

# Zagrożenia obiektów budowlanych wynikające z powstania drgań o charakterze rezonansowym

Dr hab. inż. Jakub Marcinowski, Uniwersytet Zielonogórski

## 1. Wprowadzenie

Zjawisko wzbudzonych drgań o charakterze rezonansowym nie występuje zbyt często i w tym tkwi być może główna przyczyna dość nonszalanckiego podejścia projektantów do projektów, w których obciążenia dynamiczne są obciążeniami dominującymi. Bywa, że zalecenia technologów wpływają uspokajająco na projektantów. Nic nie zwalnia ich jednak od takiego zaprojektowania konstrukcji, by efekty dynamiczne nie doprowadziły do przekroczenia stanów granicznych nośności i użytkowania. Efekt dynamiczny, który bezwzględnie musi być wyeliminowany, to wzbudzenia o charakterze rezonansowym. Przed rezonansem ostrzegają autorzy klasycznych podręczników dotyczących projektowania konstrukcji obciążonych dynamicznie (por. [1], [2], [3]). Stosowne zapisy pojawiają się w wielu normach i zaleceniach projektowych. Część z nich zamieszczono na końcu referatu. Wszystkie te zapisy mają cel nadrzędny: wyeliminowanie wzbudzeń o charakterze rezonansowym.

Warto pokrótce sformułować warunki, w jakich dochodzi do drgań o charakterze rezonansowym w obiekcie poddanym działaniu obciążeń dynamicznych:

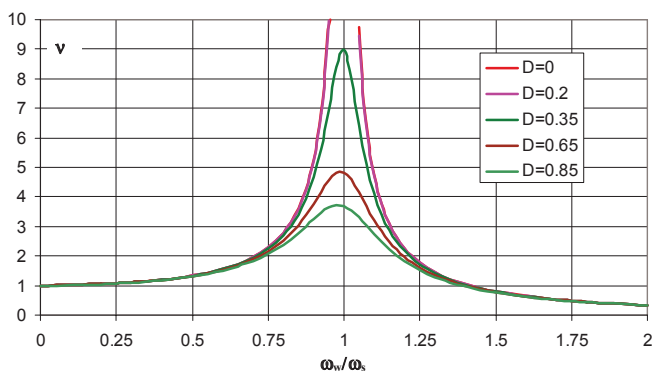
1. Obciążenie dynamiczne posiada charakter harmoniczny o częstotliwości  $\omega_w$  ustalonej lub zmiennej w czasie.
2. Wartości obciążeń dynamicznych są na tyle duże, że wywołują mierzalne wartości przemieszczeń.
3. Częstotliwość pierwszej lub kolejnych form drgań swobodnych  $\omega_{si}$  konstrukcji choć w krótkim przedziale czasu jest równa lub bliska wartości częstotliwości wymuszeń  $\omega_w$ .
4. Tłumienie własne układu konstrukcyjnego jest niewystarczające, by zapobiec rozwojowi drgań o charakterze rezonansowym nawet w trakcie krótkotrwałej zgodności  $\omega_w \approx \omega_{si}$ .

Z wymienionych wyżej warunków wynika jasno, że nie dojdzie do rezonansu, jeśli żadna z częstotliwości  $\omega_{si}$  nie będzie równa częstotliwości wymuszeń  $\omega_w$ . Aby nie dochodziło do rezonansu przejściowego, konstruktor powinien zadbać o to, by wszystkie  $\omega_{si}$  były większe od  $\omega_w$ , mamy wtedy

idealną sytuację tzw. strojenia wysokiego [1]. Strojenie niskie (sytuacja gdy  $\omega_{si} < \omega_w$ ) jest dopuszczalne tylko wtedy, gdy częstotliwość  $\omega_w$  jest osiągnięta na tyle szybko, że podczas chwilowych zgodności  $\omega_{si} = \omega_w$  nie dojdzie do rozwoju rezonansu. Drastyczny wzrost drgań wywołanych wzbudzeniem rezonansowym dobrze ilustruje rozwiązanie analityczne dla układu tłumionego o jednym stopniu swobody przedstawione w pracach [1] i [2] i przytoczone poniżej. Miarą wzrostu przemieszczeń jest współczynnik dynamiczny  $v$  definiowany jako iloraz amplitudy drgań wywołanych harmoniczną siłą wymuszającą do przemieszczenia wywołanego tą samą siłą przyłożoną statycznie:

$$v = \frac{a}{f} = \frac{\omega_s^2}{\sqrt{(\omega_s^2 - \omega_w^2)^2 + \frac{D^2 \omega_s^2}{\pi^2} \omega_w^2}} = \frac{1}{\sqrt{\left[1 - \frac{\omega_w^2}{\omega_s^2}\right]^2 + \frac{D^2}{\pi^2} \frac{\omega_w^2}{\omega_s^2}}} \quad (1.1)$$

gdzie:  $a$  – amplituda drgań wywołana harmoniczną siłą wymuszającą,  $f$  – przemieszczenie wywołane tą samą siłą przyłożoną statycznie,  $\omega_s$  – częstotliwość drgań swobodnych układu,  $\omega_w$  – częstotliwość wymuszeń drgań swobodnych układu,  $D$  – parametr tłumienia równy w przybliżeniu logarytmicznemu dekrementowi tłumienia (por. [1], [2]). Rozkład współczynnika dynamicznego  $v$  w funkcji ilorazu  $\omega_w/\omega_s$  pokazano na rysunku 1 dla różnych wartości



**Rys. 1.**  
Zjawisko rezonansu układu z tłumieniem



**Rys. 2.** Zespół mieszalników na stropie stalowym



**Rys. 3.** Elementy konstrukcyjne stropu – stan pierwotny



**Rys. 4.** Przestrzeń pod analizowanym stropem. Stan pierwotny



**Rys. 5.** Dodatkowe dwa słupy wzmacniające strop

parametru tłumienia  $D$ . Wykres ten pokazuje dobitnie jak znaczące wartości przemieszczeń pojawią się gdy  $\omega_w/\omega_s$  będzie bliskie jedności. W przypadku prętowych konstrukcji stalowych logarytmiczny dekrement tłumienia wynosi około 0,08. Gdyby przy tym poziomie tłumienia dopuścić zrównanie  $\omega_w$  i  $\omega_s$ , współczynnik dynamiczny  $v$  osiągnąłby wartość aż 39,4. Skutki takiego wzrostu przemieszczeń dają się łatwo przewidzieć. W referacie zaprezentowano dwa przypadki wzbudzeń o charakterze rezonansowym, z którymi autor zetknął się w swej praktyce inżynierskiej. Zostanie zaprezentowana zarówno diagnoza, jak i sposób takiego przestrojenia konstrukcji, by drgania o charakterze rezonansowym wyeliminować całkowicie.

## 2. Stalowa konstrukcja stropu pod zespół wirówek

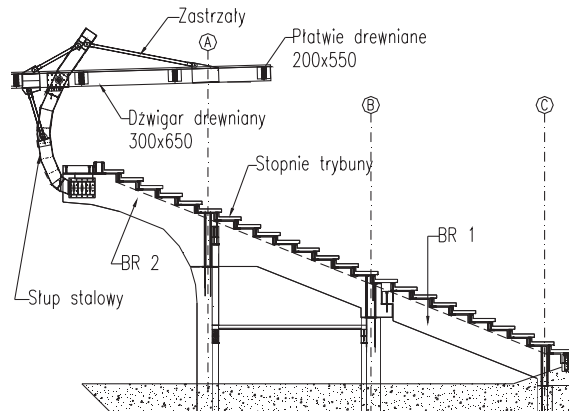
Jako pierwszy przykład obiektu, w którym wystąpiły drgania o charakterze rezonansowym rozpatrzmy stalową halę przemysłową, zaprojektowaną i wykonaną na potrzeby ciągu technologicznego związanego z produkcją elementów ekstrudowanych z tworzyw sztucznych. Hala jest halą typu lekkiego i została zaprojektowana jako dobudowa do istniejących, ceglanych obiektów zakładowych. Na główny ustrój nośny hali składają się słupy, belki oraz kratownicowe więzary dachowe. Stropy

wykonano w układzie słupów, podciągów i belek (rodzaj rusztu belkowego) pokrytych kratą pomostową (krata Wema). Maszyny stanowiące główne źródło drgań mechanicznych zlokalizowano na ruszcie stalowym na wysokości 4,5 m nad posadzką (por. rys. 2). Jest to zespół mieszalników (gorącego i zimnego) w jednej, zwartej obudowie. Każdy z nich jest napędzany niezależnym silnikiem elektrycznym (por. rys. 2 i 3). Mieszalnik zimny wiruje poziomo (oś obrotu równoległa do płaszczyzny stropu i prostopadła do belek podpierających), natomiast mieszalnik gorący – pionowo (oś obrotu prostopadła do płaszczyzny stropu). Prędkość wirowania mieszalnika zimnego jest stała i wynosi 750 obr./min. (12,5 Hz). Mieszalnik gorący wiruje z prędkością zmienną od 59 do 590 obr./min. (0,983÷9,83 Hz). Całkowita masa zespołu mieszalników wynosi 7700 kg. Zespół obu mieszalników jest głównym źródłem drgań tego fragmentu konstrukcji hali. Na podstawie załącznika 1 Normy PN-80/B-03040 zaklasyfikowano te maszyny do III kategorii dynamicznej. Mamy bowiem do czynienia z maszynami wirującymi z pojemnikiem wypełnionym masą większą niż 100 kg i mniejszą niż 300 kg. Dla pewnych materiałów (granulaty ciężkie) masa ta może przekroczyć nawet 300 kg. W tych przypadkach kategoria dynamiczna wzrasta do IV, czyli jest najwyższa. Jest to równoznaczne z dużą





Rys. 6. Widok ogólny trybuny



Rys. 7. Przekrój konstrukcji trybuny

dynamicznością maszyny lub nawet bardzo dużą w przypadku kategorii IV (por. Załącznik 1 Normy PN-80/B-03040).

Wykonano numeryczne analizy dynamiczne w zakresie częstotliwości i form drgań swobodnych konstrukcji stropu [4]. W wyniku obliczeń otrzymano widmo częstotliwości drgań swobodnych pokazane w tabeli 1. W zakresie 1 ÷ 12 Hz występowało aż pięć form drgań swobodnych stropu. Oczywiście jest, że musiało dochodzić do wzbudzeń rezonansowych. Obserwowane drgania były tak duże, że wywoływały wręcz panikę wśród pracowników. Zaproponowane modyfikacje konstrukcyjne przedstawiono szczegółowo w pracy [5]. Najskuteczniejszym rozwiązaniem korygującym formę i częstotliwość drgań swobodnych stropu okazało się wprowadzenie słupów podpierających belki stropowe niemal dokładnie pod wirówkami (por. rys. 4 i 5). Po wprowadzeniu wszystkich modyfikacji, widmo drgań swobodnych elementów stropu zostało radykalnie zmienione. Dwie pierwsze formy drgań dotychczas lokalnych drgań tężników krzyżowych ( $f_1=14,45$  Hz,  $f_2=15,61$  Hz). Forma trzecia jest pierwszą formą

drgań całego stropu, a odpowiadająca jej częstotliwość jest równa  $f = 19,38$  Hz. Wobec maksymalnej częstotliwości wymuszającej 9,83 Hz, drgania stropu nie wystąpią.

Po zaproponowanych modyfikacjach konstrukcyjnych konstrukcja wsporcza pod maszyny spełnia warunki strojenia wysokiego. Ani w fazie rozruchu, ani w fazie eksploatacji nie dojdzie do wzbudzania drgań o charakterze rezonansowym. Strop zachowuje się bardzo stabilnie we wszystkich fazach pracy mieszalników i dla wszystkich stosowanych granulatów.

### 3. Zadaszenie trybuny stadionu

Kolejnym przykładem obiektu, w którym wystąpiły drgania o charakterze rezonansowym jest konstrukcja zadaszenia trybuny stadionu (por. rys. 6 i 7). W tym przypadku źródłem drgań wymuszonych były miarowe podskoki kibiców zgromadzonych na trybunach.

Pierwsza, dominująca forma drgań swobodnych zadaszenia trybuny, wyznaczona drogą analizy numerycznej oraz potwierdzona w próbach wzbudzeń (por. [5]), charakteryzuje się częstotliwością 2,45 Hz (por. rys. 8),

podczas gdy częstotliwość wymuszeń (miarowe podskoki kibiców) wynosiła około 2,2 ÷ 2,3 Hz.

Zbliżone wartości tych częstotliwości były przyczyną wzbudzeń o charakterze rezonansowym. Zarejestrowane w trakcie pomiarów przebiegi drgań wyraźnie narastające w trakcie trwania zabawy kibiców oraz obserwacje drgań zadaszenia utrwalone na nagraniach filmowych wskazują na ewidentnie rezonansowy charakter wzbudzeń.

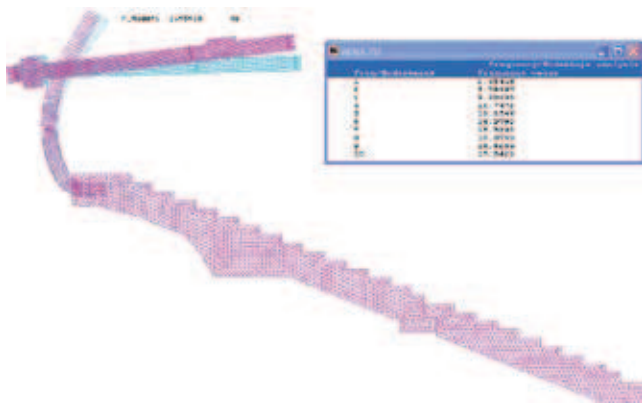
I w tym przypadku zaszła konieczność przestrojenia układu konstrukcyjnego w taki sposób, by najniższa częstotliwość drgań swobodnych zadaszenia była znacząco większa od częstotliwości wymuszeń. W ten sposób zostanie osiągnięty najbardziej pożądaný stan, stan tzw. strojenia wysokiego [1].

Po przeanalizowaniu wielu możliwych rozwiązań wybrano koncepcję przestrojenia dynamicznego konstrukcji zadaszenia polegającą na podparciu dźwigara drewnianego słupem stalowym o przekroju rurowym 159 × 10 mm, w taki sposób by słup nie przesłaniał widoczności kibicom znajdującym się na trybunie. Koncepcję tę pokazano na rysunku 9. Wykonane analizy numeryczne wykazały, że rozwiązanie to prowadzi do takiego przesunięcia widma częstotliwości drgań swobodnych, że pierwszej formie odpowiadać będzie częstotliwość 5,31 Hz (por. rys. 10).

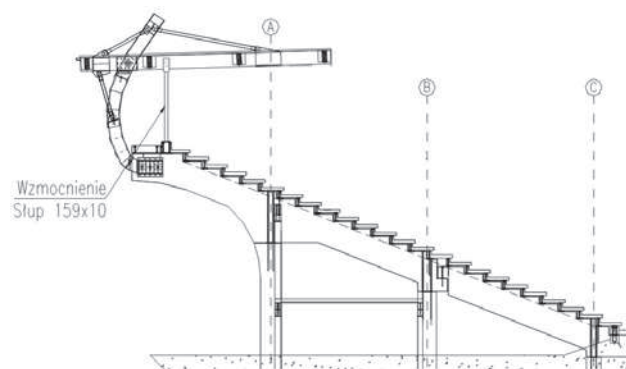
Wykonano wzmocnienie wszystkich ram całej trybuny. Jeden sektor poddano badaniom (por. [5]), które po-

Tabela 1. Częstotliwości drgań swobodnych

Lp.	$f_{si}$ [Hz]	Uwagi
1	5,10933	forma suwna w jednym kierunku
2	7,79998	forma suwna w drugim kierunku
3	9,10025	drgania tężnika krzyżowego
4	10,3464	drgania skrętne
5	12,3391	lokalne drgania tężnika



Rys. 8. Pierwsza forma drgań swobodnych



Rys. 9. Koncepcja wzmocnienia

twierdziły występowanie pierwszej częstotliwości na poziomie 5,5 Hz. Efekt przestrojenia został osiągnięty, a konstrukcja została doprowadzona do stanu strojenia wysokiego.

#### 4. Uwagi końcowe

Najbardziej efektywnym sposobem uniknięcia drgań o charakterze rezonansowym jest takie zaprojektowanie konstrukcji, by w każdych okolicznościach wymuszeń dynamicznych występował wyłącznie stan strojenia wysokiego. W tym celu, w fazie projektowania, poza analizą statyczną należy wykonać numeryczną analizę dynamiczną w zakresie częstotliwości i form drgań swobodnych. Nie jest to czynność przerastająca możliwości projektanta, który przygotował już model numeryczny na potrzeby analizy statycznej, pod warunkiem, że program, którym dysponuje jest

w stanie wykonać także analizę dynamiczną w zakresie częstotliwości i form drgań swobodnych. Przygotowując dane do tych obliczeń należy pamiętać o wszystkich masach, które wraz z elementami konstrukcji będą uczestniczyły w drganiach. Należy je wprowadzić do modelu jako masy skupione zlokalizowane w środku ciężkości maszyny czy zgromadzonego materiału. W przypadku mas rozłożonych (np. niekonstrukcyjne warstwy stropów i ścian) należy je wprowadzić do modelu w sposób możliwie dokładnie oddający ich położenie.

Ważnym parametrem modelu dynamicznego jest podatność podłoża. Należy ją przyjąć zgodnie ze stanem faktycznym (jeśli parametry geotechniczne są znane) lub przyjąć wartości zaniżone gwarantujące, że otrzymane z obliczeń częstotliwości będą niższe od faktycznych.

Projektowanie pod kątem dynamicznym, tzw. strojenie układu, można uznać za zakończone, gdy najniższa częstotliwość drgań swobodnych  $\omega_{smin}$  projektowanego układu konstrukcyjnego osiągnie wartość rzędu  $(1,2 \div 1,3) \omega_w$ , gdzie  $\omega_w$  to częstotliwość drgań wymuszonych.

Przedstawione postępowanie, którego istotnym elementem jest analiza dynamiczna o wspomnianym zakresie, daje pełną gwarancję uniknięcia wzbudzeń o charakterze rezonansowym.

#### BIBLIOGRAFIA

- [1] Kisiel I., Dynamika fundamentów pod maszyny, PWN, Warszawa 1957
- [2] Timoshenko S., Young D. H., Advanced dynamics, McGraw-Hill, 1948
- [3] Lipiński J., Fundamenty pod maszyny, Arkady, Warszawa, 1985
- [4] Marcinowski J., Błędne rozwiązanie konstrukcyjne stalowego stropu pod maszyny wirujące, Przegląd Budowlany, Nr 5/2010, str. 94 ÷ 96
- [5] Błażejewski P., Marcinowski J., Modyfikacje konstrukcyjne zadania stadionu redukujące drgania o charakterze rezonansowym, Zeszyty Naukowe Politechniki Rzeszowskiej, Budownictwo i Inżynieria Środowiska, Z. 58 (3/11/II), Nr 276, 2011 str. 209 ÷ 216

#### WYKORZYSTANE MATERIAŁY

- [1] PN-90/B-03200. Konstrukcje stalowe. Obliczenia statyczne i projektowanie
- [6] PN-80/B-03040. Fundamenty i konstrukcje wsporcze pod maszyny. Obliczenia i projektowanie
- [7] PN-76/B-03001. Konstrukcje i podłoża budowli. Ogólne zasady obliczeń
- [8] PN-EN 1990:2004. Podstawy projektowania konstrukcji
- [9] PN-EN 1991-1-1:2004. Oddziaływania na konstrukcje. Oddziaływania ogólne, ciężar objętościowy, ciężar własny, obciążenia użytkowe w budynkach



Rys. 10. Pierwsza forma drgań swobodnych układu wzmocnionego