PRACE INSTYTUTU TECHNIKI BUDOWLANEJ – KWARTALNIK nr 3 (131) 2004
BUILDING RESEARCH INSTITUTE – QUARTERLY No 3 (131) 2004

BADANIA I STUDIA – RESEARCH AND STUDIES

Bohdan Lewicki*

WSPÓŁCZYNNIK γ_{Rd} NIEPEWNOŚCI MODELU OBLICZENIOWEGO NOŚNOŚCI KONSTRUKCJI – PROPOZYCJA WYZNACZANIA

Wartość γ_{Rd} występująca we wzorze (6) definiującym tę wartość (rys. 1) jest ustalana zwykle zgodnie z wyczuciem inżynierskim autora wzoru obliczeniowego nośności konstrukcji $R(f)$. Proponuje się zdyscyplinować sposób ustalania tej wartości poprzez wymaganie, aby zalecany do stosowania wzór obliczeniowy na nośność konstrukcji $R_d(f)$, po podstawieniu za f wytrzymałości charakterystycznej materiału f_k (5-procentowy kwantyl rozkładu), podawał „nośność charakterystyczną" R_k, odpowiadającą 5-procentowemu kwantylowi rozkładu wyników badań nośności $E_{exp,k}$, jak to przedstawiono na rysunkach 2 i 3.

Nośność obliczeniową γ_{Rd} sprawdzanego elementu konstrukcji wyraża – w myśl postanowień PN-EN 1990:2004 [1] dotyczących posługiwania się metodą częściowych współczynników bezpieczeństwa – wzór

$$R_d = \frac{1}{\gamma_{Rd}} R(f_d) \tag{1}$$

gdzie: $R(f_d)$ – funkcja analityczna $R(f)$, wyrażająca związek między nośnością elementu R i wytrzymałością materiału f, do której za wartość f podstawiono wytrzymałość obliczeniową materiału $f_d = f_k / \gamma_m$

γ_{Rd} – częściowy współczynnik bezpieczeństwa uwzględniający niepewność modelu konstrukcji, którym posłużono się do wyprowadzenia analitycznej funkcji $R(f)$.

Zmienną we wzorze (1) jest wytrzymałość materiałów f, decydująca o nośności konstrukcji. Pozostałe wielkości są wielkościami stałymi.

Niepewność modelu konstrukcji jest konsekwencją przyjętych do wyprowadzenia wzoru $R(f)$ uproszczeń i pominiętych zmiennych losowych, innych niż uwzględnione poprzez wartość współczynnika γ_m, występującego we wzorze na wytrzymałość obliczeniową materiału f_d.

* prof. dr inż.

Normy projektowania konstrukcji nie wyróżniają wartości γ_{Rd} w podawanych wzorach na nośność obliczeniową konstrukcji, zapisując wartość R_d w uproszczonej postaci

$$R_d = R_d\,(f_d) \tag{2}$$

Zapis (1) ma natomiast podstawowe znaczenie dla metodologii formułowania wzorów do wyznaczania nośności obliczeniowej konstrukcji i weryfikacji doświadczalnej tych wzorów.

Projektant korzystający z normy nie ma potrzeby zastanawiać się nad niepewnością modelu obliczeniowego, którym posłużono się do wyznaczenia funkcji $R\,(f)$, leżącej u podstaw funkcji $R_d\,(f_d)$. Kwestii tej nie można jednak pomijać przy formułowaniu analitycznych funkcji $R\,(f)$ zalecanych również w praktyce, podobnie jak nie można proponować tych funkcji do stosowania bez ich weryfikacji doświadczalnej i uwzględnienia przy tym niepewności modelu.

Pierwszym etapem weryfikacji doświadczalnej jest ustalenie funkcji $R_m\,(f_m)$, aproksymującej w zadanej postaci zmienność wartości średnich $R_{exp,m}\,(f_m)$.

Jeżeli funkcja $R\,(f_m)$ została przekształcona do postaci aproksymującej wartości średnie $R_{exp,m}$ – na przykład metodą najmniejszych kwadratów – staje się ona funkcją

$$R_m\,(f_m) = R_{exp,m}\,(f_m) \tag{3}$$

Nośność konstrukcji zależy nie tylko od wytrzymałości materiału f, ale i od uwarunkowań geometrycznych, warunków brzegowych, realizacji obciążenia itd. Wszystkie te czynniki dalsze przyjmuje się przy weryfikacji funkcji $R_m\,(f_m)$ jako wartości stałe. Jedyną wielkością zmienną jest wytrzymałość materiału decydującego o nośności konstrukcji. Jeżeli takich materiałów jest więcej niż jeden, modyfikuje się odpowiednio funkcję $R\,(f)$, wprowadzając odpowiednie podziały, w których występuje tylko jeden materiał, decydujący o nośności konstrukcji.

Niepewność modelu manifestuje się głównie poprzez wielkość rozrzutu wartości poszczególnych $R_{exp,i}$ w stosunku do wartości $R_m\,(f_m)$, przyporządkowanej wytrzymałości średniej materiału $f_{i,m}$. Kiedy rozrzuty te są małe, rzędu wielkości rozrzutu wytrzymałości materiału f_m, można przyjąć (rys. 1a), że

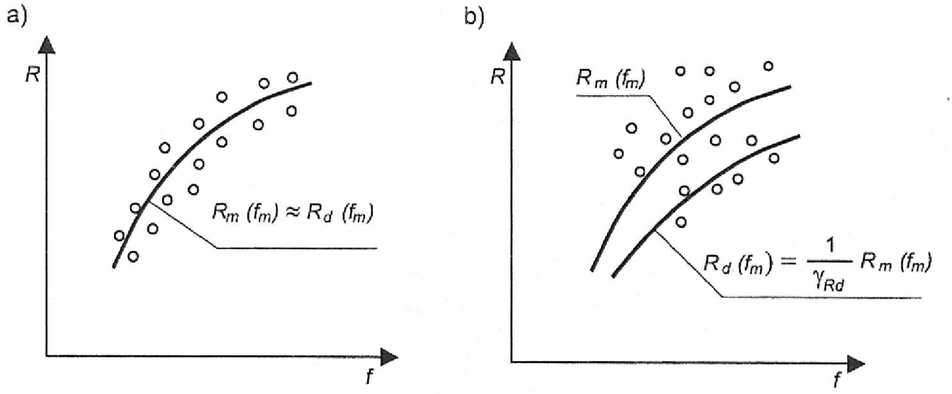
$$R_d\,(f_m) = R_m\,(f_m) \tag{4}$$

Jest to jednak przypadek raczej rzadki, szczególnie w konstrukcjach z betonu. Zwykle rozrzuty poszczególnych wartości $R_{exp,i}$ są wyraźnie większe od rozrzutów wartości f (rys. 1b) i wówczas trzeba przyjąć

$$R_d\,(f_m) = \frac{1}{\gamma_{Rd}}\,R_m\,(f_m) \tag{5}$$

Uwzględniając wzór (3)

$$R_d\,(f_m) = \frac{1}{\gamma_{Rd}}\,R_{exp,m}\,(f_m) \tag{6}$$



Rys. 1. Funkcje R_m (f_m) i R_d (f_m): a) – małe rozrzuty wartości $R_{exp\,i}$; b – duże rozrzuty wartości $Re_{xp,i}$
Fig. 1. Function R_m (f_m), corresponding to mean experimental values and the design function R_d (f_m) meant for practical application, with f_m instead of f_d: a – small dispersion of R_{exp}; b – considerable dispersion of R_{exp}

W praktyce przy weryfikacji doświadczalnej analitycznych wzorów obliczeniowych wartość γ_{Rd} przyjmuje się najczęściej zgodnie z wyczuciem badacza. Można jednak wartość tę zdyscyplinować, traktując ją jako funkcję stosunku współczynnika zmienności V_R wyników badań nośności konstrukcji R_{exp} i współczynnika zmienności V_m wyników badań wytrzymałości materiału f, czyli

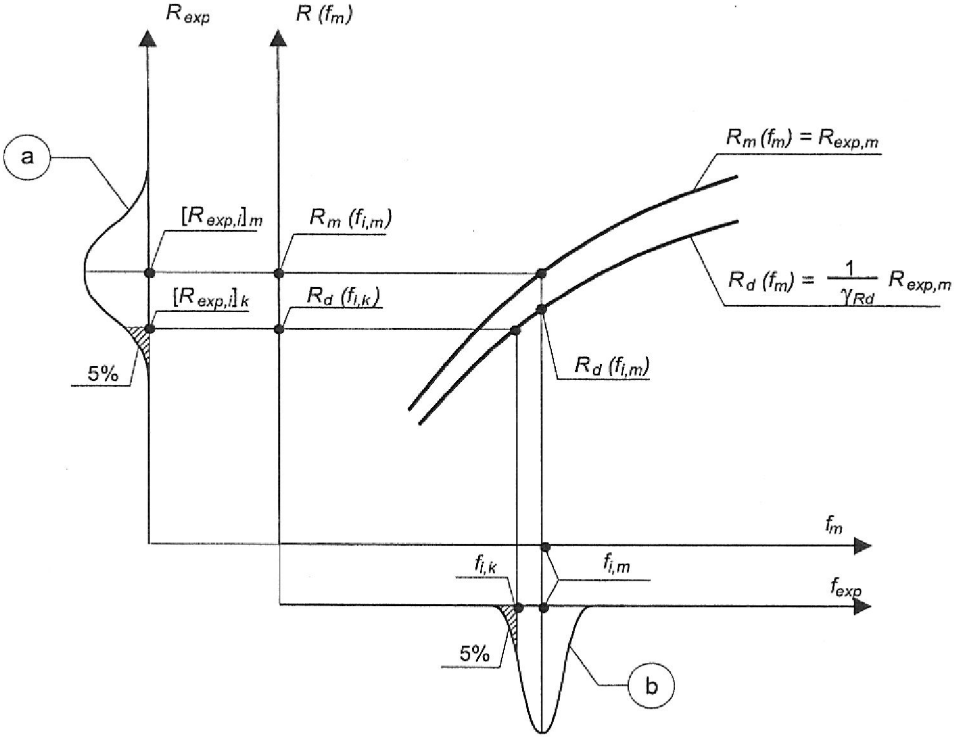
$$\gamma_{Rd} = \gamma \frac{V_m}{V_R} \tag{7}$$

Poziom niezawodności konstrukcji, dla którego należałoby ustalać wartość γ_{Rd}, jest sprawą umowną. Racjonalnym, a także zgodnym z ogólnymi założeniami metody częściowych współczynników bezpieczeństwa, wydaje się poziom „wartości charakterystycznych", czyli 5-procentowy kwantyl rozkładu statystycznego wartości R_{exp} i f, tak jak zaproponowano to w pracy [2].

Poziom 5-procentowego kwantyla jest poziomem, do którego w metodzie częściowych współczynników sięgają wyliczenia statystyczne. Powyżej tego poziomu stosuje się już dalsze zabezpieczenia „na wyczucie tradycji i doświadczenia inżynierskiego".

Uwarunkowania wartości R_m (f_m) i R_d (f_m) oraz sposób postępowania w celu wyznaczenia wartości γ_{Rd} przedstawia rysunek 2. Pokazany na osi R_{exp} rozkład statystyczny wartości $R_{exp,i}$, przyporządkowanych wytrzymałości średniej materiału $f_{i,m}$, jest znacznie bardziej rozciągnięty (mniejsze wartości współczynnika zmienności V_R) niż pokazany na osi f_{exp} rozkład statyczny wytrzymałości materiału f.

W konsekwencji – podstawienie do funkcji R_m (f_m) za wartość $f_{i,m}$ wartości $f_{i,k}$ daje wartość $[R_{exp,i}]_o$, nie pokazaną na rysunku 2, wyższą niż $[R_{exp,i}]_k$, wyrażającą 5-procentowy kwantyl rozkładu statystycznego wyników $R_{exp,i}$.



Rys. 2. Wyznaczenie funkcji $R_d\,(f_m)$: a – rozkład statystyczny nośności $R_{exp,i}$ elementów wykonanych z materiału o wytrzymałości średniej $f_{i,m}$ oraz wartość charakterystyczna $[R_{exp,i}]\,k$; b – rozkład statystyczny wytrzymałości materiału o wytrzymałości średniej $f_{i,m}$ oraz wartości charakterystycznej f_k
Fig. 2. Establishing of $R_d\,(f_m)$: a – statistical distribution of resistance tests $R_{exp,i}$ of structural elements made of material with the mean strength $f_{i,m}$ – and the characteristic resistance $[R_{exp,i}]\,k$; b – statistical distribution of material strength with the mean strength $f_{i,m}$ – and characteristic strength $f_{i,k}$

Aby uzyskać dla $f_{i,k}$ wartość $[R_{exp,i}]_k$, trzeba posłużyć się funkcją R_d, dla której

$$R_d\,(f_{i,k}) = [R_{exp,i}]_k \tag{8}$$

Stąd definicja funkcji $R_d\,(f)$ jako funkcji, która – przy podstawieniu za f wytrzymałości charakterystycznej f_k – daje wartość odpowiadającą „nośności charakterystycznej" $R_{exp,k}$ z wyników badań, czyli

$$R_d\,(f_k) = R_{exp,k} \tag{9}$$

Wartość γ_{Rd} wyraża w takim przypadku wzór

$$\gamma_{Rd} = \frac{R_{exp,k}}{R_{exp,m}}\,\frac{f_m}{f_k} \tag{10}$$

gdzie:

$\frac{R_{exp,k}}{R_{exp,m}}$ – sprowadzona do wartości średniej $R_{exp,m}$ „nośność charakterystyczna" $R_{exp,k}$ badanej konstrukcji

$\frac{f_k}{f_m}$ – sprowadzona do wartości średniej wytrzymałości materiału wytrzymałość charakterystyczna f_k materiału konstrukcji.

Kiedy funkcja $R(f)$ jest funkcją liniową, wartości $R_d(f_k)$ i $R_{exp,k}$, występujące we wzorze (9), można zapisać jako

$$R_d(f_k) = R_d(f_m)(1 - 1{,}64\ V_m) \tag{11}$$

$$R_{exp,k} = R_m(f_m)(1 - 1{,}64\ V_R) \tag{12}$$

gdzie: V_m – współczynnik zmienności wytrzymałości materiału,
V_R – współczynnik zmienności wyznaczonej doświadczalnie nośności elementu R_{exp}.

Uwzględniając zależność (5) i równość (9), można zapisać

$$(1 - 1{,}64\ V_m)\ R_m(f_m) = (1 - 1{,}64\ V_R)\ \gamma_{Rd}\ R_m(f_m) \tag{13}$$

i stąd

$$\gamma_{Rd} = \frac{1 - 1{,}64\ V_m}{1 - 1{,}64\ V_R} \tag{14}$$

W przypadku nieliniowej funkcji $R(f)$ zapisy funkcji (11) i (12) stają się odpowiednio bardziej złożone. Natomiast tok rozumowania w kierunku wyznaczenia wartości γ_{Rd} pozostaje bez zmian.

Określoną wzorem (14) definicję wartości γ_{Rd} dla liniowej funkcji $R(f)$ ilustruje rysunek 3, na którym przedstawiono:

- wyniki badań – jako stosunek $\frac{R_{exp}}{R_m(f_m)}$,
- rozkłady statystyczne stosunku $\frac{R_{exp}}{R_m(f_m)}$ i wytrzymałości materiału w przedziale od

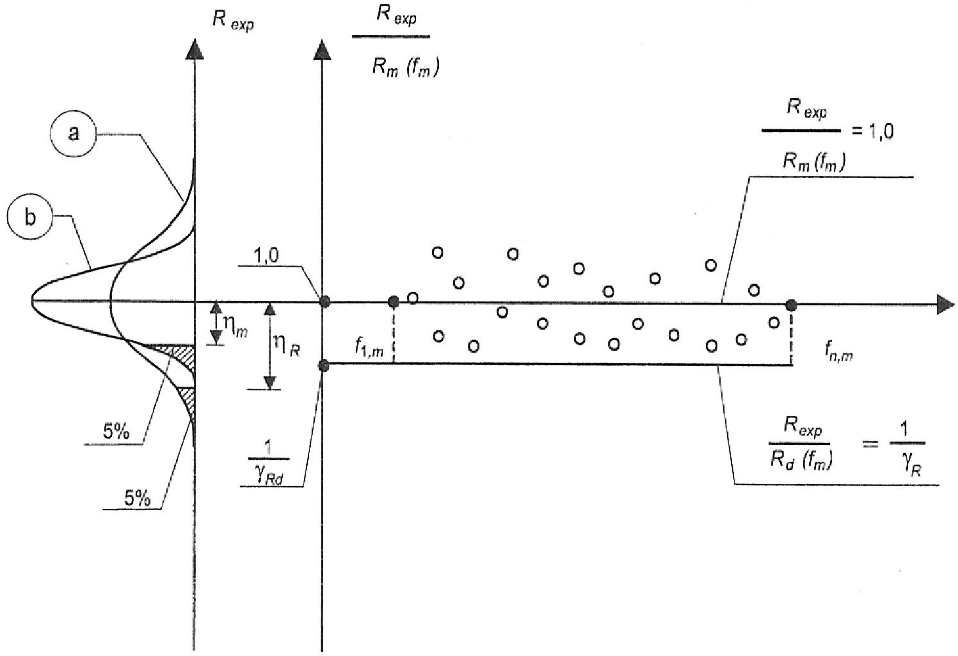
$f_{1,m}$ do $f_{n,m}$ oraz wartości

$$\eta_R = 1 - 1{,}64\ V_R \tag{15}$$

$$\eta_m = 1 - 1{,}64\ V_m \tag{16}$$

Stosunek $\frac{\eta_R}{\eta_m}$ jest – zgodnie ze wzorem (14) – równy wartości γ_{Rd}.

Z natury rzeczy wartość γ_{Rd}, zdefiniowana wzorem (14), jest obarczona szeregiem umownych założeń i stąd stanowi raczej pewną wskazówkę ogólną, określającą wartość γ_{Rd} jako funkcję uzyskanych z badań wartości V_m i V_R, niż ustalenie ścisłe, do bezwzględnego stosowania. Na wartość V_R wpływa nie tylko błąd modelu konstrukcji, lecz również błędy badania (odchyłki wymiarów, warunki brzegowe badania, sposób przyłożenia obciążenia). Istotne pozostaje tu jednak przedstawienia wartości γ_{Rd} jako funkcji stosunku wartości współczynników η_R i η_m, wyznaczonych na podstawie badań, a także stwierdzenie, że pomijanie wpływu niepewności modelu możliwe jest jedynie w przypadku, kiedy V_R niewiele różni się od V_m.



Rys. 3. Relacja wyznaczanych doświadczalnie wartości R_{exp} oraz obliczanych wartości R_m (f_m) i R_d (f_m): a – rozkład statystyczny stosunku R_{exp} / R_m (f_m) w przedziale $f_{1,m} \div f_{n,m}$ i wartość η_R; b – rozkład statystyczny wytrzymałości materiału w przedziale $f_{1,m} \div f_{n,m}$ i wartość η_m

Fig. 2. Relation between experimentally stated R_{exp} – values and calculated R_m (f_m) and R_d (f_m) – values: a – statistical distribution of ratio R_{exp} / R_m (f_m) for section $f_{1,m}$ to $f_{n,m}$ and the corresponding η_R – value; b – statistical distribution of material strength for section $f_{1,m}$ to $f_{n,m}$ and corresponding η_m – value

Przy weryfikacji doświadczalnej wzorów obliczeniowych, szczególnie wykorzystując wyniki badań innych autorów, nie zawsze dysponuje się odpowiednimi danymi na temat rozkładu statystycznego wyników badań wytrzymałości materiału.

Wówczas można przyjąć

- w przypadku wytrzymałości betonu na ściskanie $V_{cc} \approx 0{,}08$

$$\eta_m \approx 0{,}85$$

- w przypadku wytrzymałości betonu na rozciąganie $V_{ct} \approx 0{,}12$

$$\eta_m \approx 0{,}80$$

- w przypadku granicy plastyczności stali $V_s \approx 0{,}03$

$$\eta_m \approx 0{,}95$$

W przedziale od 0,80 do 0,95 mieszczą się też – jak można sądzić – wartości η_m, jeżeli nośność konstrukcji jest uzależniona od interakcji betonu i zbrojenia, tak jak to ma miejsce na przykład w przypadku ścinania lub przebicia konstrukcji żelbetowych. Jeśli przedmiotem analizy są wyniki badań różnych autorów, istnieją podstawy do przyjęcia niższej wartości η_m.

Jak zawsze, kiedy chodzi o wartości szacunkowe, decydujące znaczenie ma wyczucie inżynierskie autora oszacowania.

Bibliografia

[1] PN-EN 1990:2004 Podstawy projektowania konstrukcji

[2] Lewicki B.: Suggestions for Establishing Design Formulae – Proceedings of III CIB Symposium on Wall Structures, Warsaw June 1984, również w: Basic Notes on Model Uncertainties – CEB Bull. d'Information, No 170, 1985, rozdział: Semiprobablistic Assessment of Model Uncertainties

γ_{Rd} – FACTOR COVERING UNCERTAINTY IN RESISTANCE MODELS

Summary

Value γ_{Rd} appearing in formula (6) used to be mostly established arbitraly, by engineering feeling of the researcher. It is suggested to discipline the approach by requirement, that the design formula $R(f)$ with f_k (characteristic value of material strength, 5% fractile of statistical distribution) instead of f, results in experimental „characteristic resistance" $E_{exp,k}$ (5% fractile of test results distribution) – as shovn in Fig. 2 and 3. The value γ_{Rd} gets expressed by formula (10), where $R_{exp,m}$ – reduced assessed experimentally „characteristic resistance", f_k / f_m – reduced „characteristic material strength". In case of linear function $R(f)$ formula (14) applies, where V_m and V_R – coefficients of variation for material and tests results respectively.

Praca wpłynęła do Redakcji 22 VI 2004