

Metody oceny ugięcia żelbetowych elementów zginanych

Dr inż. Jacek Korentz, Uniwersytet Zielonogórski

1. Sprawdzanie stanu granicznego ugięcia

1.1. Obliczanie ugięcia wg EC2

Według PN-EN 1992-1:2008, Eurokod 2 [8] sprawdzenia ugięcia można dokonać porównując stosunek rozpiętości do wysokości użytecznej przekroju (l/d) z wartością graniczną tego stosunku lub obliczając ugięcie metodą przybliżoną według wzoru:

$$\alpha = \xi \alpha_{II} + (1 - \xi) \alpha_I \quad (1)$$

w którym α jest rozpatrywanym parametrem deformacji (krzywizna ϕ , ugięcie a), α_I i α_{II} są parametrami deformacji odpowiednio elementu niezarysowanego i elementu w pełni zarysowanego, obliczonymi według klasycznej liniowej teorii żelbetu. Zjawisko usztywnienia przy rozciąganiu (tension stiffening) jest uwzględnione przez współczynnik dystrybucji ξ :

$$\xi = 1 - \beta \left(\frac{\sigma_{sr}}{\sigma_s} \right)^2 \quad (2)$$

gdzie β jest współczynnikiem zależnym od czasu trwania obciążenia, σ_{sr} i σ_s są naprężeniami w zbrojeniu rozciągającym przeciętym rysą, wywołanymi odpowiednio momentem rysującym M_{cr} i momentem zginającym M_A od analizowanej kombinacji obciążeń. W celu dokładnej oceny ugięć Eurokod 2 [8] zaleca obliczanie krzywizn w przekrojach gęsto rozmieszczonych wzdłuż elementu, a następnie obliczanie ugięcia

przez całkowanie numeryczne. Wpływ pełzania na ugięcie jest uwzględniany przez zastosowanie w obliczeniach strzałki ugięcia efektywnego modułu sprężystości $E_{c,eff}$

$$E_{c,eff} = \frac{E_{cm}}{1 + \phi} \quad (3)$$

gdzie: E_{cm} to sieczny moduł sprężystości betonu, F to współczynnik pełzania dla rozpatrywanego przedziału czasu i obciążenia.

Według Eurokodu 2 [8] krzywiznę ϕ_{cs} spowodowaną odkształceniem skurczowym ε_{cs} można obliczać stosując wzór:

$$\phi_{cs} = \varepsilon_{cs} \frac{E_s S}{E_{c,eff} I} \quad (4)$$

gdzie: S to moment statyczny pola zbrojenia względem środka ciężkości przekroju, I to moment bezwładności przekroju, E_s to moduł sprężystości zbrojenia.

1.2. Obliczanie ugięcia wg ACI 318

W normie ACI 318-05 [1] ugięcie sprawdzane jest na podstawie zastępczego momentu bezwładności przekroju I_e , określanego ze wzoru

$$I_e = \left(\frac{M_{cr}}{M_A} \right)^3 I_I + \left[1 - \left(\frac{M_{cr}}{M_A} \right)^3 \right] I_{II} \quad (5)$$

gdzie: I_I i I_{II} są momentami bezwładności odpowiednio przekroju niezarysowanego (bez zbrojenia) i zarysowanego. Sztywność na zginanie jest określana dla modułu sprężystości $E_{cs} = 0,85 E_{cm}$. Wpływ pełzania i skurczu betonu na ugięcie jest uwzględniany bezpośrednio

przez przemnożenie ugięcia doraźnego przez współczynnik zwiększający

$$\lambda = \frac{m}{1 + 50\rho_2} \quad (6)$$

gdzie: m jest współczynnikiem zależnym od czasu trwania obciążenia ($m = 1.00 \div 2.00$), ρ_2 to stopień zbrojenia w strefie ściskanej.

1.3. Obliczanie ugięcia wg CEB

W metodzie uproszczonej zalecanej przez CEB-FIP MODEL CODE 1990 [4] trwałe ugięcie niezarysowanych ($M_A < M_{cr}$) elementów zginanych może być obliczane z zależności:

$$a_o = (1 + \phi) a_I \quad (7)$$

gdzie: a_I to ugięcie sprężyste dla sztywności przekroju betonowego $E_{cm} I_c$. Natomiast trwałe ugięcie elementów zarysowanych ($M_A \geq M_{cr}$) obliczane jest z zależności:

$$a_t = \left(\frac{h}{d} \right)^3 \eta (1 - 20\rho_2) a_I \quad (8)$$

gdzie: h , d to odpowiednio wysokość i wysokość użyteczna przekroju, η współczynnik uwzględniający skurcz i pełzanie betonu ($\eta = 2 \div 10$) oraz stopień zbrojenia rozciąganego ρ_t .

1.4. Obliczanie ugięcia wg propozycji autora

Autor zaproponował w pracy [7] obliczanie ugięcia doraźnego na podstawie trzyliniowego modelu zależności moment – krzywizna prezentowanego w [6]. Początkowa strzałka ugięcia obliczana jest z zależności:

$$a_o = \alpha_M (\varphi_I + \kappa_M \varphi_{II}) l^2 \quad (9)$$

gdzie: α_M i κ_M współczynniki zależne od rozkładu krzywizny na długości elementu, φ_I to krzywizna elementu niezarysowanego, φ_{II} to krzywizna elementu po zarysowaniu. Dla belki swobodnie podpartej i równomiernie obciążonej współczynniki α_M i κ_M są równe [7]:

$$\alpha_M = \frac{5}{48}$$

$$\kappa_M = \sqrt{1-m} \left[1 + \frac{3}{5} (1 - \sqrt{1-m}) \right] \quad (10)$$

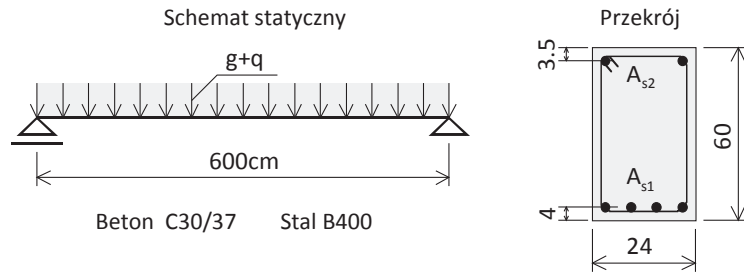
gdzie: m to iloraz momentu zginającego M_A i momentu rysującego M_{cr} . Wpływ pęczania i skurczu betonu uwzględniany jest przez zwiększenie krzywizny współczynnikiem zależnym od rozkładu zbrojenia podłużnego i wielkości pęczania. Ugięcie z uwzględnieniem wpływu pęczania i skurczu betonu oblicza się z zależności:

$$a_t = (1 + k_t \phi) a_o \quad (11)$$

gdzie: k_t współczynnik zależny od ilości zbrojenia w strefie ściskanej tj. ilorazu stopnia zbrojenia ściskanego ρ_2 i stopnia zbrojenia rozciąganego ρ_1 , obliczany wg propozycji Bransona [2]:

$$k_t = 0,85 - 0,45 \frac{\rho_2}{\rho_1} \geq 0,40 \quad (12)$$

W obliczaniu ugięcia z uwzględnieniem pęczania i skurczu betonu możliwe jest również zastosowanie współczynnika λ (6) zwiększające-



Sposób zbrojenia

Belka	$A_{s1}(\text{cm}^2)$	ρ_1	$A_{s2}(\text{cm}^2)$	ρ_2	ρ_2/ρ_1
B1	6,28	0,48%	1,57	0,12%	0,250
B2	12,56	0,97%	1,57	0,12%	0,125
B3	18,84	1,45%	1,57	0,12%	0,083

Rys. 1. Geometria i zbrojenie belek

go ugięcie doraźne obliczane wg wzoru (9).

2. Przykład – porównanie wyników obliczeń

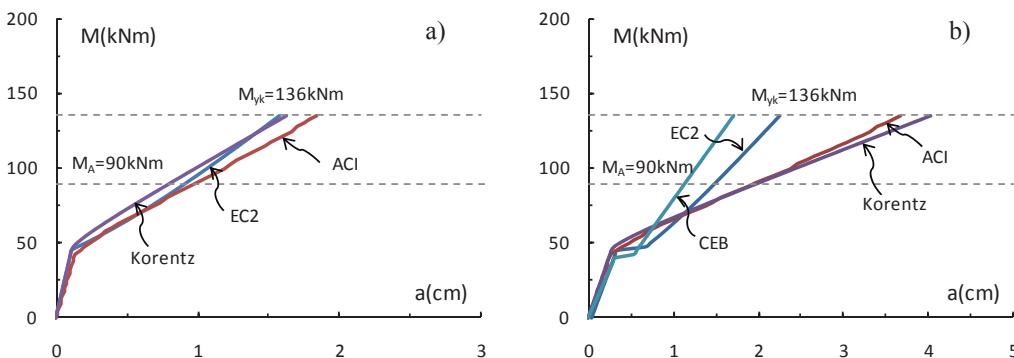
Prezentowane wcześniej normowe metody obliczania ugięcia elementów zginanych zilustrowano przykładem liczbowym wykonanym dla belek swobodnie podpartych równomiernie obciążonych (rys.1).

Porównania ugięcia obliczonego na podstawie norm EC2, ACI, zaleceń CEB i według propozycji autora dokonano dla trzech belek B1, B2 i B3 różniących się tylko stopniem zbrojenia rozciąganego, który wynosił $\rho_1 = 0,48\%$, $0,97\%$ i $1,45\%$. Przyjęto klasę betonu C30/37 i klasę stali B400. Inne szczegóły dotyczące analizowanych belek zamieszczone są na rysunku 1.

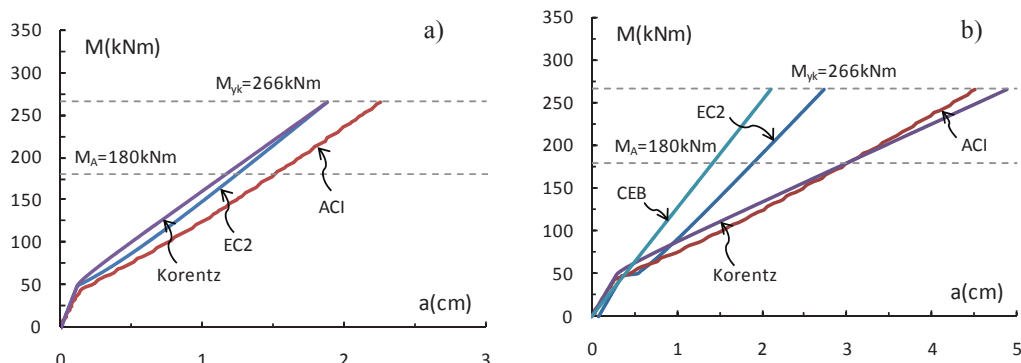
Ugięcia belek obliczano dla całego możliwego zakresu obciążenia, tj.

dla momentu zginającego zmieniającego się od zera do momentu granicznego M_{yk} określonego dla charakterystycznych wartości wytrzymałości betonu i stali zbrojeniowej. W obliczeniach przyjęto końcowy współczynnik pęczania $F = 2.0$ i całkowite odkształcenie spowodowane skurczem betonu $\epsilon_{cs} = 0.00025$.

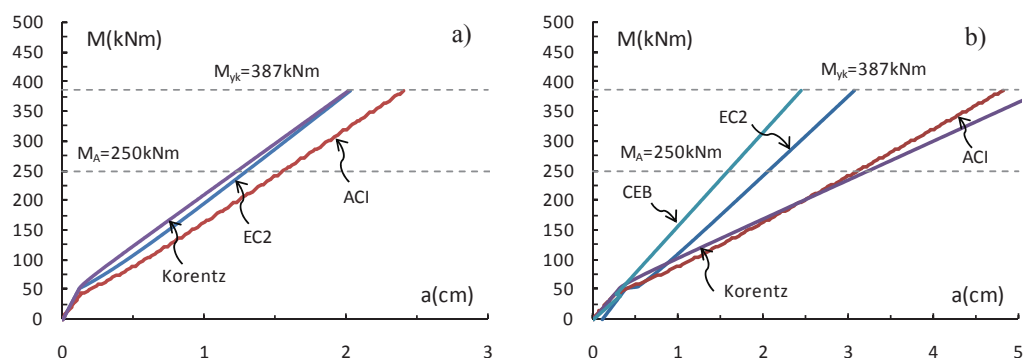
Wyniki przeprowadzonych obliczeń dla belek B1, B2 i B3 są zilustrowane odpowiednio na rysunkach 2, 3 i 4. Na rysunkach tych przedstawiono wykresy zależności – moment ugięcie $M-a$ od kombinacji obciążeń quasi stałych bez i z uwzględnieniem skurczu i pęczania betonu. Wyniki obliczeń początkowej strzałki ugięcia a_o i trwałej strzałki ugięcia a_t dla obciążeń quasi-stałych, stanowiących w każdym przypadku 2/3 obciążenia całkowitego ($M_A = 2/3 M_{yk}$), zestawione



Rys. 2. Zależności moment zginający – ugięcie dla belki B1: a) obciążenia doraźne, b) obciążenia długotrwałe



Rys. 3. Zależności moment zginający – ugięcie dla belki B2: a) obciążenia doraźne, b) obciążenia długotrwałe



Rys. 4. Zależności moment zginający – ugięcie dla belki B3: a) obciążenia doraźne, b) obciążenia długotrwałe

są w tabeli 1. Analizując wykresy zamieszczone na rysunkach 2, 3 i 4 można stwierdzić, że istotne różnice w wynikach obliczeń strzałki ugięcia dla obciążeń doraźnych, przeprowadzonych różnymi metodami normowymi, pojawiają się po zarysowaniu elementu i zależą od stopnia zbrojenia rozciąganego. Najmniejsza różnica jest widoczna w przypadku belki B1. Jest to belka o niskim stopniu zbrojenia rozciąganego, $\rho_1=0,48\%$. Różnice są nieco większe dla belek B2 i B3, tj. belek o wyższym stopniu zbrojenia, odpowiednio $\rho_1=0,97\%$ i $\rho_1=1,45\%$. Ugięcia obliczone na podstawie normy ACI są większe od ugięcia obliczanego na podstawie normy EC o około 6% dla belki B1 i o około 20% dla belek B2 i B3. Różnice te są wynikiem przede wszystkim przyjęcia w normie ACI

niższego modułu sprężystości niż w normie EC2. Nadmienić należy, że ugięcia doraźne obliczone metodą autora są bardzo zbliżone do wyników uzyskiwanych na podstawie normy EC2.

Istotne różnice w ugięciach występują w przypadku ugięcia trwałego, w obliczeniach którego uwzględnia się wpływ pełzania i skurczu betonu. Jak można zauważyć na rysunkach 2, 3, 4 oraz porównując dane zamieszczone w tabeli 1 różnica ugięcia a_t-a_o od quasi stałej kombinacji obciążeń, spowodowana skurczem ($\epsilon_{cs}=0,00025$) i pełzaniem ($F=2,0$) betonu, obliczona na podstawie EC2 stanowi od 50% do 60% ugięcia doraźnego a_o . Natomiast przyrost ugięcia a_t-a_o spowodowany pełzaniem i skurczem betonu, obliczony na pod-

stawie zaleceń ACI, stanowi około 100% ugięcia doraźnego a_o . Zatem różnica w obliczonych na podstawie tych dwóch norm przyrostach ugięcia a_t-a_o , spowodowanych pełzaniem i skurczem betonu, jest około dwukrotna. Stwierdzić należy, że jest to bardzo duża różnica w ocenie wpływu właściwości reologicznych betonu na odkształcenia belek żelbetonowych. Wydaje się, że w świetle badań doświadczalnych [3, 5] teoria modułu zastępczego, stosowana w EC2, niedoszacowuje wpływu pełzania betonu na ugięcie belek żelbetonowych.

Wyniki obliczeń strzałki ugięcia z uwzględnieniem wpływu skurczu i pełzania betonu, przeprowadzone wg propozycji autora, są bardzo zbliżone do wyników uzyskanych na podstawie procedury obliczeń według ACI.

Tabela 1. Zestawienie wyników obliczeń początkowej a_o i trwałej a_t strzałki ugięcia

Belka	B1		B2		B3	
	a_o	a_t	a_o	a_t	a_o	a_t
Ugięcie (cm)						
EC2	0,92	1,49	1,25	1,91	1,30	2,06
CEB		1,14		1,43		1,59
ACI	0,98	1,97	1,51	3,02	1,56	3,12
Korentz	0,81	2,00	1,17	3,01	1,23	3,23

3. Podsumowanie

Odształcenia elementów lub konstrukcji są ograniczane z różnych względów, między innymi ze względu na możliwość ich eksploatacji i przydatność. W większości norm krajowych i zaleceń międzynarodowych ugięcie sprawdzane jest bez obliczania na podstawie kryterium smukłości. Jednak w niektórych przypadkach konieczne jest sprawdzenie stanu granicznego ugięcia przez obliczanie i wówczas mogą pojawić się różnice w otrzymanych wynikach obliczeń w zależności od zastosowanych normowych metod obliczania, np. zawartych w normach EC2 i ACI lub zaleceniach CEB.

W przypadku obliczania ugięcia początkowego, uzyskuje się zbli-

żone wyniki przy zastosowaniu prezentowanych w niniejszym artykule metod obliczania ugięcia. Istotne różnice w uzyskiwanych wynikach obliczanego ugięcia pojawiają się, gdy należy uwzględnić właściwości reologiczne betonu, przede wszystkim jego pełzanie. Trwałe ugięcie dla podobnych warunków pełzania i skurczu betonu obliczone według normy ACI i propozycji autora jest większe o około 50% od trwałego ugięcia obliczonego na podstawie normy EC2.

BIBLIOGRAFIA

- [1] ACI 318-05, Building code requirements for structural concrete, American Concrete Institute, 2005
 [2] Branson D.E., Deformation of concrete structures, McGraw-Hill Book Co., New York, 1977

- [3] Branson D. E., Compression steel effect on long-time deflection, ACI Journal, Proceedings, V.68, No.8, Mar. 1966, 373-386
 [4] CEB-FIP Model Code 1990, Design Code, Comite Euro-International du Beton, Thomas Telford, London, 1998
 [5] Corley W. G., Sozen M. A., Time-dependent deflections of reinforced concrete beams, ACI Journal, Proceedings, V.63, No.3, Aug. 1971, 555-559
 [6] Korentz J., Model zależności moment-krzywizna dla belek żelbetowych – ocena ciągliwości, 55KN KILiW PAN i KN PZiTB, Problemy naukowo-badawcze budownictwa, Kielce-Krynica, 2009, 231-238
 [7] Korentz J., Model zależności moment-krzywizna dla belek żelbetowych – obliczanie ugięcia, 56KN KILiW PAN i KN PZiTB, Problemy naukowo-badawcze budownictwa, Kielce-Krynica, 2010, w druku
 [8] PN-EN 1992-1-1:2008, Eurokod 2: Projektowanie konstrukcji z betonu, Cz. 1. Reguły ogólne i reguły dla budynków

SPONSORZY KONFERENCJI:

PGE ELEKTROWNIA TURÓW SA w Bogatyni
DOLNOŚLĄSKA OKRĘGOWA IZBA INŻYNIERÓW BUDOWNICTWA
PUP ELTUR - SERWIS Sp. z o.o. w Bogatyni
PT ELTUR - TRANS Sp. z o.o. w Bogatyni
PPSiR ELTUR - WAPORE Sp. z o.o. w Bogatyni
PHU GLOBAL TUR Sp. z o.o. w Bogatyni
CLEVER & CO – ELECTRO UND MASCHINENFABRIK GMBH w Essen
HAMON POLSKA
MEGACHEMIE Sp. z o.o. w Krakowie - **SPONSOR GENERALNY**
MC - BAUCHEMIE Sp. z o.o.
MOSTOSTAL WARSZAWA S.A.
MRÓZEK – Bystřice
PAGEL POLSKA, Komorniki – Środa Śląska
PERI POLSKA Sp. z o.o.
Przedsiębiorstwo PREBEX Sp. z o.o. we Wrocławiu
P.P.U. SOLPET Sp. z o.o. w Bogatyni
SAVEX Sp. z o.o. w Zgorzelcu
SIKA POLAND Sp. z o.o.
S & P POLSKA Sp. z o.o.
TRIMO POLSKA Sp. z o.o.