 699-706, 2010.
- [2] Aboura Z., Talbi N., Allaoui S., Benzeggagh M.L., *Elastic behaviour of corrugated cardboard: experiments and modeling*. *Composite Structures*, **63**, 53-62, 2004.
- [3] Allen H.G., *Analysis and design of structural sandwich panels*. Pergamon Press, Oxford, London, Edinburgh, New York, Sydney, Paris, 1969.
- [4] Brzoska Z., *Statyka i stateczność konstrukcji przętowych i cienkościennych*. PWN, Warszawa 1965.
- [5] Carlsson L.A., Nordstrand T., Westerlind B., *On the elastic stiffnesses of corrugated core Sandwich*. *Journal of Sandwich Structures and Materials*, **3**, 253-267, 2001.
- [6] Cheng Q.H., Lee H.P., Lu C., *A numerical analysis approach for evaluating elastic constants of sandwich structures with various core*. *Composite Structures*, **74**, 226-236, 2006.
- [7] Doyle J.F., *Nonlinear analysis of thin-walled structures. Static, dynamic and stability*. Springer, New York, Berlin, Heidelberg, Barcelona, Singapore, Tokyo, 2001.
- [8] Hohe J., Becker W., *Effective stress-strain relations for two-dimensional cellular sandwich core: Homogenization, material modes, and properties*. *Applied Mechanics Reviews*, **55** (1), 61-87, 2002.
- [9] Magnucki K., Kuligowski P., Kruś M., *Pudła wagonów osobowych: Wybrane zagadnienia*. Pojazdy Szynowe, 2011.
- [10] Plantema F.J., *Sandwich construction. The bending and buckling of sandwich beams, plates and shells*. John Wiley & Sons, Inc., New York, London, Sydney, 1966.
- [11] Sun C.T., *Mechanics of aircraft structures*. John Wiley & Sons, Inc., New York, 2006.
- [12] Talbi N., Batti A., Ayad R., Guo Y.Q., *An analytical homogenization model for finite element modeling of corrugated cardboard*. *Composite Structures*, **88**, 280-289, 2009.
- [13] Teng J.G., Rotter J.M., (Eds.), *Buckling of thin-walled shells*. Spon Press, Taylor & Francis Group, London, New York, 2004.
- [14] Ventsel E., Krauthammer T., *Thin plates and shells. Theory, analysis and applications*. Marcel Dekker, Inc, New York, Basel, 2001.
- [15] Wasilewicz P., Jasion P., *Badania wytrzymałościowe struktur typu sandwich*. Raport nr 21-361/2010, Politechnika Poznańska, Poznań 2010.