

DYNAMIC STABILITY OF A POROUS CYLINDRICAL SHELL SUBJECTED TO IMPULSE OF FORCES COMBINED

Tomasz Belica

*Institute of Mechanical Engineering and Machine Operation
ul. Szafrana 4, 65-246 Zielona Góra, Poland
tel.: +48 68 3282302, fax: +48 68 3282617
e-mail: t.belica@ibem.uz.zgora.pl*

Krzysztof Magnucki

*Institute of Applied Mechanics
ul. Piotrowo 3, 60-965 Poznań, Poland
tel.: +48 61 6652064, fax: +48 61 6652307
e-mail: krzysztof.magnucki@put.poznan.pl*

Abstract

This paper is devoted to a circular cylindrical thin-walled shell made of a porous-cellular material. The cylindrical shell is loaded by impulse of combined forces versus of the time. The impulses of forces by course are taken. In the paper a combined axial and external pressure are assumed. A shell is simply supported on all outer edges. The mechanical properties vary continuously on the thickness of a shell. On the ground of Magnucki's model a nonlinear hypothesis of deformation of a plane cross section of the shell is assumed. The displacement field of any cross section and nonlinear geometrical and physical relationships are assumed in a cylindrical coordinate system. The system of three partial differential equations for dynamic stability shell was obtained using the Hamilton's principle. This system of equations is solved by Galerkin method. In the next step the system of two motion equations was solved by the use of the numerical method (Runge-Kutta). The results of the calculation are presented for selected variables, for example, the time of the duration of external load, the amplitude of the impulse, dimensionless parameter of shell porosity, the share of axial load in the total loads. The results of the research for family of porous shell are presented.

Keywords: *dynamic stability, cylindrical shell, porous-cellular material, combined loads, nonlinear analysis*

STATECZNOŚĆ DYNAMICZNA POROWATEJ POWŁOKI WALCOWEJ PODDANEJ IMPULSOWEMU OBCIĄŻENIU ZŁOŻONEMU

Streszczenie

W pracy przedstawiono analizę dynamicznej utraty stateczności powłoki, wywołanej działaniem zmiennego w czasie obciążenia o charakterze impulsowym. Przyjęto impuls o kształcie półfali sinusoidy. Zamknięta powłoka walcowa poddana została jednoczesnemu osiowemu ścisnaniu i ciśnieniu zewnętrznemu. Powłoka zorientowana jest w walcowym układzie współrzędnych oraz podparta swobodnie na krawędziach zewnętrznych. Właściwości powłoki po grubości są zmiennie i zależą od porowatości materiału. Przyjęty został nieliniowy stan przemieszczeń w przekroju poprzecznym. Związki pomiędzy przemieszczeniem i odkształceniem opisane są za pomocą geometrycznie nieliniowych równań. Równania stateczności powłoki zostały wyprowadzone z zasady Hamiltona, a następnie rozwiązane metodą ortogonalizacyjną Bubnowa-Galerkina. Otrzymano układ dwóch nieliniowych równań ruchu. Równania te rozwiązane zostały numerycznie metodą Rungego-Kutty. W pracy przedstawiono wyniki obliczeń dla przykładowych zmiennych: czas trwania i amplituda impulsu, parametr porowatości powłoki, udział ścisnienia osiowego do ciśnienia. Wyniki badań przedstawione zostały w postaci wykresów.

Słowa kluczowe: *stateczność dynamiczna, powłoka walcowa, materiał porowaty, obciążenie złożone, analiza nieliniowa*

1. Wstęp

Powłoki walcowe znajdują szerokie zastosowanie w różnych gałęziach przemysłu. Od wielu lat utrzymuje się tendencja do zmniejszania masy konstrukcji, co jest szczególnie istotne w przemyśle lotniczym. W tym celu zaczęto stosować konstrukcje wielowarstwowe. Charakteryzują się one małym ciężarem przy stosunkowo dużej sztywności giętej i wytrzymałości. Dodatkową zaletą jest ich duża zdolność tłumienia drgań. Współczesne technologie pozwalają wytwarzać konstrukcje z metali porowatych (komórkowych). Mogą stanowić one pewną alternatywę dla konstrukcji warstwowych. Różne metody wytwarzania takich materiałów przedstawił przykładowo Banhart [2]. Badania i właściwości materiałów porowatych przedstawili w swoich pracach Choi i Lakes [7], Kovacik [10, 11], Bart-Smith, Hutchinson i Evans [3]. Model matematyczny własności mechanicznych materiału porowatego przedstawił Magnucki i Stasiewicz [12].

Konstrukcje cienkościennie charakteryzują się dużą podatnością na utratę stateczności. Dlatego określenie obciążeń krytycznych oraz analiza zachowania się przy obciążeniach dynamicznych, stanowi istotny element analizy wytrzymałościowej powłok. Badania stateczności statycznej porowatych cylindrycznych powłok walcowych przedstawił Magnucki i Malinowski [13, 14]. Zagadnienie stateczności dynamicznej porowatej powłoki przedstawił Belica i Magnucki [4]. Powyższe prace uwzględniają tylko geometrycznie liniowe związki pomiędzy przemieszczeniem i odkształceniem.

Bardziej złożonym zagadnieniem jest nieliniowa stateczność dynamiczna powłok. Można tutaj badać np. odpowiedź układu w zależności od charakteru i prędkości obciążenia. Z ważniejszych prac poświęconych temu zagadnieniu można wymienić monografię Volmira [17], Grybosia [9], Awrejcewicz i Krysko [1]. Monografia [17] dotyczy nieliniowych zagadnień dynamicznych płyt i powłok. Gryboś w swojej pracy przedstawia teorie stateczności konstrukcji pod obciążeniem uderzeniowym. Praca Awrejcewicz i Krysko jest poświęcona zagadnieniu dynamiki chaotycznej. Szyc i Twardosz [16] rozwiązali nieliniowe zagadnienie stateczności powłoki walcowej obciążonej ciśnieniem zewnętrznym, Lee [8] powłoki dynamicznie ściskanej osiowo. W pracach tych przyjęto liniowy przyrost obciążenia w czasie. Bugajny [6] badał stateczność małowyniosłej powłoki trójwarstwowej, ściskanej osiowo siłami zmieniającymi się w czasie wg funkcji wykładniczej. Bisagi [5] przedstawił badania MES dynamicznego wybożenia powłok kompozytowych poddanych impulsowemu osiowemu ściskaniu. Analityczne badania impulsowo obciążonych kompozytowych cylindrów były przedmiotem pracy Matemilola i Stronge [15]. Yaffe i Abramovich [18] badali w sposób numeryczny i doświadczalny podłużnie usztywnione powłoki cylindryczne.

Celem tej pracy jest rozwiązanie zagadnienia nieliniowej stateczności dynamicznej zamkniętej powłoki walcowej o strukturze porowatej, poddanej działaniu zmiennego w czasie obciążenia o charakterze impulsowym.

2. Założenia i podstawowe zależności

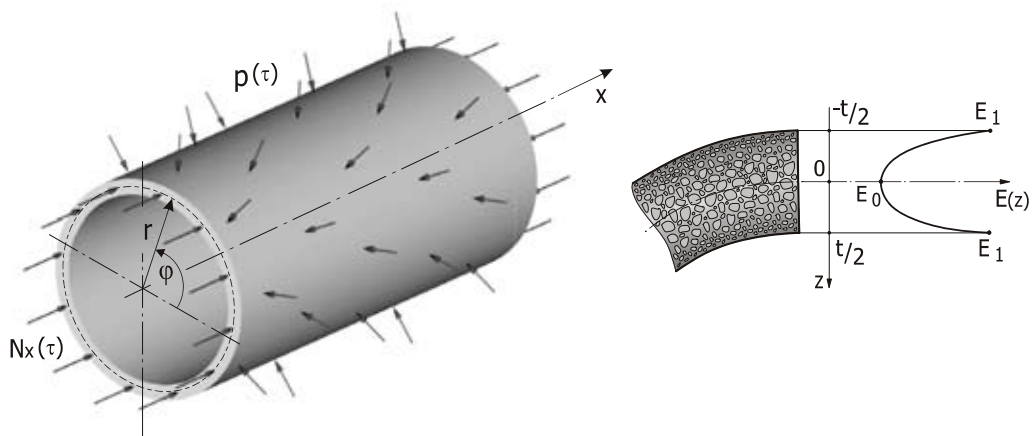
W pracy rozpatruje się zamkniętą powłokę walcową o strukturze porowatej, obciążoną ciśnieniem zewnętrznym i ściskaną wzdłuż tworzących siłami rozłożonymi równomiernie na brzegach krzywoliniowych (Rys. 1). Swobodnie podparta na krawędziach zewnętrznych powłoka zorientowana została w walcowym układzie współrzędnych. Właściwości mechaniczne i fizyczne powłoki są zmienne i zależą od porowatości materiału. Zmiana modułów sprężystości i gęstości jest ciągła i symetryczna względem powierzchni środkowej powłoki.

Zmianę modułów sprężystości na grubości powłoki przyjęto jak w pracach [12, 13, 14], natomiast gęstości materiału z uwzględnieniem wyników pracy [7].

$$E(z) = E_1[1 - e_0 \cos(\pi\zeta)], \quad G(z) = G_1[1 - e_0 \cos(\pi\zeta)], \quad \rho(z) = \rho_1[1 - e_m \cos(\pi\zeta)], \quad (1)$$

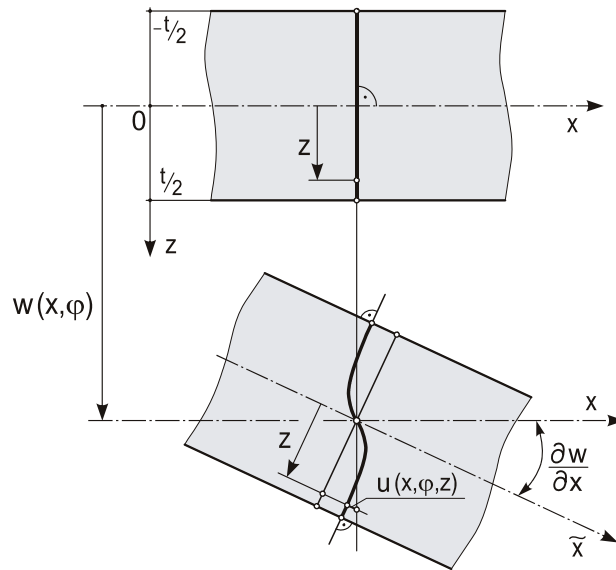
gdzie:

- E_0, G_0, E_1, G_1 - moduły sprężystości odpowiednio dla $\zeta = 0$ i $\zeta = \pm 1/2$,
- ρ_0, ρ_1 - gęstość materiału odpowiednio dla $\zeta = 0$ i $\zeta = \pm 1/2$,
- $\zeta = z/t$ - bezwymiarowa współrzędna,
- t - grubość powłoki,
- $e_0 = 1 - E_0/E_1 = 1 - G_0/G_1$ - bezwymiarowy parametr porowatości $0 \leq e_0 < 1$,
- $e_m = 1 - \sqrt{1 - e_0}$ - bezwymiarowy parametr gęstości.



Rys. 1. Swobodnie podparta powłoka walcowa i schemat zmiany właściwości powłoki na grubości
Fig. 1. A simply supported cylindrical shell and scheme of a porous-cellular shell structure

Przyjęte zostało nieliniowe odkształcenie płaskiego przekroju poprzecznego powłoki (Rys. 2).



Rys. 2. Schemat przemieszczeń w przekroju poprzecznym ścianki powłoki
Fig. 2. Scheme of deformation of a plane cross-section of the shell

Składowe przemieszczenia wyrażone zostały za pomocą związków:

$$\begin{aligned}
 u(x, \varphi, z, \tau) &= u_0(x, \varphi, \tau) - t \left[\zeta \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{1}{\pi} \psi_1(x, \varphi, \tau) \sin(\pi \zeta) \right], \\
 v(x, \varphi, z, \tau) &= v_0(x, \varphi, \tau) - t \left[\zeta \frac{\partial w}{r \partial \varphi} - \frac{1}{\pi} \phi_1(x, \varphi, \tau) \sin(\pi \zeta) \right], \\
 w(x, \varphi, z, \tau) &= w(x, \varphi, 0, \tau) = w(x, \varphi, \tau),
 \end{aligned} \tag{2}$$

gdzie:

$u_0(x, \varphi)$, $v_0(x, \varphi)$ - przemieszczenia styczne dowolnego punktu powierzchni środkowej,
 $\psi_1(x, \varphi)$, $\phi_1(x, \varphi)$ - bezwymiarowe funkcje przemieszczeń,
 $w(x, \varphi)$ - ugięcie powłoki.

Składowe pola odkształceń:

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2, & \varepsilon_\varphi &= \frac{\partial v}{r \partial \varphi} - \frac{w}{r} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{r \partial \varphi} \right)^2, \\
 \gamma_{x\varphi} &= \frac{\partial u}{r \partial \varphi} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{r \partial \varphi}, & \gamma_{xz} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}, & \gamma_{\varphi z} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{r \partial \varphi}.
 \end{aligned} \tag{3}$$

Naprężenia normalne i styczne określono za pomocą liniowych związków, zgodnie z prawem Hooke'a.

3. Równania stateczności dynamicznej powłoki

Równania równowagi dynamicznej powłoki walcowej wyprowadzono z zasady Hamiltona:

$$\delta \int_{\tau_0}^{\tau_1} (T_k - U_\varepsilon + W) d\tau = 0, \tag{4}$$

gdzie:

T_k – energia kinetyczna:

$$T_k = \frac{t}{2} \int_0^{2\pi L} \int_0^{1/2} \int_{-1/2}^{1/2} \rho \left(\frac{\partial w}{\partial \tau} \right)^2 r d\zeta dx d\varphi, \tag{5}$$

W – praca obciążenia zewnętrznego:

$$W = \int_0^{2\pi L} \int_0^0 p w r dx d\varphi, \tag{6}$$

Energia potencjalna odkształcenia sprężystego U_ε , z uwzględnieniem liniowych związków fizycznych przyjmie postać:

$$U_\varepsilon = \frac{E_1 t}{2(1-\nu^2)} \int_0^L \int_0^{2\pi} \int_{-1/2}^{1/2} [1 - e_0 \cos(\pi \zeta)] \left[\varepsilon_x^2 + 2\nu \varepsilon_x \varepsilon_\varphi + \varepsilon_\varphi^2 + \frac{1-\nu}{2} (\gamma_{x\varphi}^2 + \gamma_{xz}^2 + \gamma_{\varphi z}^2) \right] r d\zeta dx d\varphi. \tag{7}$$

Do równania (4) podstawiamy wyrażenia (5) – (7) oraz związki (1) – (3). Po wykonaniu całkowania po grubości powłoki ($-1/2 \leq \zeta \leq 1/2$), przekształcamy otrzymane równanie zgodnie z zasadami rachunku wariacyjnego. Po przyrównaniu do zera wyrażen wariacji tej samej funkcji,

otrzymano układ pięciu równań równowagi: δu_0 , δv_0 , δw , $\delta \psi_1$, $\delta \phi_1$ oraz układ warunków brzegowych powłoki:

$$\delta u_0) \quad \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 u_0}{r^2 \partial \varphi^2} + \frac{1+\nu}{2} \left[\frac{\partial w}{r \partial \varphi} \frac{\partial^2 w}{r \partial x \partial \varphi} + \frac{\partial^2 v_0}{r \partial x \partial \varphi} \right] + \frac{\partial w}{\partial x} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 w}{r^2 \partial \varphi^2} - \frac{\nu}{r} \right] = 0, \quad (8)$$

$$\delta v_0) \quad \frac{\partial^2 v_0}{r^2 \partial \varphi^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 v_0}{x^2} + \frac{1+\nu}{2} \left[\frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{r \partial x \partial \varphi} + \frac{\partial^2 u_0}{r \partial x \partial \varphi} \right] + \frac{\partial w}{r \partial \varphi} \left[\frac{\partial^2 w}{r^2 \partial \varphi^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{1}{r} \right] = 0, \quad (9)$$

$$\delta w) \quad \frac{E_1 t}{1-\nu^2} \left\{ -C_0 \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial u_0}{\partial x} \right] \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{r^2 \partial \varphi^2} + \frac{\nu}{r} \right] + \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{r \partial \varphi} \right)^2 - \frac{w}{r} + \frac{\partial v_0}{r \partial \varphi} \right] \cdot \right. \\ \left. \left[\nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{r^2 \partial \varphi^2} + \frac{1}{r} \right] + (1-\nu) \frac{\partial^2 w}{r \partial x \partial \varphi} \left[\frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{r \partial \varphi} + \frac{\partial u_0}{r \partial \varphi} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right] \right\} + C_1 t^2 \nabla^4(w) - \\ - C_2 t^2 \left[\frac{\partial}{\partial x} [\nabla^2 \psi_1] + \frac{\partial}{r \partial \varphi} [\nabla^2 \phi_1] \right] \left. \right\} - p + C_5 \rho_1 t \frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2} = 0, \quad (10)$$

$$\delta \psi_1) \quad C_2 \frac{\partial}{\partial x} (\nabla^2 w) - C_3 \left[\frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 \psi_1}{r^2 \partial \varphi^2} + \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 \phi_1}{r \partial x \partial \varphi} \right] + C_4 \frac{1-\nu}{2t^2} \psi_1 = 0, \quad (11)$$

$$\delta \phi_1) \quad C_2 \frac{\partial}{r \partial \varphi} (\nabla^2 w) - C_3 \left[\frac{\partial^2 \phi_1}{r^2 \partial \varphi^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial x^2} + \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 \psi_1}{r \partial x \partial \varphi} \right] + C_4 \frac{1-\nu}{2t^2} \phi_1 = 0, \quad (12)$$

gdzie: $C_0 = 1 - \frac{2}{\pi} e_0$, $C_1 = \frac{1}{12} - \frac{\pi^2 - 8}{2\pi^3} e_0$, $C_2 = \frac{1}{\pi^2} \left(\frac{2}{\pi} - \frac{1}{4} e_0 \right)$, $C_3 = \frac{1}{\pi^2} \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3\pi} e_0 \right)$,

$$C_4 = \frac{1}{2} - \frac{4}{3\pi} e_0, \quad C_5 = 1 - \frac{2}{\pi} e_m.$$

Otrzymany układ pięciu równań sprowadzony został do układu trzech równań różniczkowych. W tym celu zdefiniowane zostały siły normalne N_x , N_φ , i styczne $S_{x\varphi}$ oraz wprowadzone zostały: funkcja naprężeń $F(x, \varphi)$ i funkcja przemieszczeń $\Phi(x, \varphi)$:

$$\psi_1 = \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad \phi_1 = \frac{\partial \Phi}{r \partial \varphi}, \quad (13)$$

Siły normalne i styczne wyrażone za pomocą funkcji naprężeń można przedstawić w postaci:

$$N_x = \frac{\partial^2 F}{r^2 \partial \varphi^2}, \quad N_\varphi = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \quad S_{x\varphi} = -\frac{\partial^2 F}{r \partial x \partial \varphi}, \quad (14)$$

Po wprowadzeniu funkcji naprężeń, równania (8) i (9) są spełnione tożsamościowo. Równania (11) i (12) po podstawieniu funkcji przemieszczeń zostały sprowadzone do jednego równania różniczkowego. Wykorzystując równanie ciągłości odkształceń, ostatecznie otrzymano układ trzech podstawowych równań równowagi:

$$\frac{C_1 E_1 t^3}{1-\nu^2} \nabla^4(w) - \frac{C_2 E_1 t^3}{1-\nu^2} \nabla^4(\Phi) = L(w, F) + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + p - C_5 \rho_1 t \frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2}, \quad (15)$$

$$\frac{1}{C_0 E_1 t} \nabla^4(F) = -\frac{1}{2} L(w, w) - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad (16)$$

$$C_2 \nabla^4(w) - C_3 \nabla^4(\Phi) + C_4 \frac{1-\nu}{2t^2} \nabla^2(\Phi) = 0, \quad (17)$$

gdzie:

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{r \partial \varphi^2}, \quad \nabla^4 = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4}{r^2 \partial x^2 \partial \varphi^2} + \frac{\partial^4}{r^4 \partial \varphi^4} - \text{liniowy operator Laplace'a,}$$

$$L(w, F) = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 F}{r^2 \partial \varphi^2} - 2 \frac{\partial^2 w}{r \partial x \partial \varphi} \frac{\partial^2 F}{r \partial x \partial \varphi} + \frac{\partial^2 w}{r^2 \partial \varphi^2} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - \text{nieliniowy operator różniczkowy.}$$

4. Rozwiązanie równań równowagi

Układ równań równowagi dynamicznej powłoki (15) – (17) rozwiązano przyjmując funkcje aproksymujące ugięcie i przemieszczenie w postaci:

$$w(x, \varphi, \tau) = w_1(\tau) \sin \frac{m\pi x}{L} \cos n\varphi + 2w_2(\tau) \sin^2 \frac{m\pi x}{L},$$

$$\Phi(x, \varphi, \tau) = w_1(\tau) \alpha_{\Phi_1} \sin \frac{m\pi x}{L} \cos n\varphi + 2w_2(\tau) \alpha_{\Phi_2} \sin^2 \frac{m\pi x}{L}, \quad (18)$$

gdzie:

- n - liczba fal po obwodzie powłoki,
- m - liczba półfal wzdłuż tworzącej,
- $w_1(\tau), w_2(\tau)$ - parametry ugięcia zależne od czasu.

Przyjęte funkcje spełniają warunki swobodnego podparcia powłoki. Wprowadzając powyższe związki do równania ciągłości odkształceń (16) wyznaczmy funkcję naprężeń w postaci:

$$F = C_0 E_1 t \left\{ w_1^2 \left[\alpha_{f_1} \cos \frac{2m\pi x}{L} - \alpha_{f_2} \cos 2n\varphi \right] + w_1 w_2 \left[\alpha_{f_3} \sin \frac{3m\pi x}{L} \cos n\varphi - \alpha_{f_4} \sin \frac{m\pi x}{L} \cos n\varphi \right] - \right.$$

$$\left. - w_2 \alpha_{f_5} \cos \frac{2m\pi x}{L} + w_1 \alpha_{f_6} \sin \frac{m\pi x}{L} \cos n\varphi \right\} - \frac{1}{2} N_x^0 r^2 \varphi^2 - \frac{1}{2} N_\varphi^0 x^2, \quad (19)$$

gdzie:

$$\alpha_{f_1} = \frac{k_1^2}{32}, \quad \alpha_{f_2} = \frac{1}{32k_1^2}, \quad \alpha_{f_3} = \frac{2k_1^2}{(9+k_1^2)^2}, \quad \alpha_{f_4} = \frac{2k_1^2}{(1+k_1^2)^2}, \quad \alpha_{f_5} = \left(\frac{k_1}{2n} \right)^2, \quad \alpha_{f_6} = \frac{\alpha_{f_4}}{2n^2}, \quad k_1 = \frac{n}{m} \frac{L}{\pi r}.$$

Po wprowadzeniu związków (18) do równania (17) wyznaczone zostały parametry:

$$\alpha_{\Phi_1} = \frac{C_2}{C_3 + k_{\Phi_1} C_4}, \quad \alpha_{\Phi_2} = \frac{C_2}{C_3 + k_{\Phi_2} C_4}, \quad (20)$$

$$\text{gdzie: } k_{\Phi_1} = \frac{1}{2}(1-\nu) \left(\frac{L}{m\pi t} \right)^2 \frac{1}{1+k_1^2}, \quad k_{\Phi_2} = \frac{1}{8}(1-\nu) \left(\frac{L}{m\pi t} \right)^2.$$

Wstawiając (18), (19) i (20) do równania (15) oraz stosując metodę ortogonalizacyjną Bubnowa-Galerkina, otrzymano ostatecznie układ równań różniczkowych ruchu:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \tilde{w}_1}{d\tau^2} &= \alpha_{w_8} [N_0 - N_{0g}] \tilde{w}_1 - \alpha_{w_6} (\alpha_{f_1} + \alpha_{f_2}) \tilde{w}_1^3 - \alpha_{w_6} (\alpha_{f_3} + \alpha_{f_4}) \tilde{w}_1 \tilde{w}_2^2 + \alpha_{w_9} \tilde{w}_1 \tilde{w}_2, \\ \frac{d^2 \tilde{w}_2}{d\tau^2} &= \alpha_{w_7} \left[\frac{N_0 k_0}{E_1} - \alpha_{w_2} \right] \tilde{w}_2 - \frac{1}{6} \alpha_{w_6} (\alpha_{f_3} + \alpha_{f_4}) \tilde{w}_1^2 \tilde{w}_2 + \frac{1}{12} \alpha_{w_9} \tilde{w}_1^2, \end{aligned} \quad (21)$$

gdzie:

$\tilde{w}_1 = w_1/t$, $\tilde{w}_2 = w_2/t$ - bezwymiarowe parametry ugięcia,

N_0 [MPa] - obciążenie powłoki,

k_0 - parametr obciążenia powłoki ($0 \leq k_0 \leq 1$), określający proporcje pomiędzy siłami osiowymi $N_x = k_0 N_0$ oraz siłami obwodowymi $N_\varphi = p \cdot r = (1 - k_0) N_0$,

N_{0g} [MPa] - górne krytyczne obciążenie powłoki:

$$N_{0g} = \min_{m,n} \left\{ \frac{E_1}{k_0 + k_1^2(1-k_0)} \left[C_0 \cdot \alpha_{f_6} + \frac{t^2}{1-\nu^2} \left(\frac{m\pi}{L} \right)^2 (1+k_1^2)^2 [C_1 - C_2 \cdot \alpha_{\Phi_1}] \right] \right\} \quad (22)$$

oraz pozostałe parametry:

$$\alpha_{w_2} = \frac{4}{1-\nu^2} \left(\frac{m\pi t}{L} \right)^2 (C_1 - C_2 \cdot \alpha_{\Phi_2}) + C_0 \alpha_{f_5}, \quad \alpha_{w_6} = 2 \left(\frac{n}{r} \right)^2 \left(\frac{m\pi}{L} \right)^2 \frac{C_0 E_1 t^2}{C_5 \rho_1}, \quad \alpha_{w_7} = \frac{4}{3} \left(\frac{m\pi}{L} \right)^2 \frac{E_1}{C_5 \rho_1},$$

$$\alpha_{w_8} = \frac{k_0 + k_1^2(1-k_0)}{C_3 \rho_1} \left(\frac{m\pi}{L} \right)^2, \quad \alpha_{w_9} = \left(\frac{r}{t} \right) \left[1 + \frac{8}{(1+k_1^2)^2} \right] \alpha_{f_5} \alpha_{w_6}.$$

Układ równań różniczkowych (21) należy rozwiązać przy następujących warunkach początkowych:

$$\text{dla } \tau = 0 \rightarrow \tilde{w}_1 = 1 \cdot 10^{-6}, \quad \tilde{w}_2 = \frac{d\tilde{w}_1}{d\tau} = \frac{d\tilde{w}_2}{d\tau} = 0.$$

5. Przykład obliczeń numerycznych

Obliczenia numeryczne przeprowadzone zostały w oparciu o metodę Rungego-Kutty. Przyjęto, że obciążenie zewnętrzne o charakterze impulsowym zmienia się w czasie wg następujących warunków:

$$\begin{aligned} 0 \leq \tau \leq T &\rightarrow N_0(\tau) = A \cdot N_{0g} \sin \frac{\pi \tau}{T}, \\ \tau > T &\rightarrow N_0(\tau) = 0, \end{aligned}$$

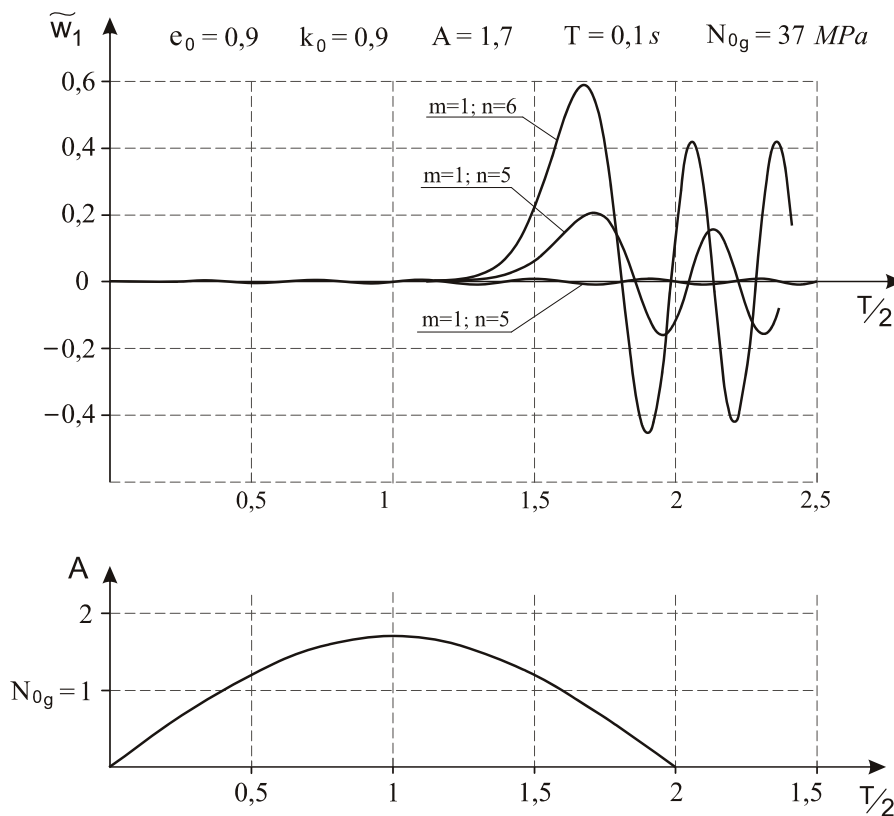
gdzie:

T - czas trwania impulsu,

A - współczynnik obciążenia dynamicznego, zdefiniowany jako krotność siły krytycznej.

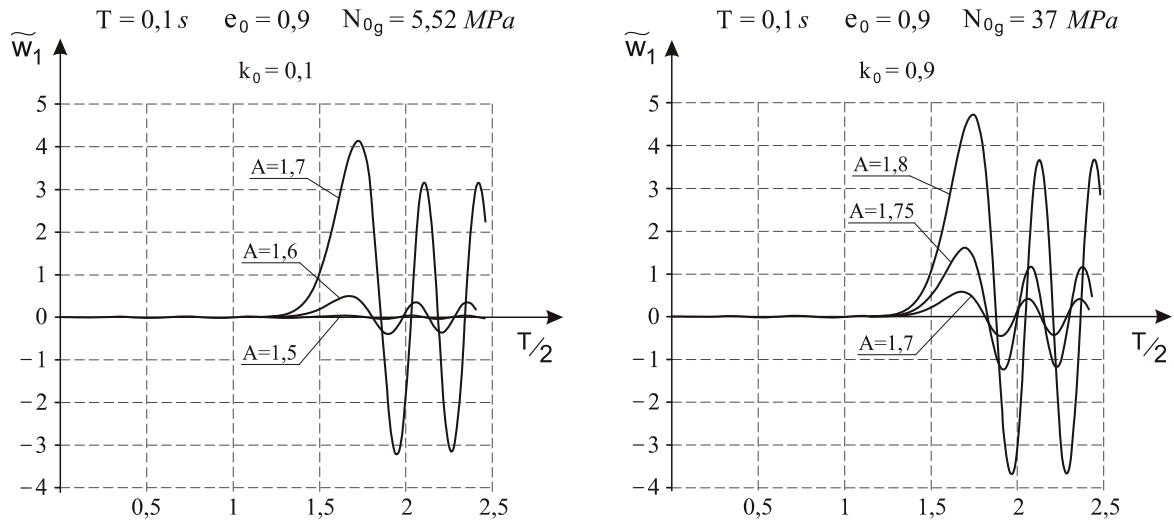
Obliczenia przeprowadzono dla powłoki walcowej o następujących danych geometrycznych: $t = 4\text{ mm}$, $r = 800\text{ mm}$, $L = 2400\text{ mm}$ i materiałowych: $E_1 = 7,06 \cdot 10^4\text{ MPa}$, $\rho_1 = 2,8 \cdot 10^{-6}\text{ kg/mm}^3$, $\nu = 0,33$. Badane były powłoki jednorodne $e_0 = 0$ i porowate $e_0 = 0,9$ przy różnych kombinacjach obciążenia: $k_0 = 0,1$ (dominujące ciśnienie zewnętrzne) i $k_0 = 0,9$ (dominujące ściskanie osiowe).

Na rysunku 3 przedstawiono ugięcie powłoki w zależności od postaci odkształcenia. W przypadku statycznym najmniejsza wartość siły krytycznej występuje przy $m = 1$ i $n = 5$, natomiast w przypadku dynamicznym przy $m = 1$ i $n = 6$ (dla danych zamieszczonych na wykresie). Wraz ze zmniejszeniem czasu trwania impulsu T wzrasta liczba m i n , niezależnie od parametru e_0 . Przy dominującym ciśnieniu zewnętrznym wzrasta tylko ilość fal obwodowych, natomiast przy dominującym ścisnaniu osiowym pojawiają się dodatkowo półfale wzdłuż tworzącej.

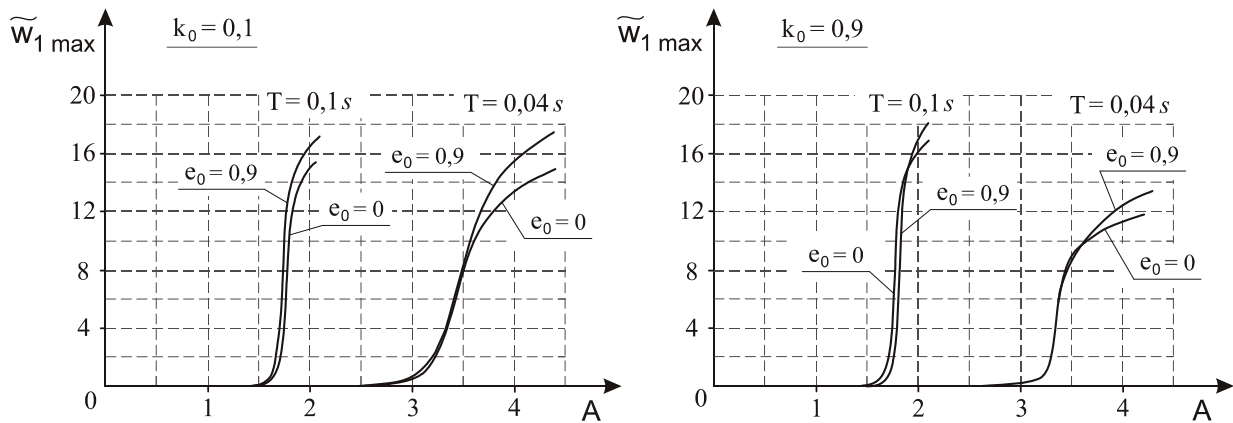


Rys. 3. Ugięcie powłoki w zależności od postaci odkształcenia
Fig. 3. Deflection of the shell dependent on forms of deformations

Rysunek 4 przedstawia ugięcie powłoki przy różnych współczynnikach obciążenia dynamicznego. Początkowo, wzrost wielkości impulsu wywołuje niewielkie ugięcia powłoki. Dalszy nieznaczny przyrost obciążenia powoduje gwałtowny wzrost ugięcia. Następuje tutaj dynamiczna utrata stateczności powłoki. Powłoka przechodzi do nowego położenia równowagi i zostaje osiągnięte maksimum ugięcia. Zjawisko to jest wyraźnie widoczne na rysunku 5, gdzie przedstawiono maksymalne ugięcie powłoki w zależności od wielkości impulsu.



Rys. 4. Ugięcie powłoki w zależności od parametru A
 Fig. 4. Deflection of the shell dependent on the parameter A



Rys. 5. Maksymalne ugięcie powłoki w zależności od parametru A
 Fig. 5. Maximum deflection of the shell dependent on the parameter A

Przebieg zjawiska utraty stateczności przedstawiono dla różnych czasów T . Skrócenie czasu trwania impulsu powoduje zwiększenie dynamicznej odporności powłoki na wyboczenie. Jednocześnie obserwuje się mniej gwałtowny charakter ugięcia. Spowodowane jest to zwiększeniem się liczby m i n . Wraz ze wzrostem liczby fal maleje maksimum ugięcia, co jest szczególnie widoczne w przypadku dominującego ściskania osiowego. Maksimum to jest większe dla materiału porowatego. Początkowy przebieg utraty stateczności jest praktycznie taki sam dla różnych parametrów e_0 . Jest to szczególnie istotne przy określaniu dynamicznej odporności powłoki na wyboczenie. Należy jednak zauważyć, że odnosimy się tutaj do górnego obciążenia krytycznego, które jest oczywiście mniejsze dla powłoki porowatej.

Podziękowania

Praca została wykonana w ramach projektu badawczego promotorskiego Ministerstwa Nauki i Szkolnictwa Wyższego nr N501 054 31/3650.

Literatura

- [1] Awrejcewicz, J., Krysko, V. A., *Dynamika chaotyczna belek, płyt i powłok*, WNT, Warszawa, 2005.
- [2] Banhart, J., *Manufacture, characterisation and application of cellular metals and metal foams*, Progress in Materials Science, Vol. 46, pp. 559-632, 2001.

- [3] Bart-Smith, H., Hutchinson, J. W., Evans, A. G., *Measurement and analysis of the structural performance of cellular metal sandwich construction*, Int. Journal of Mechanical Science, Vol. 43, pp. 1945-1963, 2001.
- [4] Belica, T., Magnucki, K., *Dynamic stability of a porous cylindrical shell*, PAMM Proceedings in Applied Mathematics and Mechanics, Vol. 6, pp. 207-208, 2006.
- [5] Bisagni, Ch., *Dynamic buckling of fiber composite shells under impulsive axial compression*, Thin-Walled Structures, Vol. 43, pp. 499-514, 2005.
- [6] Bugajny, D., *Nieliniowe równania ruchu małowyniosłej sprężystej trójwarstwowej powłoki*, Rozprawy Inżynierskie, Vol. 24, pp. 15-31, 1976.
- [7] Choi, J. B., Lakes, R. S., *Analysis of elastic modulus of conventional foams and of re-entrant foam materials with a negative Poisson's ratio*, Int. J. Mech. Sci., Vol. 37, pp. 51-59, 1995.
- [8] Lee, Doo-Sung, *Nonlinear dynamic buckling of orthotropic cylindrical shells subjected to rapidly applied loads*, Kluwer Academic Publishers, Journal of Engineering Mathematics, Vol. 38, pp. 141-154, 2000.
- [9] Gryboś, R., *Stateczność konstrukcji pod obciążeniem uderzeniowym*, PWN, Warszawa, 1980.
- [10] Kovacik, J., *Correlation between Young's modulus and porosity in porous materials*, Journal of Materials Science Letters, Vol. 18, pp. 1007-1010, 1999.
- [11] Kovacik, J., *Correlation between shear modulus and porosity in porous materials*, Journal of Materials Science Letters, Vol. 20, pp. 1953-1955, 2001.
- [12] Magnucki, K., Stasiewicz, P., *Elastic buckling of a porous beam*, Journal of Theoretical and Applied Mechanics, Vol. 42, nr 4, pp. 859-868, 2004.
- [13] Magnucki, K., Malinowski, M., Lewiński, J., *Optimal design of an isotropic porous-cellular cylindrical shell*, Proc. of ICPVT-11, Int. Conference on Pressure Vessel Technology (CD-ROM), Vancouver, Canada, 2006.
- [14] Malinowski, M., Magnucki, K., *Buckling of an isotropic porous cylindrical shell*, Proc. of the 10th Int. Conference on Civil, Structural and Environmental Engineering Computing, B.H.V. Topping (Editor), Civil-Comp. Press, Vol. 53, pp. 1-10, Stirling, Scotland, 2005.
- [15] Matemilola, S. A., Stronge, W. J., *Impact response of composite cylinder*, Int. J. So Structures, Vol. 34, No. 21, pp. 2669-2684, 1997.
- [16] Szyc, W., Twardosz, F., *O pewnym dynamicznym zagadnieniu stateczności powłoki walcowej*, Archiwum Budowy Maszyn, Vol. XIX, pp. 25-41, 1972.
- [17] Volmir, A. C., *Nonlinear dynamic of plates and shells*, Nauka, Moscow, 1972.
- [18] Yaffe, R., Abramovich, H., *Dynamic buckling of cylindrical stringer stiffened shells*, Computers and Structures, Vol. 81, pp. 1031-1039, 2003.