

Analiza współpracy żelbetowych silosów cylindrycznych z podłożem

(z uwzględnieniem parcia wywołanego spadkiem temperatury zewnętrznej)

Prof. nadzw. dr hab. inż. Paweł M. Lewiński, Instytut Techniki Budowlanej, Warszawa

1. Wprowadzenie

Rozkład oddziaływania płyty fundamentowej silosu na podłoże ma duży wpływ na zachowanie się nie tylko samej płyty, ale i współpracującej z nią konstrukcji powłokowej. W niniejszej pracy do analizy silosów cylindrycznych o ściankach utwierdzonych w kołowej płycie dennej do opisu podłoża wykorzystano modele Winklera i półprzestrzeni sprężystej, stosując podejście Gorbunowa-Posadowa [1]. Oprócz obciążenia materiałem sypkim, przeanalizowano efekt parcia wywołanego spadkiem temperatury zewnętrznej. Przedstawiono przykład ukazujący w jaki sposób przyjęcie podłoża jako półprzestrzeni sprężystej prowadzi do zmian w układzie sił wewnętrznych w silosie w porównaniu z modelem Winklera. Wykresy opisujące zachowanie się układu konstrukcja – podłoże, otrzymane przy założeniu półprzestrzeni sprężystej, porównano z wynikami dla dwuparametrowego modelu Winklera, uzyskując ich rozbieżność dla rozpatrywanych obciążeń.

2. Analiza półprzestrzeni sprężystej obciążonej naciskiem płyty dennej

Oddziaływania interakcyjne płyty fundamentowej na podłoże można rozpatrywać wykorzystując modele podłoża, takie jak model Winklera, modele wieloparametrowe oraz hipoteza półprzestrzeni sprężystej. Problemy te były i są analizowane w wielu publikacjach, jednak co się tyczy modelu półprzestrzeni, zastosowanego również w niniejszej pracy, jego aplikacje oparte były na pracach takich autorów, jak M. I. Gorbunow-Posadow [1], a w Polsce – H. Kalisz [2]. Niezbędne jest jednak badanie dokładności i regularności rozwiązań względem tych wielkości fizycznych, które są kluczowe w opisie zachowania się układu. We wcześniejszych pracach tego rodzaju rozważań brakowało, gdyż, jak dowiodły analizy przeprowadzone przez autora niniejszej pracy [3–6], w celu uzyskania prawidłowej zbieżności rozwiązania w zakresie nie tylko przemieszczeń, ale i sił wewnętrznych, konieczne jest wykorzystanie szeregu potęgowego o co najmniej stu wyrazach, a nie jak we wcześniejszych pracach – np. ośmiu. Przyjmu-

jąc model półprzestrzeni sprężystej, założono, że obszar kontaktu płyty dennej i gruntu jest doskonale gładki. Ośrodki te ściśle do siebie przylegają. W przypadku półprzestrzeni sprężystej i izotropowej, obciążonej na pewnym obszarze powierzchni ograniczającej w sposób do niej prostopadły, w celu uzyskania rozwiązania wykorzystuje się jako powierzchnię wpływu (funkcję Greena) rozwiązanie od obciążenia dowolnie położoną siłą skupioną. W takim przypadku korzysta się ze znanego rozwiązania V. J. Boussinesq'a. Rozpatrując przypadek obciążenia półprzestrzeni sprężystej naciskiem przekazywanym przez płytę kołową w sposób do niej prostopadły zakładamy, że działa na nią obciążenie obrotowo-symetryczne $p(r)$ – jest to równocześnie funkcja opisująca reakcję półprzestrzeni na płytę kołową. Wprowadźmy zmienne bezwymiarowe ρ oraz $\bar{\rho}$:

ρ – sprowadzona odległość od środka płyty do punktu powierzchni gruntu, którego przemieszczenie określa się ($\rho = r/R$, gdzie r – odległość rzeczywista, R – promień płyty),

$\bar{\rho}$ – sprowadzona odległość od środka płyty do elementu obciążenia.

Osiadanie powierzchni gruntu (sprężystej półprzestrzeni) $w(\rho)$ obciążonej naciskiem $p(\rho)$ przekazywanym przez płytę wyrażamy następująco (χ – dowolny parametr całkowania):

$$w(\rho) = \frac{4(1-\nu_0^2)R}{\pi E_0} \left[\frac{1}{\rho} \int_0^\rho p(\bar{\rho}) \bar{\rho} \int_0^{\pi/2} \frac{d\chi}{\sqrt{1 - \left(\frac{\bar{\rho}}{\rho}\right)^2 \sin^2 \chi}} d\bar{\rho} + \int_\rho^{a/R} p(\bar{\rho}) \int_0^{\pi/2} \frac{d\chi}{\sqrt{1 - \left(\frac{\rho}{\bar{\rho}}\right)^2 \sin^2 \chi}} d\bar{\rho} \right] \quad (1.1)$$

W przypadku, gdy płyta jest obciążona na całej swojej powierzchni, górna granica całkowania w całce zewnętrznej występującej w drugim składniku sumy, wynosi 1 ($a=R$). Wyprowadzenia tego wzoru można dokonać kilkoma sposobami, jeden z nich podano w pracy [5].

3. Osiowo-symetryczne zginanie płyty na sprężystym podłożu

Równanie różniczkowe powierzchni ugięcia płyty kołowej na półprzestrzeni sprężystej poddanej obciążeniu q , równomiernie rozłożonemu na powierzchni koła o promieniu a , przy wprowadzeniu zmiennych bezwymiarowych ρ oraz $\bar{\rho}$, w układzie współrzędnych biegunowych ma postać równania biharmonicznego, przy czym od obciążenia q po prawej stronie równania odejmujemy funkcję $p(\rho)$ opisującą interakcję między płytą i półprzestrzenią sprężystą. Funkcję tę postuluje się w postaci nieskończonego szeregu potęgowego, co prowadzi do rozwiązania formalnie ścisłego. W celu wyznaczenia tych ugięć zakłada się, że przemieszczenia powierzchni półprzestrzennej sprężystej i płyty muszą być tożsamościowo zgodne: $w(\rho) = w(\rho)$. W celu znalezienia całki równania biharmonicznego, rozpatrujemy najpierw równanie jednorodne, którego rozwiązanie stanowi funkcja:

$$w_o = C_1 \rho^2 \ln \rho + C_2 \rho^2 + C_3 \ln \rho + C_4 \quad (2.1)$$

gdzie C_i , $i=1...4$ – stałe całkowania. Całki szczególnej równania biharmonicznego poszukujemy w postaci:

$$w_s = \sum_{n=2}^{\infty} A_{2n} \rho^{2n} \quad (2.2)$$

Współczynniki A_{2n} można wyrazić poprzez składniki a_{2n} szeregu opisującego $p(\rho)$ za pomocą podstawienia tego szeregu do równania przemieszczeniowego i porównania wyrazów o jednakowych potęgach. Pełne rozwiązanie otrzymuje się dodając całkę szczególną do (2.1). Ostatecznie, ugięcie płyty w obszarze działania obciążenia q (indeks l – w obszarze płyty) wyraża się wzorem:

$$w_l = C_{1,l} \rho^2 \ln \rho + C_{2,l} \rho^2 + C_{3,l} \ln \rho + C_{4,l} + \frac{R^4}{64D} (q - a_0) \rho^4 - \frac{R^4}{16D} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{2n}}{(n+2)^2 (n+1)^2} \rho^{2n+4} \quad (2.3)$$

Stałe $C_1 \div C_4$ wyznacza się z warunków w środku i na brzegach płyty. Do obliczeń porównawczych wykorzystano model płyty dennej na dwuparametrowym podłożu Winklera.

4. Parcie wywołane spadkiem zewnętrznej temperatury atmosferycznej

W przypadku, gdy zewnętrzna temperatura otoczenia może się znacząco obniżyć w krótkim czasie, w projekcie należy uwzględnić parcie wywołane termicznym skróceniem powłoki zewnętrznej silosu w stosunku do masy składowanego ośrodka sypkiego, dość mało podatnego na zmiany temperatury. W silosach o kolistym kształcie rzutu należy przyjąć dodatkowe

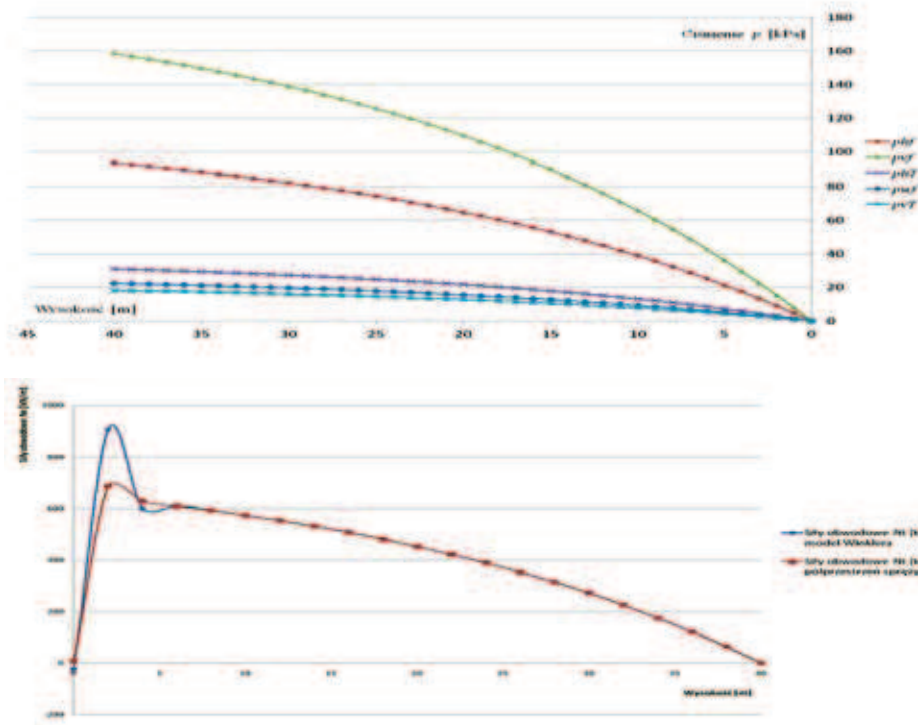
parcie normalne ρ_{hT} działające na pionową ścianę silosu, powstające przy ochłodzeniu zbiornika w odniesieniu do temperatury składowanego ośrodka. Dodatkowe parcie na dowolnym poziomie w silosie należy określać jako: ρ_{hT} wg PN-EN 1991-4:2008 [1], p. 5.6.2. Oszacowania efektywnego modułu sprężystości ośrodka \square_{SU} przy odciążeniu na poziomie z należy dokonać z uwzględnieniem parcia pionowego p_{vT} w ośrodku sypkim na tym poziomie, po napełnieniu. Efektywny moduł sprężystości przy odciążeniu \square_{SU} można określać według metody opisanej w załączniku C.10 do normy PN-EN 1991-4:2008 [1]. Efektywny moduł sprężystości przy odciążeniu został tu oszacowany na podstawie gęstości ośrodka, współczynnik temperatury przyjęto równy $C_T = 3$. Efektywny moduł sprężystości ośrodka można obliczać wg C.10.2 jako iloczyn współczynnika kalibracyjnego i parcia pionowego w ośrodku sypkim u podstawy odcinka ściany (por. wzór (5.3) wg [1]). Norma PN-EN 1991-4:2008 [1], określając parcie poziome ρ_{hT} wywołane spadkiem zewnętrznej temperatury atmosferycznej, pomija jednak parcie pionowe ρ_{vT} , spowodowane tą samą przyczyną. Nawet intuicyjnie wydaje się oczywiste, że skurcz cylindrycznych ścian zbiornika względem składowanego ośrodka sypkiego musi wywołać obustronne wypychanie tego ośrodka na zewnątrz cylindra. Jednak stosunek parcia poziomego ρ_{hT} do parcia pionowego ρ_{vT} w tym przypadku będzie odwrotny niż w przypadku parcia poziomego ρ_{hT} . Tu oddziaływaniem zewnętrznym jest temperatura otoczenia i parcie to (ρ_{hT}) ma kierunek poziomy, a zatem parciem bocznym staje się tu parcie pionowe, które w przybliżeniu można obliczyć ze wzoru:

$$p_{vT} = K p_{hT} \quad (3.1)$$

gdzie K – to iloraz parcia bocznego określony według p. 4.3.5 normy PN-EN 1991-4:2008 [1].

5. Zginanie obrotowo-symetryczne powłoki walcowej

Do analizy współpracy z podłożem sprężystym konstrukcji silosu obciążonego obrotowo-symetrycznie parciem typu Janssena według p. 5.2.1. normy PN-EN 1991-4:2008 [1] zastosowano teorię zaburzeń brzegowych i schemat statycznie niewyznaczalny korzystając się ze sformułowania metody sił. Wpływ sztywności płyty i powłoki uwzględniono poprzez narzucenie warunków zgodności: przemieszczenia radialnego i kąta obrotu wzdłuż krawędzi zespolenia płyty i ścianki silosu. W zagadnieniu zginania powłoki walcowej wykorzystano równanie określające całkę szczególną równania przemieszczeniowego powłoki w przypadku parcia typu Janssena według monografii [7]. Przeanalizowano zachowanie się powłoki w stanie bezmomentowym poddanej działaniu tego typu parcia, wyznaczając przemieszczenia i obroty krawędziowe. Ugięcia płyty kołowej oraz zgi-



Rys. 1.
Rozkłady oddziaływań w powłoce silosu

Rys. 2.
Rozkłady siły obwodowej w ścianie silosu od parcia poziomego p_{Hf} dla modelu podłoża w postaci półprzestrzeni sprężystej i dwuparametrowego modelu Winklera

nianie powłoki walcowej są opisane w ramach teorii cienkich dźwigarów powierzchniowych równaniami różniczkowymi czwartego rzędu. W celu rozwiązania takiego zadania należy sformułować 4 warunki brzegowe. W przypadku płyty kołowej spoczywającej na podłożu sprężystym, 2. spośród 4 stałych całkowania eliminuje się z powodu niezgodności fizycznych w środku płyty. Na tej podstawie sformułowano i rozwiązano układ równań kanonicznych metody sił, wyznaczając niewiadome i obliczając siły wewnętrzne z superpozycji.

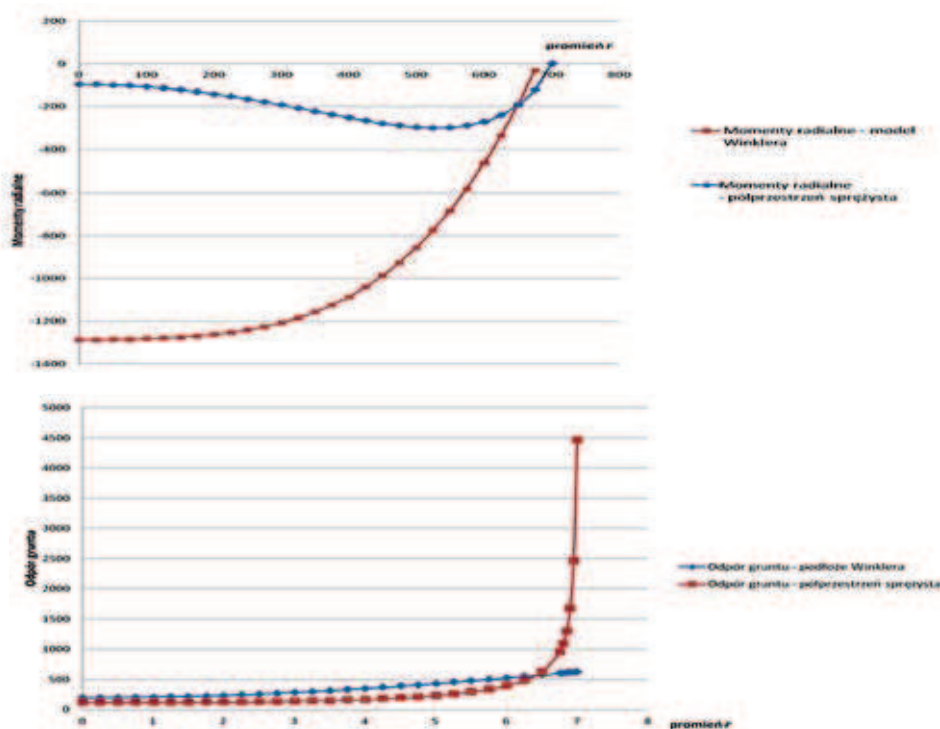
6. Przykład obliczeniowy

Obliczenia i wykresy wykonano uwzględniając $N = 100$ pierwszych wyrazów funkcji interakcji płyty z podłożem. Założenie to gwarantuje dużą dokładność wyników. Założono, że silos jest konstrukcją monolityczną wykonaną z betonu. Do obliczeń przyjęto następujące dane: moduł sprężystości betonu: $E_c = 31\ 000$ MPa, współczynnik Poissona be-

tonu: $\nu_c = 0,2$, moduł sprężystości gruntu – półprzestrzeni sprężystej: $E_0 = 280$ MPa, współczynnik Poissona gruntu – półprzestrzeni sprężystej: $\nu_0 = 0,3$, współczynnik podatności pionowej podłoża Winklera $K_z = 25\ 000$ kN/m³, współczynnik podatności poziomej $K_t = 5\ 000$ kN/m³. Grubość ścianki cylindrycznej: $h = 20$ cm, grubość płyty kołowej dna: $h_0 = 80$ cm, ciężar właściwy betonu $\gamma_c = 24$ kN/m³, współczynnik rozszerzalności liniowej $\alpha_t = \alpha_w = 1 \cdot 10^{-5}$ 1/K. Przyjęto $\Delta T = 30$ K, $C_T = 3$. Powłoka: promień $R = 7,0$ m, wysokość $H = 40$ m. Obciążenie; parcie zboża: ciężar właściwy $\gamma_z = 8$ kN/m³, współczynnik parcia bocznego $K = 0,59$, współczynnik tarcia zboża o pionową ścianę silosu $\mu = 0,24$. Sporządzono wykresy wielkości statycznych i geometrycznych. Wyznaczono także funkcje odporu gruntu. Otrzymane wyniki porównano z rozwiązaniem zadania silosu walcowego spoczywającego na dwuparametrowym podłożu Winklera (rysunki 1÷5). Wyniki uzyskane dla powłoki ukazano w układzie współrzędnych o początku w górnej krawędzi cylindra.



Rys. 3.
Rozkład momentu południkowego w ścianie silosu od parcia poziomego p_{Hf} dla modelu podłoża w postaci półprzestrzeni sprężystej i dwuparametrowego modelu Winklera



Rys. 4.
Rozkład momentu radialnego w płycie silosu dla podłoża jako półprzestrzeni sprężystej i dwuparametrowego modelu Winklera

Rys. 5.
Rozkład oporu gruntu pod silosem dla modelu podłoża w postaci półprzestrzeni sprężystej i dwuparametrowego modelu Winklera

7. Analiza wyników i wnioski

Wyniki ugięć płyty uzyskane w ramach obu modeli podłoża różnią się w sposób istotny. Przy zastosowaniu modelu półprzestrzeni sprężystej momenty w otoczeniu środka płyty są znacznie mniejsze (rys. 4). Płyta posadowiona na półprzestrzeni sprężystej jest zginana od obciążenia ciągłego i sił krawędziowych, które wzajemnie się znoszą i płyta osiada prawie równomiernie, podczas gdy ta sama konstrukcja na podłożu Winklera jest zginana tylko od sił krawędziowych, co przejawia się większymi bezwzględными wartościami momentów na styku z powłoką cylindryczną. W przypadku modelu półprzestrzeni sprężystej, można zaobserwować miejscowy nieograniczony wzrost reakcji podłoża wokół obwodu płyty, w przeciwieństwie do modelu Winklera. Brak zbieżności funkcji oporu gruntu na obwodzie płyty jest uzasadniony w ramach teorii sprężystości (rys. 5). W rzeczywistości wystąpi lokalne uplastycznienie podłoża (por. [5], [6]). Większe wartości maksymalnego przemieszczenia radialnego powłoki są generowane w powłoce silosu spoczywającego na podłożu Winklera. Odcięta największego ugięcia powłoki silosu na podłożu Winklera jest o 1/3 większa niż powłoki silosu na półprzestrzeni sprężystej. To samo zjawisko obserwuje się w odniesieniu do siły obwodowej (rys. 2). Różnice w momentach zamocowania powłoki (rys. 3) wynikają z odmiennego zachowania się płyty dennej, jak opisano powyżej. Jak wynika z analizy zbiorników na ciecz w zakresie sprężysto-plastycznym (por. [5], [6]), rzeczywiste zachowanie się płyty i powłoki najczęściej zawiera się pomiędzy rezultatami otrzymywanymi dla obu rozpatrywanych modeli podłoża sprężystego.

Wykonane obliczenia i ich analiza wykazują, że w projektowaniu silosów cylindrycznych należy uwzględnić parcie wywołane spadkiem zewnętrznej temperatury atmosferycznej, jako dość istotne (rys. 1). W rozpatrywanym przykładzie parcie poziome wywołane spadkiem zewnętrznej temperatury atmosferycznej zwiększa wartość parcia pionowego opisanego w p. 5.2 normy [1] o 1/3, a wartość parcia pionowego o 11,5%, co proporcjonalnie zwiększa wyężenie konstrukcji.

BIBLIOGRAFIA

- [1] Gorbunow-Posadow M. I., Obliczanie konstrukcji na podłożu sprężystym, Budownictwo i architektura, Warszawa 1956
- [2] Kalisz H., Wpływ sprężystego podłoża gruntowego na konstrukcję zbiornika walcowego, Praca doktorska, Wydział Inżynierii Lądowej Politechniki Warszawskiej, 1977 r.
- [3] Lewiński P. M., Nieliniowa analiza osiowo-symetrycznych żelbetowych konstrukcji powłokowych i ich interakcja z podłożem, Prace Naukowe Politechniki Warszawskiej, Budownictwo, z. 131, Oficyna Wydawnicza PW, Warszawa 1996, s. 73–115
- [4] Lewiński P. M., Współpraca zbiorników cylindrycznych o stałej i zmiennej grubości ścianki z podłożem sprężystym, XII Konferencja Naukowo-Techniczna „Żelbetowe i sprężone zbiorniki na materiały sypkie i ciecz”, Kraków, 19–21 listopada 2003, s. 123–130
- [5] Lewiński P. M., Analiza współpracy żelbetowych zbiorników cylindrycznych z podłożem, Prace Naukowe Instytutu Techniki Budowlanej, Rozprawy, Wydawnictwa ITB, Warszawa 2007
- [6] Lewiński P. M., Analiza parametryczna MES wzajemnego oddziaływania żelbetowych zbiorników cylindrycznych z podłożem, XIII Konferencja „Żelbetowe i sprężone zbiorniki na materiały sypkie i ciecz”, ref. nr 39, Szklarska Poręba-Wrocław, 26–29.09.2007 r., CR ROM
- [7] Nowacki W., Dąbrowski R., Silosy. Metody obliczeń konstrukcji, PWT, Warszawa 1953

WYKORZYSTANE MATERIAŁY

- [1] PN-EN 1991-4:2008 Eurokod 1 – Oddziaływania na konstrukcje – Część 4: Silosy i zbiorniki