

# Inżynierski problem komputerowego modelowania pracy żelbetowej płyty dwuprzęsłowej z uwzględnieniem sprężystej podatności belki

Dr inż. Paweł Kossakowski, Katedra Wytrzymałości Materiałów i Konstrukcji Betonowych, Politechnika Świętokrzyska, Kielce

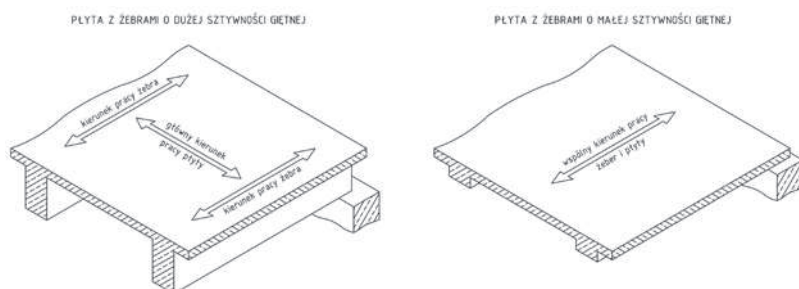
## 1. Wprowadzenie

Na przestrzeni ostatnich kilkunastu lat inżynierowie zajmujący się projektowaniem konstrukcji budowlanych wyposażeni zostali w zaawansowane narzędzia wspomagające proces obliczeniowy. Dostępne obecnie na rynku systemy obliczeniowe umożliwiają przeprowadzanie bardzo skomplikowanych analiz elementów konstrukcyjnych poddawanych różnym oddziaływaniom i znajdujących się w rozmaitych zakresach pracy materiału. Podstawowymi zaletami stosowania programów komputerowych jest szybkość i dokładność obliczeń oraz możliwość modelowania skomplikowanych struktur przestrzennych. Dzięki temu inżynier uzyskuje sposobność analizowania konstrukcji mieszanych, złożonych z różnych rodzajów elementów w postaci belek, powłok czy brył połączonych ze sobą w jednym modelu obliczeniowym. Używane obecnie programy umożliwiają modelowanie konstrukcji wykonanych z różnych materiałów, w tym również z betonu i żelbetu.

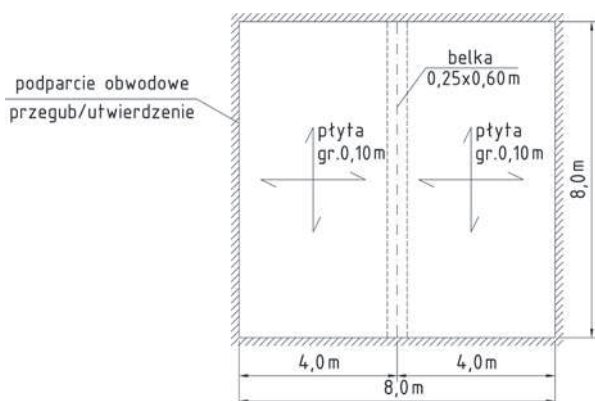
Jednym z najbardziej powszechnych zagadnień jakim zajmują się projektanci jest analiza statyczna stropów żelbetowych. Metody komputerowe pozwalają z jednej strony na szybką analizę stropów o skomplikowanej geometrii, z drugiej strony umożliwiają uwzględnienie w modelu obliczeniowym wszystkich elementów składowych, tj. belek, płyt i elementów podpierających ta-

kich jak słupy czy ściany. Podstawową kwestią jest jednak prawidłowe zbudowanie modelu numerycznego analizowanego układu konstrukcyjnego, tak aby uzyskane wyniki w jak najwyższym stopniu odpowiadały rzeczywistości.

W niniejszym artykule przeanalizowano dwie kwestie związane z modelowaniem stropów żelbetowych o konstrukcji płytowo-belkowej, które mogą stanowić problem w praktyce inżynierskiej. Przede wszystkim zbadano zjawisko wpływu sprężystej podatności belki na wartości momentów zginających w płycie, w sytuacji, gdy sztywność belki jest znaczna w stosunku do sztywności płyty, a więc teoretycznie możliwe byłoby przyjęcie w modelu numerycznym niepodatnego podparcia płyty na belce. Druga analizowana kwestia to sposób modelowania belki w układzie płytowo-belkowym, a w szczególności prawidłowe uwzględnienie sztywności belki w stosunku do sztywności płyty. Prezentowaną analizę wykonano dla modelowego stropu żelbetowego o konstrukcji płytowo-belkowej, w układzie dwuprzęsłowym i stosunku boków płyt równym 2, co odpowiada granicznemu układowi dla płyt krzyżowozbrojonych. Układ płyty dwuprzęsłowej o przyjętej w analizie geometrii powoduje, że belka obciążona jest w stopniu największym, w porównaniu do układów płyt wieloprzęsłowych. Dzięki temu należy spodziewać się, że zaobserwowane w analizie zjawiska wystąpią z największą intensywnością.



**Rys. 1.**  
Praca fragmentu stropu płytowo-belkowego przy zastosowaniu belek o dużej i małej sztywności giętej w stosunku do sztywności płyty (na podstawie [1])



**Rys. 2.** Układ konstrukcyjny i geometria analizowanego stropu

W artykule opisano zaobserwowane zjawiska i zasugerowano określone rozwiązania, dzięki czemu uzyskane wyniki mogą być pomocne w praktyce inżynierskiej. W przypadku analiz podobnych układów konstrukcyjnych o nieco innej geometrii, zaobserwowane efekty mogą występować z inną intensywnością. W takich przypadkach sugeruje się przeprowadzenie osobnej analizy wrażliwości zastosowanych rozwiązań pod kątem ich wpływu na uzyskane rezultaty.

## 2. Wpływ sprężystej podatności belek na pracę stropów

Jednym z podstawowych założeń upraszczających, przyjmowanych w obliczeniach statycznych stropów, jest pominięcie sprężystej podatności belek, czyli pominięcie ugięć belek, na których pośrednio oparta jest płyta. Jest to założenie poprawne w sytuacji, gdy belki podpierające są znacznie bardziej sztywne od płyty, stanowiąc dla niej podparcie pośrednie o małej podatności. Płyta pracuje wtedy głównie w kierunku prostopadłym do belek, co ma przełożenie w rozkładach momentów zginających, które osiągają znaczne wartości podporowe w miejscu występowania belek. W sytuacji, gdy sztywności belek i płyty są porównywalne, znaczna podatność belek w stosunku do podatności płyty powoduje zjawisko odwrotne. Płyta z belkami stanowi wtedy układ elementów współpracujących ze sobą, a główny kierunek pracy jest równoległy do osi

belek. Na rysunku 1 pokazano pracę fragmentu stropu płytowo-belkowego przy zastosowaniu belek o dużej i małej sztywności giętnej w stosunku do sztywności płyty.

Jak widać, zasadniczą sprawą w ocenie możliwości pominięcia w obliczeniach statycznych sprężystej podatności belek jest kwestia wzajemnej relacji sztywności płyty i belek. Przyjmuje się, że podatność belek może być pomijana, jeżeli sztywność elementu podpierającego (belki) jest co najmniej dziesięć razy większa od sztywności elementu opieranego (płyty), choć w wielu przypadkach sugeruje się, że różnica ta powinna być większa [1]. W przypadku belek podpierających płyty ciągłe przepisy zagraniczne wymagają spełnienia warunku [1]:

$$\frac{h}{h_p} > 2,5 \quad (1)$$

gdzie  $h$  i  $h_p$  oznaczają odpowiednio wysokości płyty i belki.

## 3. Charakterystyka analizowanego stropu

Analizie poddano strop żelbetonowy o modelowej konstrukcji płytowo-belkowej. Przyjęto układ dwuprzęsłowej płyty ciągłej o długości 8,0 m i rozpiętościach pól 4,0 m, co określa wzajemny stosunek długości boków płyty jako 2. Przyjęto, że cała konstrukcja wykonana jest z betonu C30/37. Układ konstrukcyjny oraz geometrię stropu pokazano na rysunku 2.

Przyjęto grubość płyty jako  $h_p = 0,10$  m. Założono belkę o wymiarach przekroju poprzecznego  $b \times h = 0,25 \times 0,60$  m przyjmując wysokość jako 1/15 jej długości.

Przy tak dobranych wymiarach przekrojów poprzecznych elementów stosunek wysokości belki  $h$  do grubości płyty  $h_p$  wynosi:

$$\frac{h}{h_p} = \frac{0,60}{0,10} = 6 \quad (2)$$

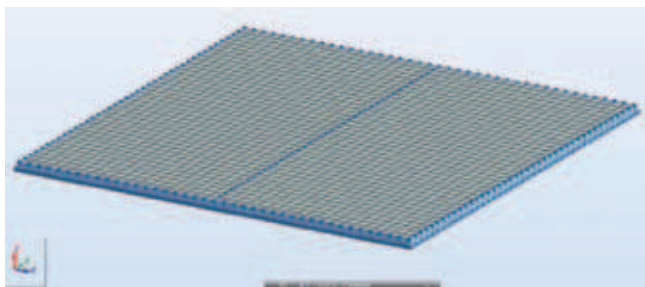
Porównując tę wartość z warunkiem (1) widać, że założone wymiary wysokości belki i grubości płyty ponad dwukrotnie przewyższają wartość zalecaną, co teore-

**Tabela 1.** Przypadki obciążeniowe

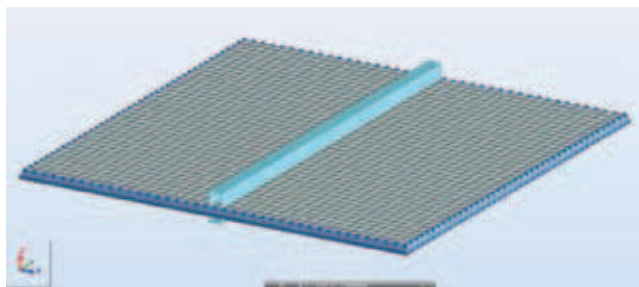
Przypadek obciążenia	Rodzaj obciążenia	Charakterystyczna wartość obciążenia [kN/m <sup>2</sup> ]
P1	obciążenie ciężarem własnym konstrukcji	automatycznie uwzględniane w programie obliczeniowym
P2	obciążenie stałe od warstw wykończeniowych	2,5
P3	obciążenie zmienne użytkowe stropu kategorii A	2,0

**Tabela 2.** Kombinacja obciążeń

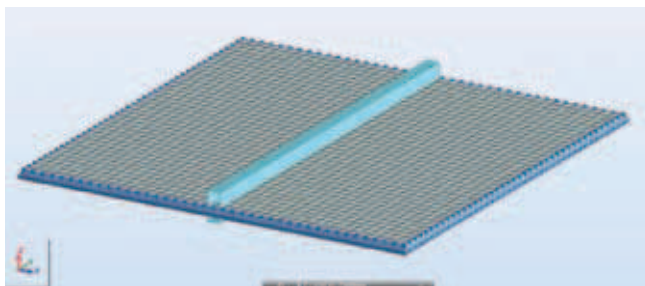
Kombinacja obciążeń	Stan graniczny	Formuła kombinacji
K1	Stan graniczny nośności ULS	$1,35 \times P1 + 1,35 \times P2 + 1,50 \times P3$



Rys. 3. Model numeryczny S1



Rys. 4. Model numeryczny S2



Rys. 5. Model numeryczny S3

tycznie pozwalałoby na pominięcie w obliczeniach wpływu sprężystej podatności belki. Możliwe zatem byłoby przyjęcie belki jako podpory niepodatnej. W niniejszym artykule przeanalizowano możliwość uwzględniania oraz nieuwzględniania podatności belki, stosując różne modele numeryczne.

W analizie przyjęto obciążenia stropu wg [2] określając proste przypadki obciążeniowe wg obciążeń zestawionych w tabeli 1 oraz przyjmując kombinację obciążeń w stanie granicznym nośności ULS w oparciu o [3] wg formuły podanej w tabeli 2.

#### 4. Analizowane modele numeryczne stropu

Jak wspomniano powyżej, w przeprowadzonych obliczeniach, analizie poddano wpływ podatności belki na pracę płyty w zakresie obciążeń statycznych. Przeanalizowano dwie skrajne sytuacje obliczeniowe zakładając podparcie płyty na obwodzie jako przegub i utwierdzenie

(rys. 2). Dzięki temu uzyskane wyniki mogą być odnoszone do przypadków pośrednich, tj. zamocowań obwodowych o pewnym stopniu sztywności np. w formie wieńców.

Układ konstrukcyjny stropu modelowano w oparciu o rozwiązania teoretyczne, a więc zakładając liniowe podparcie przegubowe w osi belki, jak również modelując fizycznie belkę za pomocą elementu liniowego. We wszystkich modelach płyta stropowa modelowana była jako powłoka o siatce elementów skończonych 0,2×0,2 m. Belkę modelowano w sposób indywidualny w zależności od danego typu modelu. Analizę przeprowadzono przy zastosowaniu programu Autodesk Robot Structural Analysis 2011 dla pięciu typów modeli numerycznych, które krótko scharakteryzowano poniżej.

Model S1 zbudowano w oparciu o warunek (2) zakładając, że możliwe jest założenie niepodatnego oparcia płyty na belce. W modelu tym belka modelowana była jako podpora przegubowa, zgodnie ze schematem pokazanym na rysunku 3.

W modelu S2 uwzględniono sprężystą podatność belki modelując ją za pomocą elementów prętowych, bez uwzględniania przesunięcia środków ciężkości płyty i belki (rys. 4).

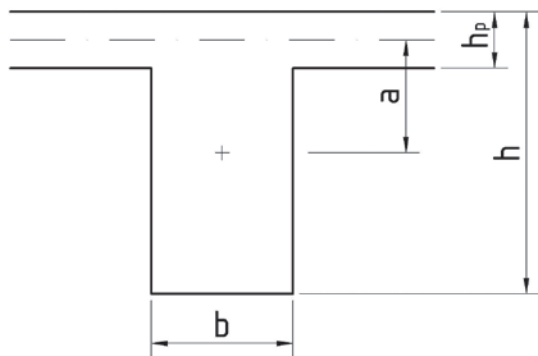
Model S3 zbudowano analogicznie jak model S2, tj. uwzględniając sprężystą podatność belki, modelowanej jako element prętowy leżący w płaszczyźnie płyty (rys. 5).

W modelu tym w sposób pośredni uwzględniono przesunięcia środków ciężkości płyty i belki, korygując sztywność belki. W tym celu zwiększono moment bezwładności belki wynikający z mimośrodowości, a zgodnie ze schematem pokazanym na rysunku 6.

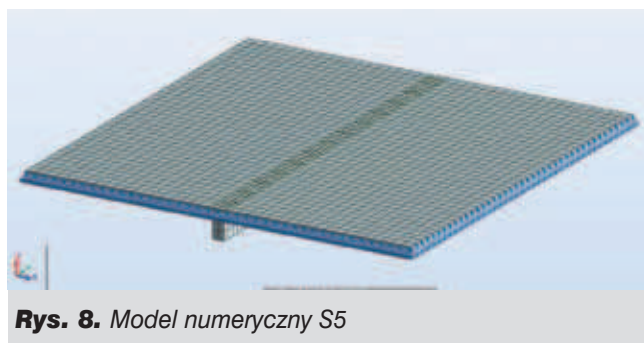
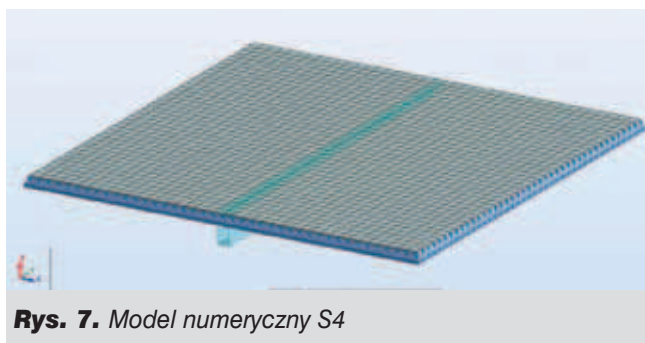
Moment bezwładności belki mnożony był przez współczynniki  $\alpha$  określony wzorem:

$$\alpha = \frac{J_{y1}}{J_{y0}} = \frac{bh^3}{12} + bh \left( \frac{h}{2} - \frac{h_p}{2} \right)^2 \quad (3)$$

gdzie  $J_{y0}$  oznacza moment bezwładności belki liczony względem jej osi bezwładności, a  $J_{y1}$  oznacza moment bezwładności belki liczony względem osi bezwładności

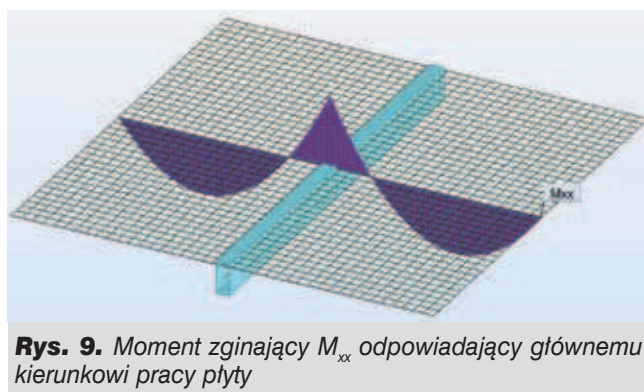


Rys. 6. Rzeczywiste usytuowanie belki w stosunku do płyty stropowej



ści płyty z uwzględnieniem mimośrodów a. Analogicznie do modeli S2 i S3 w modelu S4 także uwzględniono sprężystą podatność podpory pośredniej modelując belkę leżącą w płaszczyźnie płyty (rys. 7). Mimośrodowe położenie belki w stosunku do płyty modelowano przy użyciu dostępnej w programie obliczeniowym funkcji *offset*, która jest wykorzystywana przy definiowaniu mimośrodowego połączenia prętów w konstrukcji, w przypadku gdy osie prętów nie leżą na tym samym poziomie. Pozwala ona na definicję prętów poprzez odniesienie do istniejących węzłów bez potrzeby definiowania dodatkowych węzłów czy elementów łącznikowych [4].

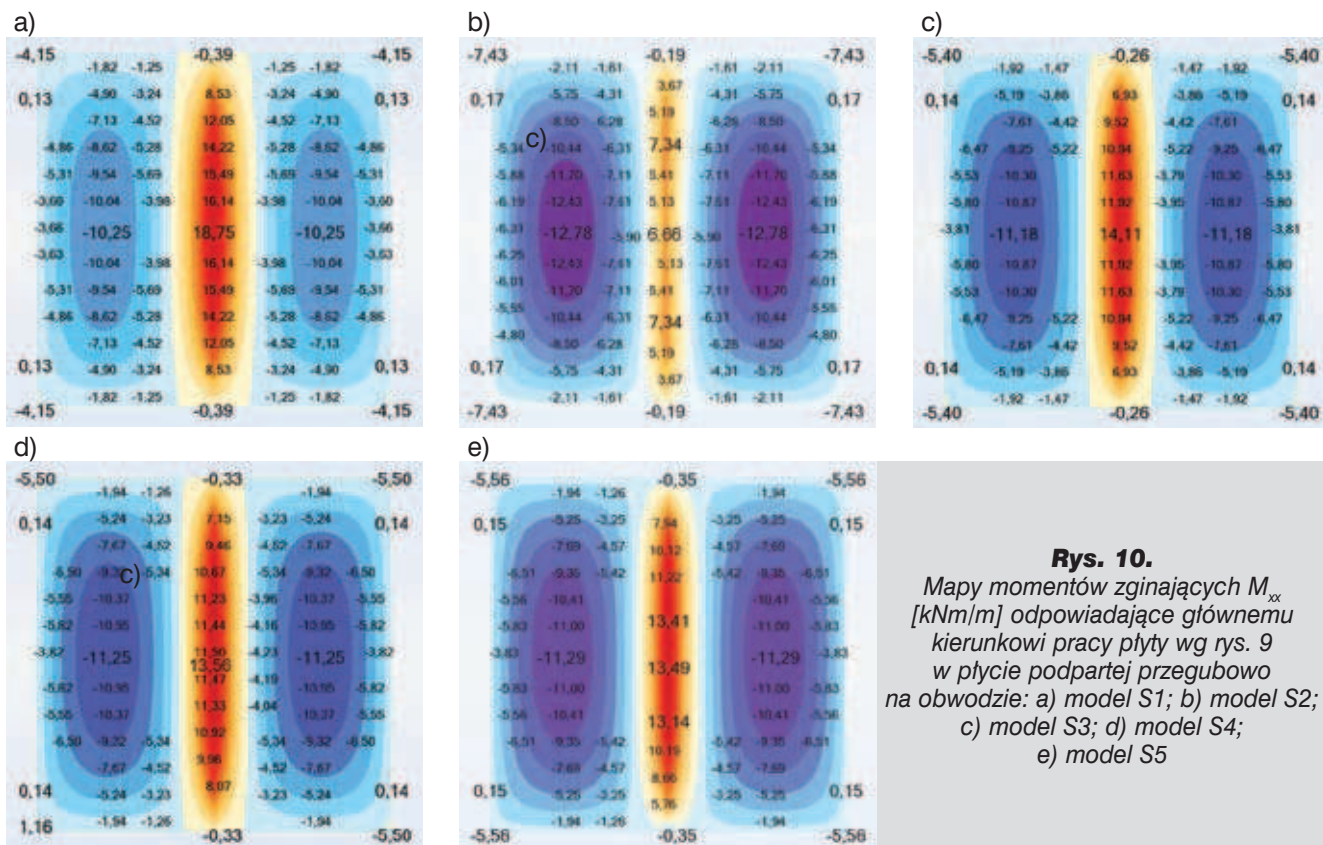
W modelu S5 wszystkie elementy konstrukcyjne, tj. płytę i belkę modelowano za pomocą elementów powłokowych, z uwzględnieniem rzeczywistego położenia belki w stosunku do płyty (rys. 8), przez co model ten najlepiej odzwierciedlał pracę analizowanego układu.



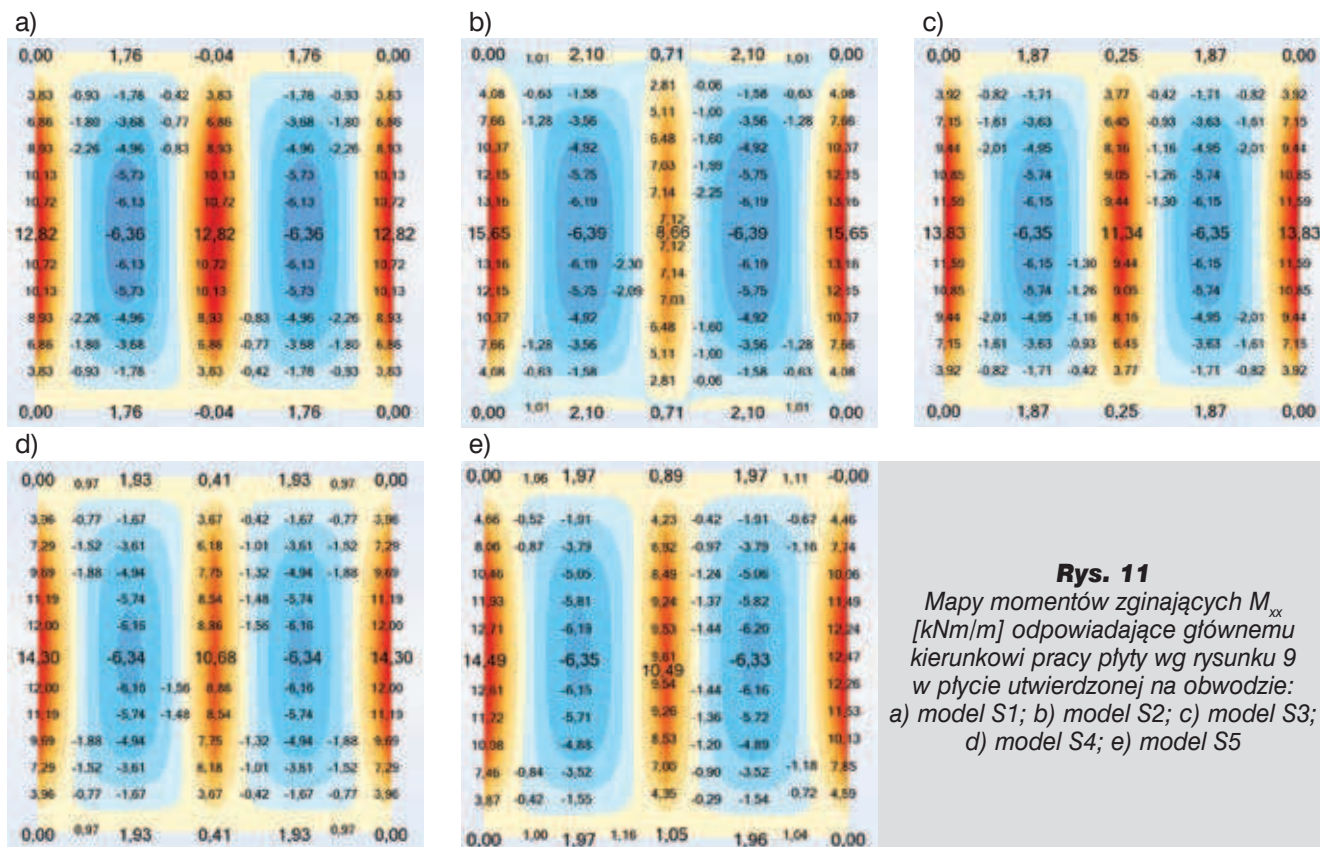
Rys. 9. Moment zginający  $M_{xx}$  odpowiadający głównemu kierunkowi pracy płyty

### 5. Analiza pracy płyty

W wyniku przeprowadzonych obliczeń uzyskano rozkłady momentów zginających w płycie przy zastosowaniu wszystkich modeli numerycznych. Na rysunkach 10



Rys. 10. Mapy momentów zginających  $M_{xx}$  [kNm/m] odpowiadające głównemu kierunkowi pracy płyty wg rys. 9 w płycie podpartej przegubowo na obwodzie: a) model S1; b) model S2; c) model S3; d) model S4; e) model S5



**Rys. 11**  
 Mapy momentów zginających  $M_{xx}$  [kNm/m] odpowiadające głównemu kierunkowi pracy płyty wg rysunku 9 w płycie utwierdzonej na obwodzie:  
 a) model S1; b) model S2; c) model S3; d) model S4; e) model S5

i 11 pokazano mapy momentów gnących  $M_{xx}$  [kNm/m] w kierunku głównym pracy płyty (wg oznaczenia na rys. 9), dla kolejnych modeli numerycznych odpowiednio dla przegubowego i sztywnego podparcia płyty na obwodzie.

W przeprowadzonej analizie porównano rozkłady i ekstremalne wartości momentów  $M_{xx}$  w przęśle płyty oraz nad podporą – belką. Z uwagi na przyjęty sposób modelowania stropu z zastosowaniem liniowego podparcia w miejscu usytuowania belki, odniesiono się do wartości momentów podporowych w osi belki. W takim przypadku skala zaobserwowanych efektów w odniesieniu do momentów podporowych w płycie w osi i na krawędzi belki będzie analogiczna.

Podstawowym zaobserwowanym w analizie efektem jest zauważalny wpływ sprężystej podatności belki na rozkłady momentów  $M_{xx}$  w płycie. Efekt ten jest niepomijalny, choć sztywność przyjętej w obliczeniach belki w stosunku do sztywności płyty jest znaczna. Skala zjawiska ujawnia się porównując wartości momentów  $M_{xx}$  uzyskanych przy zastosowaniu modelu numerycznego S1, tj. przy założeniu podpór przegubowych w miejscu usytuowania belki, w stosunku do pozostałych modeli S3 do S5, w których belka była fizycznie modelowana. W przypadku przegubowego podparcia płyty na obwodzie zanotowano niższe bezwzględne wartości momentów przęsłowych uzyskane przy zastosowaniu modelu S1 w porównaniu do modeli S3 do S5, przy maksymalnej różnicy momentów wynoszącej 10%. Na podporze – belce obserwowano efekt odwrotny, tj. wyższe bezwzględne wartości momentów dla

modelu S1 w stosunku do modeli S3 do S5, a maksymalna różnica wyniosła 39%. W przypadku utwierdzenia płyty na obwodzie można stwierdzić, że bezwzględne wartości momentów przęsłowych są identyczne we wszystkich analizowanych modelach. Przyjęcie w modelu S1 podpór w miejscu belki skutkowało wyższymi o maksymalnie 22% bezwzględnymi wartościami momentów zginających w stosunku do modeli S3 do S5. Różnice w momentach zginających obserwowano również w miejscu utwierdzenia na obwodzie, gdzie momenty podporowe były o maksymalnie 12% wyższe w przypadku zastosowania modelu S3 do S5, w porównaniu do modelu S1.

Kolejnym istotnym zjawiskiem zaobserwowanym w trakcie obliczeń było wyraźne niedoszacowanie sztywności belki w stosunku do sztywności płyty, w przypadku modelowania tych elementów jako leżących w jednej płaszczyźnie, co zrealizowano w modelu numerycznym S2. W przypadku zastosowania podparcia przegubowego, najsilniej objawia się to w odniesieniu do momentów podporowych na belce, gdzie obserwuje się znaczne zaniżenie wartości momentów uzyskanych przy zastosowaniu modelu S2 w porównaniu do pozostałych modeli S3 do S5, przy maksymalnej różnicy momentów wynoszącej 112%. Analizując z kolei momenty przęsłowe stwierdzono ich niższą bezwzględną wartość wyznaczoną dla modelu S2 w porównaniu z modelami S3 do S5, a maksymalna różnica wyniosła 14%. W przypadku utwierdzenia, momenty podporowe na końcach płyt są wyraźnie wyższe przy zastosowaniu modelu S2 w porównaniu do modeli S3 do S5 przy maksymalnej różnicy wynoszą-

cej 13%. Analogicznie jak w przypadku podparcia przegubowego, w przypadku zastosowania modelu S2 momenty podporowe nad belką są niższe niż pozostałych modelach z uwagi na niedoszacowanie sztywności belki, a maksymalna różnica wynosi 31%.

Przechodząc do analizy wpływu sposobu modelowania na uzyskane rezultaty należy stwierdzić, że najbardziej zbliżone wyniki uzyskano przy zastosowaniu modeli S4 i S5, a więc przy uwzględnieniu mimośrodowego usytuowania belek w stosunku do płyty przy zastosowaniu automatycznej funkcji *offset* oraz przy modelowaniu wszystkich elementów jako powłoki. Dlatego też wydaje się, że wartości momentów zginających w płycie uzyskane przy zastosowaniu modeli S4 i S5 mogą być traktowane jako referencyjne. Porównując z nimi rozkłady oraz wartości momentów zginających w płycie uzyskane przy zastosowaniu modelu S3, a więc przy uwzględnieniu zwiększenia sztywności belki przez podwyższenie momentu bezwładności przekroju poprzecznego, stwierdzono poprawność zastosowanej tej metody. Według opinii autora prezentowany sposób uwzględniania rzeczywistej sztywności belki może znaleźć zastosowanie w praktycznych obliczeniach układów płytowo-belkowych, co zostało potwierdzone w trakcie jego praktyki inżynierskiej.

## 5. Podsumowanie i wnioski

Podsumowując uzyskane wyniki, można stwierdzić, że efekt sprężystej podatności podpór (belki) ujawnił się w przypadku analizowanego stropu, choć sztywność belki była znaczna w stosunku do sztywności płyty. W peł-

ni należy się więc zgodzić z postulatem, że w wielu przypadkach analizowany efekt może być pomijany dopiero przy znacznych różnicach w sztywnościach belek i płyt [1]. Efekty stwierdzone w odniesieniu do momentów podporowych w płycie w osi i na krawędzi belki będą analogiczne, co może być wykorzystane w praktyce inżynierskiej przy projektowaniu zbrojenia górnego w płycie.

Zaprezentowany sposób modelowania pracy belek przez zwiększenie momentu bezwładności przekroju poprzecznego został pozytywnie zweryfikowany w trakcie przeprowadzonej analizy. Z uwagi na jego prostotę oraz zbliżność uzyskanych wyników jest on zalecany jako alternatywa w stosunku do innych, bardziej skomplikowanych metod stosowanych w komputerowym modelowaniu pracy układów płytowo-belkowych.

Na koniec należy również zaznaczyć, że wyniki analizy zaprezentowane w artykule dotyczyły głównego kierunku pracy płyty w płaszczyźnie prostopadłej do osi belki. Kolejnym zagadnieniem wymagającym przeprowadzenia osobnych badań jest analiza pracy rozpatrywanej płyty w kierunku równoległym do osi belki, co w ujęciu aktualnie obowiązujących norm [np. 2] jest zagadnieniem nie do końca sprecyzowanym, a jednocześnie niezwykle istotnym z punktu widzenia inżynierskiego.

## BIBLIOGRAFIA

- [1] Starosolski W., Konstrukcje żelbetowe. Tom 1. PWN, Warszawa, 2006
- [2] PN-EN 1991-1-1:2004 Eurokod 1: Oddziaływania na konstrukcje – Część 1-1: Oddziaływania ogólne – Ciężar objętościowy, ciężar własny, obciążenia użytkowe w budynkach
- [3] PN-EN 1990:2004 Eurokod – Podstawy projektowania konstrukcji
- [4] Autodesk Robot Structural Analysis 2011, podręcznik użytkownika, 2011

POLSKI ZWIĄZEK INŻYNIERÓW I TECHNIKÓW BUDOWNICTWA  
POMORSKA OKRĘGOWA IZBA INŻYNIERÓW BUDOWNICTWA  
PRZY WSPÓŁPRACY POLITECHNIKI GDAŃSKIEJ I ORGANIZACJI „PRACODAWCÓW POMORZA”

ORGANIZUJĄ W DNIU 24 STYCZNIA 2013 ROKU W GDAŃSKU

## SYMPOZJUM

# BUDOWA TUNELU DROGOWEGO POD MARTWĄ WISŁĄ

## HONOROWY PATRONAT

MINISTERSTWO TRANSPORTU, BUDOWNICTWA I GOSPODARKI MORSKIEJ

## MIEJSCE SYMPOZJUM

MIĘDZYNARODOWE TARGI GDAŃSKIE S.A.  
CENTRUM WYSTAWIENNICZO-KONGRESOWE AMBER EXPO, GDAŃSK, UL. ŻAGŁOWA 11

UDZIAŁ W SYMPOZJUM JEST BEZPŁATNY.

WSTĘP WYŁĄCZNIE ZA POTWIERDZENIEM ORGANIZATORA NA PODSTAWIE ZGŁOSZENIA  
WYSŁANEGO NA ADRES BIURA ORGANIZACYJNEGO DO DNIA 10 GRUDNIA 2012 R.  
FORMULARZ ZGŁOSZENIA ORAZ PROGRAM SYMPOZJUM NA STRONACH INTERNETOWYCH ORGANIZATORÓW.

W dniu 25 stycznia 2013 r. w godz. 10.00–12.00 istnieje możliwość WIZYTY NA PLACU BUDOWY.

Osoby zainteresowane zobowiązane są zaznaczyć ten fakt na zgłoszeniu jak również pokrywać koszt noclegu z 24/25 stycznia 2013 r.

BIURO ORGANIZACYJNE: POMORSKA OKRĘGOWA IZBA INŻYNIERÓW BUDOWNICTWA  
UL. ŚWIĘTOJAŃSKA 43/44, 80-840 GDAŃSK, faks 58/301-44-98, e-mail: szkolenia@pom.piib.org.pl, www.pom.piib.org.pl