

Analiza parametrów opisujących przegub plastyczny w belce wykonanej z betonu o wysokiej wytrzymałości

Mgr inż. Agnieszka Rogoża, dr hab. inż. Andrzej Ubysz, Politechnika Wroclawska

1. Wprowadzenie

Norma Eurocode 2 pozwala na pracę konstrukcji na poziomie obciążeń, przy których występują uplastycznienia najbardziej wyężonych przekrojów. W granicznych stanach nośności analizuje się taki stan konstrukcji, w którym nie może ona przenieść kolejnych przyrostów obciążeń. Jest to stan początkujący mechanizm układu. Przyjmowanie do analizy tylko małych przemieszczeń pozwala przyjąć tzw. zasadę zesztynienia układu. Przyjmuje się do analizy także jako związku fizyczne prawo plastycznego płynięcia zamiast tradycyjnego prawa Hooke'a. Dalszą szczegółową analizę przekształcania konstrukcji w mechanizm opisano w [1].

Analiza stanu granicznego w EC2 opiera się na analizie powierzchni granicznej oraz wykorzystuje stowarzyszone prawo płynięcia. Autorzy normy określają kryteria uplastycznienia przekroju na podstawie rozproszenia energii w przekrojach zarysowanych. Jako wielkość podstawową wprowadzają pojęcie momentu granicznego.

Analiza przedstawiona w Eurokodzie wykorzystuje zatem model betonu jako materiału wyidealizowanego opisywanego jako ciągle kontinuum. Przedstawiona przez Autorów metoda rozwija kierunek analizy, w którym zmierza się do dyskretyzacji wszystkich efektów związanych ze zmniejszaniem sztywności, a następnie ze zniszczeniem przekroju. Najistotniejszym elementem tej metody jest doświadczalne wyznaczenie współczynników opisujących sprężyste i plastyczne odkształcenia przekroju przy różnych poziomach jego wyężenia, stopnia zbrojenia, dla różnych klas betonu i innych zmiennych parametrów.

2. Model do obliczania niezarysowanych i zarysowanych żelbetowych konstrukcji prętowych

Model jest oparty na równaniu różniczkowym ugiętej osi belki, wykonanej z materiału sprężystego [3], które ma postać:

$$\frac{d^2}{dx^2} \left[EJ \frac{d^2 v(x)}{dx^2} \right] = p(x) \quad (1)$$

gdzie:

EJ – sztywność belki,

x – współrzędna belki,

$v(x)$ – ugięcie prostopadłe do osi belki,

$p(x)$ – obciążenie zewnętrzne.

Po zarysowaniu sztywność belki żelbetowej EJ ulega zmianie w miarę wzrostu obciążenia. Przy takim założeniu można przyjąć, że sztywność belki przed zarysowaniem jest w przybliżeniu stała, natomiast po zarysowaniu zmniejsza się.

W celu obliczenia wartości ugięcia belki zarysowanej najczęściej normy przyjmują uśrednioną sztywność przekroju zarysowanego zależną od poziomu obciążenia (2).

$$EJ_{I_{sr}} \frac{d^4 v(x)}{dx^4} = p(x) \quad (2)$$

Większość znanych teorii różnicuje w sposób dyskretny lub kontynualny zmianę sztywności na długości belki, lecz nie uwzględnia bezpośrednio w obliczeniach numerycznych efektów wynikających z powstania przegubu plastycznego.

Jedną z propozycji pozwalającą na uwzględnienie efektów charakterystycznych dla konstrukcji betonowych takich jak np. zarysowanie, naruszenie współpracy betonu i stali czy uplastycznienie materiału jest sposób zaproponowany przez Borcza [1, 2]. Zakłada on, że lewa strona równania różniczkowego (1) opisuje materiał idealnie sprężysty, natomiast prawa strona to suma obciążenia oraz członu opisującego właściwości materiału takie jak zarysowanie, efekty reologiczne oraz wynikające z nich wtórne zmiany sztywności (3). Dzięki takiemu zapisowi cała ogólna równania różniczkowego (3) pozostaje niezależna od zmian sztywności wynikających z charakteru obciążenia.

$$EJ_I \frac{d^4 v(x)}{dx^4} = p(x) + \sum r_i \frac{d^2}{dx^2} \delta(x-x_i) \quad (3)$$

gdzie:

$$r_i = \Delta\varphi = \Delta\varphi_{res} + \Delta\varphi_E \quad (4)$$

Parametr r można interpretować jako dyskretny skok kąta obrotu dv/dx w miejscu o współrzędnej x_i opisanym przez deltę Diraca, natomiast składowe to odpowiednio część trwała $\Delta\varphi_{res}$ oraz część sprężysta $\Delta\varphi_E$. Po czterokrotnym scałkowaniu równania (3) otrzymuje się ugięcie:

$$v(x) = \frac{p(x)l^4}{24EJ} + \frac{1}{EJ} \left[l^3 r_i \sum_i (x - x_i) h(x - x_i) + \frac{1}{6} Ax^3 + \frac{1}{2} Bx^2 + Cx + D \right] \quad (5)$$

Równanie (5) przyjmuje postać sumy ugięć z rozwiązania belki idealnie sprężystej i ugięć od imperfekcji (trwałe i sprężyste otwarcie rys), w którym stałe A , B , C i D otrzymano z warunków brzegowych.

$$v(x) = v_1(x) + v_2(x)(x - x_i)h(x - x_i)$$

$$h(x - x_i) = \begin{cases} 0 & x \leq x_i \\ 1 & x > x_i \end{cases} \quad (6)$$

3. Wybrane wyniki literaturowe z badań belek żelbetowych z przegubem plastycznym

Badania przeprowadzono na elementach belkowych o geometrii przedstawionej na rysunku 1. Elementy w serii różniły się stopniem zbrojenia ρ . Belki żelbetowe swobodnie podparte obciążano siłą skupioną w środku rozpiętości. Wartość siły obciążającej $P > 0,8P_u$. Czujniki mierzące odkształcenia znajdowały się zarówno na zbrojeniu, jak i na betonie,

ze szczególnym uwzględnieniem strefy powstawania przegubu plastycznego w środkowej części badanego elementu.

4. Wyniki analizy numerycznej belek żelbetowych z przegubem plastycznym

Przeprowadzono analizę numeryczną zarysowanych belek żelbetowych opartą na założeniach modelu Borcza, w którym równanie różniczkowe osi ugięcia belki ma postać wzoru (3).

Ugięcie obliczono jako sumę przemieszczenia belki idealnie sprężystej (8) oraz przemieszczeń dodatkowych spowodowanych wystąpieniem rys (9).

Dla belki swobodnie podpartej obciążonej siłą skupioną ugięcie ma postać:

$$v = v_1 + v_2 \quad (7)$$

gdzie:

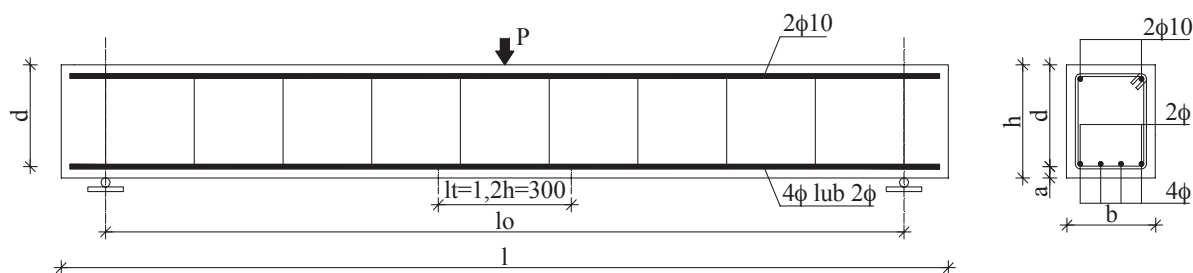
$$v_1 = \frac{Pl^3}{48EJ} \quad (7)$$

v_1 – ugięcie belki z materiału idealnie sprężystego
 P – siła skupiona

$$v_2 = l \sum_{i=1}^{n_r} (r_{0i} + r_{1i} v_{,xx}) \quad (9)$$

v_2 – dodatkowe ugięcie spowodowane rysami w belce. Obliczono ugięcia belek żelbetowych B1 ÷ B4 o geometrii jak na rysunku 1 i danych materiałowych zaczerpniętych z własnych badań doświadczalnych – tabela 2.

Wartość ugięcia uzależniono od długości strefy występowania zarysowania l_i oraz od średniego rozstawu rys $s_{m,i}$. Postać ugięć otrzymanych w oparciu o doświadczalne dane materiałowe została uzyskana z obliczeń wykonanych na podstawie przyjętego modelu opisanego w pkt. 2 i przedstawiona na rysunkach 2 i 3. Uży-



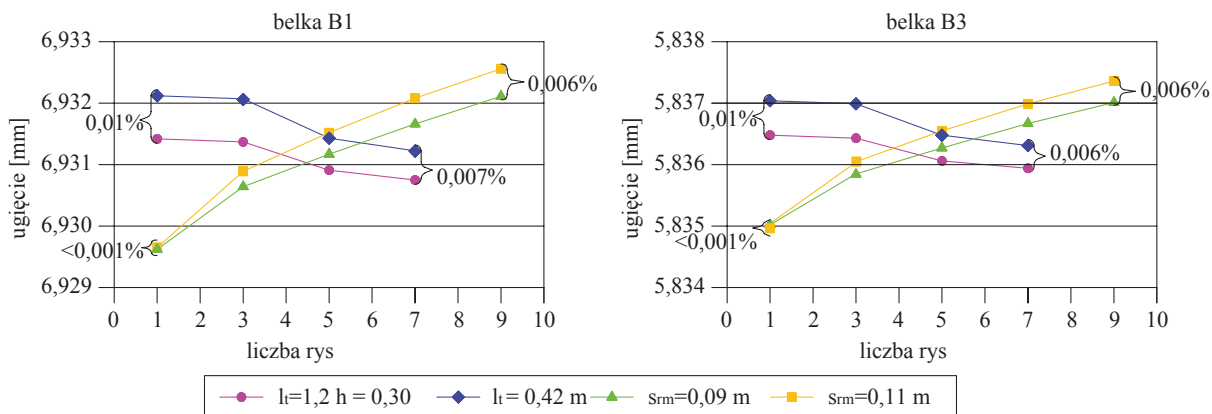
Rys. 1. Geometria elementów B1 ÷ B4

Tabela 1. Geometria belek B1 ÷ B4

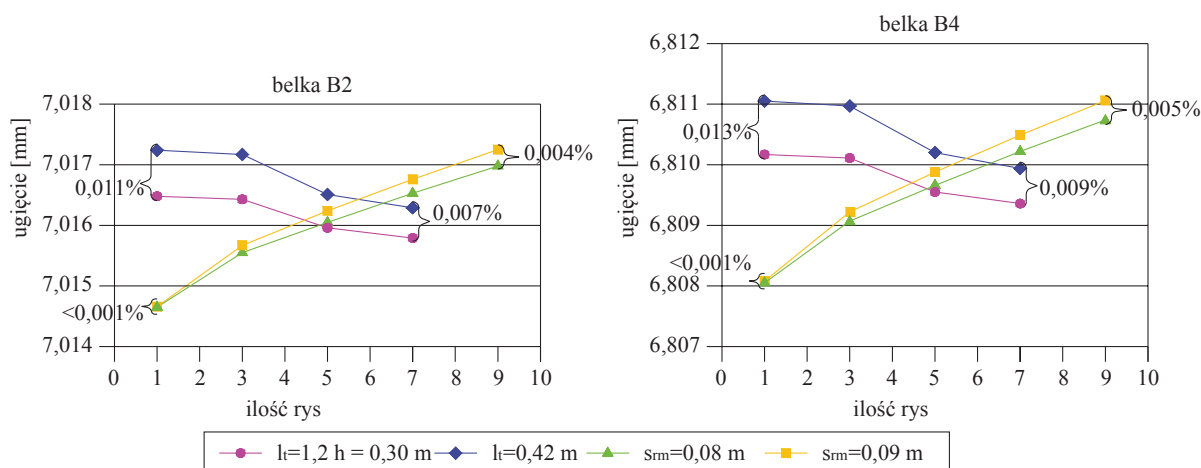
Oznaczenie belki	Dane geometryczne belek testowych							
	h [mm]	d [mm]	b [mm]	Zbrojenie	A_s [mm ²]	ρ_s [%]	l_0 [mm]	l [mm]
B1	250	219	200	4ø10 mm	314	0,71	1900	2000
B2	250	214	200	2ø20 mm	628	1,47	1900	2000
B3	250	217	200	2ø14 mm	308	0,71	1900	2000
B4	250	217	200	4ø14 mm	616	1,42	1900	2000

Tabela 2. Doświadczalne dane materiałowe belek testowych

Dane materiałowe belek testowych							
Oznaczenie belki	f_{ck} [MPa]	f_{ctm} [MPa]	E_c [MPa]	f_{yk} [MPa]	E_s [MPa]	Beton	Stal
B1	63,40	4,77	43810	580	214000	C50/60	AIIIIN
B2	66,07	4,90	43810	591	198000	C50/60	AIIIIN
B3	59,51	4,57	43810	552	207000	C50/60	AIIIIN
B4	70,26	5,11	34970	552	207000	C50/60	AIIIIN



Rys. 2. Postać ugięcia belek B1 i B3 – $\rho = 0,71\%$



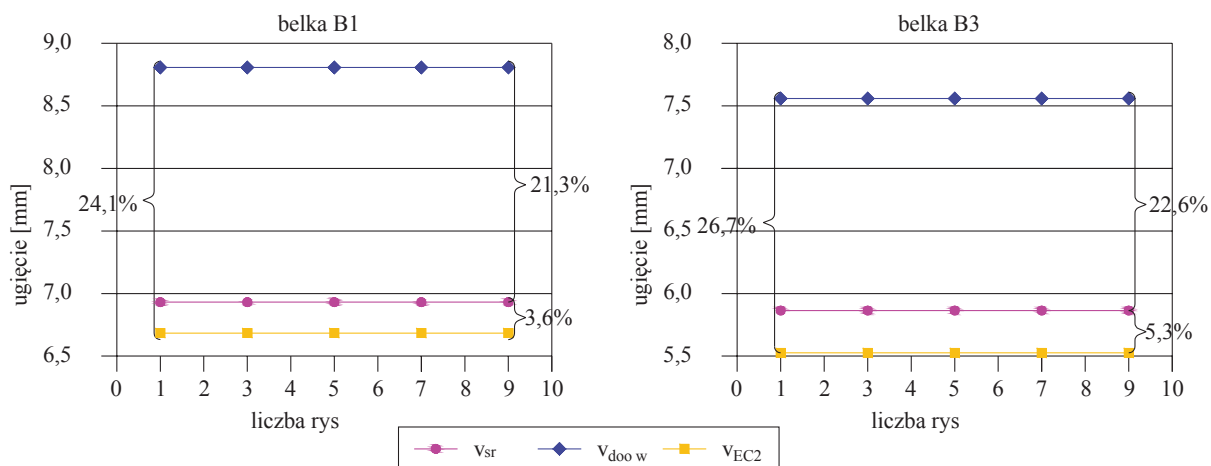
Rys. 3. Postać ugięcia belek B2 i B4 – $\rho = 1,4\%$

skane wyniki pokazują, że postać ugięcia jest podobna dla belek o tej samej geometrii niezależnie od stopnia zbrojenia.

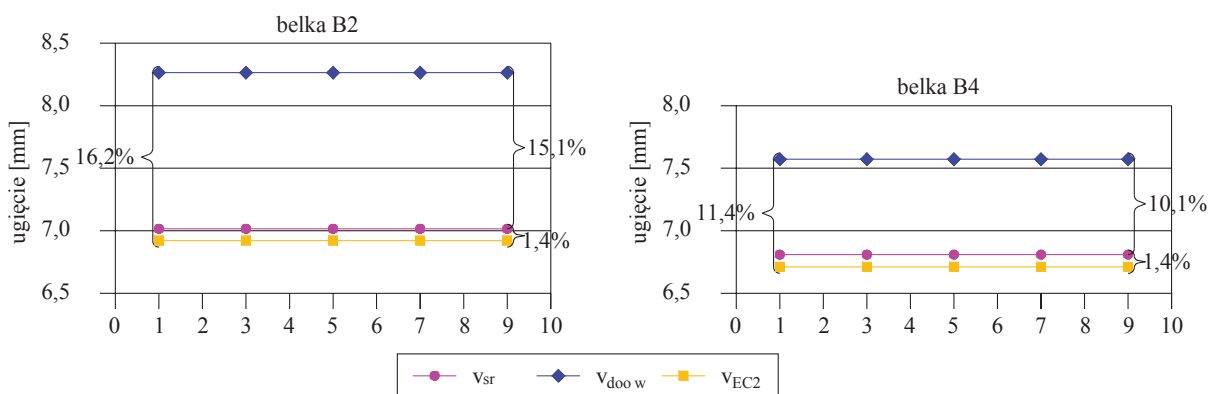
Przy modelowaniu istotnym elementem jest określenie wrażliwości stosowanych parametrów. W przypadku niniejszego modelu są to szerokość strefy kształtowania się przegubu plastycznego, średni rozstaw rys w tej strefie oraz stopień zbrojenia przekroju. Na wykresach widać, że istotnym parametrem wpływającym na wartość ugięć jest tylko stopień zbrojenia przekroju ρ . W przypadku stopnia zbrojenia w przedziale $\rho = <0,7\% - 1,4\%>$ ugięcia są na podobnym poziomie około 6–7 mm. Przyjęcie strefy kształtowania się przegubu plastycznego zgodnie z Euroco-

dem 2 ($l_t = 1,2 h = 0,3 m$) oraz jako wartość doświadczalną ($l_t \approx 0,42 m$) zmienia końcowy wynik ugięcia o około 0,01%. Jeszcze mniejszy wpływ na ugięcia ma przyjęcie średniego rozstawu rys s_{rm} . Przy przyjęciu tych wartości w przedziale $s_{rm} = <0,08 - 0,11 m>$ procentowa zmiana ugięcia jest mniejsza niż 0,006%. Rosnący lub malejący charakter tych wykresów nie ma praktycznie żadnego znaczenia przy obliczaniu ugięć konstrukcji.

Należy jednak zwrócić uwagę na pewną rolę przyjmowanego rodzaju i średnicy prętów dla tego samego stopnia zbrojenia. Przy tej samej geometrii i tym samym poziomie obciążeń $P=75 kN$ dla B1 i B3 oraz $P=145 kN$ dla B2 i B4 wartości ugięć różnią się od 0,4 do 6,2%.



Rys. 4. Średnie ugięcia belek B1 i B3 – obliczone i doświadczalne



Rys. 5. Średnie ugięcia belek B2 i B4 – obliczone i doświadczalne

Porównanie ugięć obliczonych zgodnie z Eurocode 2, średnich uzyskanych w oparciu o metodę Borcza oraz uzyskane doświadczalnie przedstawiono dla belek B1 ÷ B4 na rysunkach 4 i 5. Różnice uzyskanych wyników ugięć dla Eurocodu 2 i metody Borcza mieszczą się w granicach 1,4 ÷ 5,3%.

W porównaniu do ugięć doświadczalnych (dla poziomu obciążeń jak przyjętego do obliczeń w oparciu o model sprężysty materiału uwzględniający po lewej stronie równania linii ugięcia belki zarysowanie czy zmianę sztywności) różnica wynosi 10,1 ÷ 22,6%, natomiast w stosunku do wyników normowych – 11,4 ÷ 26,7%.

5. Podsumowanie

Eurocode 2 pozwala uwzględniać wpływ przegubu plastycznego na wartości ugięć konstrukcji żelbetowych. Wpływ ten można również uwzględnić innymi metodami analitycznymi, między innymi przedstawioną w niniejszym referacie metodą Borcza. Wyniki otrzymane metodami przedstawionymi w Eurocode 2 są jednak niższe od otrzymywanych doświadczalnie, nawet o 26,7%. Również stosunkowo duży błąd do 22,6% uzyskuje się również przy obliczeniach metodą Borcza, jednak

w przypadku tej metody wynik zależy od przyjętych założeń. Metoda ta pozwala bowiem uwzględniać wyniki badań doświadczalnych w parametrach $\Delta\varphi_{res}$ i $\Delta\varphi_E$. Po otrzymaniu wyników na podstawie metody Borcza i porównaniu z ugięciami konstrukcji obliczonymi zgodnie z Eurokodem uzyskano zgodność wyników z błędem około 5%.

BIBLIOGRAFIA

- [1] Borcz A., Teoria konstrukcji żelbetowych, wybrane zagadnienia. cz. I., Wydawnictwo Politechniki Wrocławskiej, Wrocław, 1973
- [2] Borcz A., Teoria konstrukcji żelbetowych, wybrane badania wrocławskie. cz. II. Wrocław, Wydawnictwo Politechniki Wrocławskiej, 1986
- [3] Chen W. F., Plasticity in reinforced concrete. McGraw-Hill Book Company, NYC 1982
- [4] Rogoża A., Stachoń T., Ubysz A., Numerical analysis the cracked reinforced concrete beams., 18th International Conference on the Applications of Computer Science and Mathematics in Architecture and Civil Engineering. IKM 2009, Weimar, 07–09 July 2009
- [5] Ubysz A., Plastic strains and self-stress in reinforced-concrete bar constructs, Scientific Papers of the Institute of Building Engineering of the Wrocław University of Technology, Wrocław 1999
- [6] Podstawy projektowania konstrukcji żelbetowych i sprężonych według Eurocodu 2, Praca zbiorowa Sekcji Konstrukcji Betonowych KILiW PAN, Dolnośląskie Wydawnictwo Edukacyjne, Wrocław 2006
- [7] Eurocode 2: Design of concrete structures – art. 1–1: General rules and rules for buildings, 2004