

**Marek Lechman\***

## **WYZNACZANIE NAPRĘŻEŃ NORMALNYCH W PRZEKROJU KOMINA ŻELBETOWEGO OSŁABIONEGO OTWOREM Z UWZGLĘDNIENIEM FIZYCZNEJ NIELINIOWOŚCI MATERIAŁÓW**

W artykule wyprowadzono równania opisujące stan odkształcenia i naprężenia w mimośrodowo ściskanym pierścieniowym przekroju komina żelbetowego, osłabionym jednym otworem. W równaniach równowagi pominięto wpływ naprężeń rozciągających w betonie oraz założono ciągłość i warstwowość stali w przekroju komina. Przyjęto nieliniową postać związków fizycznych betonu w strefie ściskanej oraz stali w całym przekroju, przy czym założono, że beton zachowuje się jak materiał kruchy w strefie rozciąganej. Ponadto przyjęto założenie, że odkształcenia są małe i ich rozkład w przekroju jest liniowy. W równaniach równowagi przekroju został uwzględniony również wpływ dodatkowego zbrojenia wokół otworów. Do rozwiązania uzyskanych równań w postaci uwikłanej zastosowano metodę numeryczną Levenberga-Marquardta, będącą odmianą metody gradientowej Newtona. W zamieszczonych przykładach zbadano wpływ mimośrodu obciążenia i wielkości otworu na wartości odkształceń i naprężeń w betonie i stali.

### **1. Wstęp**

W artykule przedstawiono algorytm wyznaczania naprężeń normalnych w mimośrodowo ściskanym pierścieniowym przekroju żelbetowym osłabionym otworem, z uwzględnieniem fizycznej nieliniowości materiałów. Artykułem tym, powstałym w wyniku realizowanej w ITB w latach 2001–2002 pracy badawczej, autor włącza się do trwającej dyskusji nad nowelizacją normy PN-88/B-03004 dotyczącej projektowania kominów [1]. Istotą proponowanych zmian jest ewentualne wprowadzenie do tej normy metody wymiarowania, w której uwzględnia się pozasprężystą pracę i nieliniowość fizyczną materiałów.

W analizie problemu były stosowane różne podejścia. W monografii [2] podano wyjściowy układ równań oraz zamieszczono nomogramy służące do sprawdzania przekrojów osłabionych jednym i dwoma otworami przy założeniu modelu liniowo-sprę-

---

\* dr inż. – adiunkt w ITB

zystego oraz według metody stanów granicznych. W pracy [3] wykorzystano model przekroju zgodny z opracowaniem [4] w sprężysto-plastycznej analizie przekrojów osłabionych otworami. W pracy [5] podano rozwiązanie problemu w przypadku przekroju osłabionego dowolną liczbą otworów rozmieszczonych asymetrycznie, przy wykorzystaniu liniowo-sprężystych modeli materiałowych. W normach DIN [6], [7] oraz CICIND [8] zamieszczono pomocnicze nomogramy, służące do wymiarowania przekrojów osłabionych jednym lub dwoma otworami. Uzyskano je, przyjmując szereg założeń upraszczających, takich jak stały stosunek grubości do średnicy przekroju pierścieniowego, pominięcie wpływu wytrzymałości betonu na rozwiązanie, wyznaczanie odkształceń w środku grubości przekroju.

Niniejszy artykuł stanowi propozycję analitycznego i bardziej ogólnego opisu problemu, bez niektórych uproszczeń i ograniczeń przyjmowanych w cytowanych wyżej pracach.

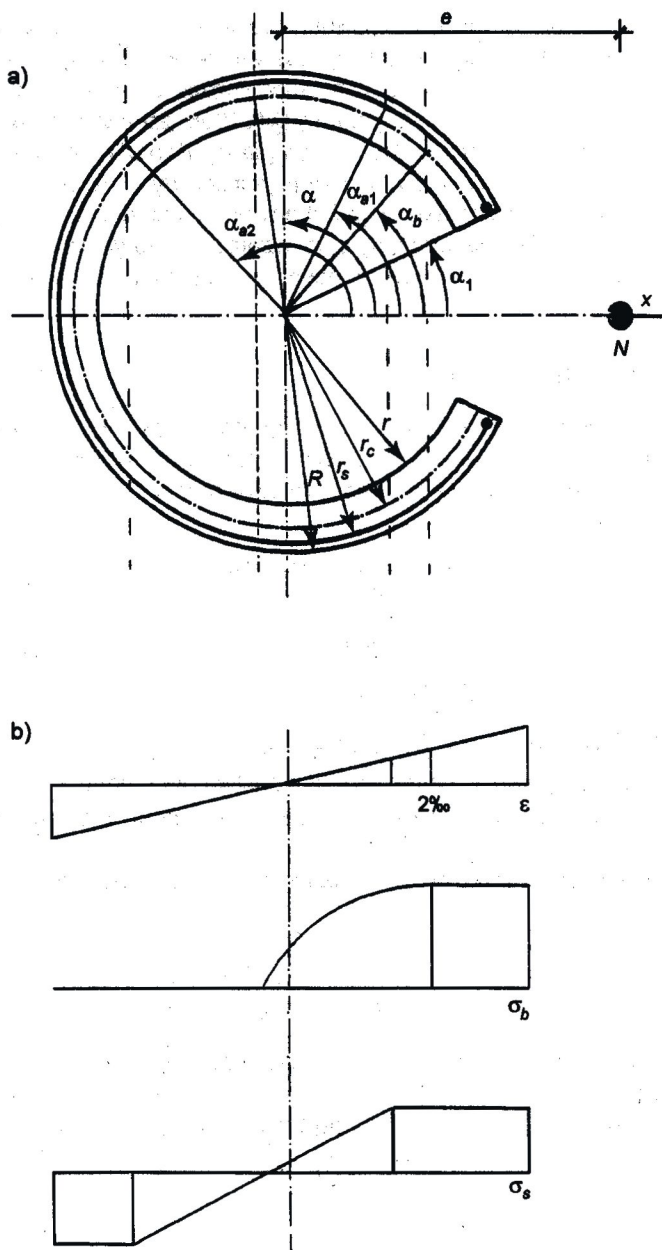
Przedstawiono równania opisujące stan odkształcenia i naprężenia w mimośrodowo ściskanym pierścieniowym przekroju żelbetowym osłabionym jednym otworem. W równaniach równowagi pominięto wpływ naprężeń rozciągających w betonie oraz założono ciągłość i warstwowość stali w przekroju komina. Do rozwiązania uzyskanych równań w postaci uwikłanej zastosowano metodę numeryczną Levenberga-Marquardta, będącą odmianą metody gradientowej Newtona. W zamieszczonych przykładach przedstawiono wpływ mimośrodu obciążenia i wielkości otworu na wartości odkształceń i naprężeń w betonie i stali.

## 2. Równania równowagi przekroju pierścieniowego żelbetowego osłabionego otworem

### 2.1. Założenia

Rozpatrywany jest przekrój pierścieniowy komina, osłabiony jednym otworem, poddany działaniu siły normalnej  $N$  na mimośrodku  $e$ . Parametrami geometrycznymi przekroju są (rys. 1):

- $R$  – promień zewnętrzny pierścienia,
- $r$  – promień wewnętrzny przekroju,
- $\alpha_1$  – kąt określający położenie otworu,
- $r_c = r_m = 0,5 (R + r)$  – promień określający położenie środków ciężkości betonu w przekroju,
- $r_s$  – promień określający położenie środków ciężkości wkładek zbrojenia w przekroju; w przypadku gdy zbrojenie przekroju jest usytuowane w dwóch warstwach,  $r_s$  oznacza promień zastępczy [5],
- $t = R - r$  – grubość pierścienia; zakłada się, że  $t$  jest o rząd wielkości mniejsze od  $R$ .



Rys. 1. Przekrój osłabiony otworem (a), b – rozkłady odkształceń  $\epsilon$ , naprężeń w betonie  $\sigma_b$  i naprężeń w stali  $\sigma_s$   
 Fig. 1. The cross-section weakened by one opening (a), b – distribution of strains  $\epsilon$ , stresses in concrete  $\sigma_b$  and stresses in steel  $\sigma_s$

W przedstawionym wyprowadzeniu równań równowagi pominięto wpływ naprężeń rozciągających w betonie oraz założono ciągłość i warstwowość stali w przekroju komina. Przyjęto nieliniową postać związków fizycznych dotyczących betonu w strefie ściskanej, natomiast stali w całym przekroju według normy DIN 1056, przy czym założono, że beton zachowuje się jak materiał kruchy w strefie rozciąganej. Ponadto przyjęto założenie, że odkształcenia są małe, a ich rozkład w przekroju jest liniowy. W równaniach równowagi przekroju uwzględniono również wpływ dodatkowego zbrojenia wokół otworów.

Rozpatrzono najbardziej niekorzystny pod względem statycznym przypadek, gdy przekrój jest obciążony symetrycznie, a otwór jest usytuowany w strefie ściskanej przekroju.

## 2.2. Równania konstytutywne

Postać równania konstytutywnego dotyczącego betonu przyjęto według paraboliczno-prostokątnego wykresu  $\sigma_b - \epsilon$ , podanego w normie DIN 1056 i w PN-B-03264 (styczeń 1999). W zakresie sprężystym równanie to przyjmuje postać

$$\sigma_b = \frac{f_{ck}}{\gamma_b} \epsilon (1 + 0,25 \epsilon)$$

$$-2 \leq \epsilon \leq 0$$
(1)

gdzie:  $\epsilon$  – odkształcenie w promilach,

$\sigma_b$  – naprężenie w betonie,

$f_{ck}$  – wytrzymałość charakterystyczna betonu na ściskanie,

$\gamma_b$  – częściowy współczynnik bezpieczeństwa dla betonu.

Jako graniczną wartość odkształcenia sprężystego betonu przyjęto w powyższym wzorze  $\epsilon = -2$ .

W zakresie plastycznym związek  $\sigma_b - \epsilon$  jest wyrażony zależnością

$$\sigma_b = - \frac{f_{ck}}{\gamma_b}$$

$$-3,5 \leq \epsilon \leq -2$$
(2)

Zgodnie z zależnościami (1) i (2) rozpatrywany zakres odkształceń w betonie dotyczy przedziału  $-3,5 \leq \epsilon \leq 0$ .

W zakresie sprężystym prawo fizyczne dotyczące stali  $\sigma_s - \epsilon$  ma odpowiednio postać

$$\sigma_s = \frac{f_{yk}}{\epsilon_s} \epsilon$$

$$\epsilon_s = \frac{f_{yk}}{E_s}$$
(3)

$$-\frac{\epsilon_s}{\gamma_s} \leq \epsilon \leq \frac{\epsilon_s}{\gamma_s}$$

gdzie:  $f_{yk}$  – charakterystyczna granica plastyczności stali zbrojeniowej,  
 $\gamma_s$  – częściowy współczynnik bezpieczeństwa dotyczący stali,  
 $E_s$  – moduł sprężystości stali.

Poza zakresem sprężystym związek  $\sigma_s - \varepsilon$  w przypadku stali jest wyrażony odpowiednio zależnościami

$$\sigma_s = \frac{f_{yk}}{\gamma_s}$$

$$\frac{\varepsilon_s}{\gamma_s} \leq \varepsilon \leq 5 \quad (4)$$

$$\sigma_s = -\frac{f_{yk}}{\gamma_s}$$

$$-5 \leq \varepsilon \leq -\frac{\varepsilon_s}{\gamma_s} \quad (5)$$

We wzorach od (3) do (5)  $\varepsilon$  jest wyrażone w promilach.

Jako graniczne odkształcenie stali przyjęto wartość 5.

### 2.3. Związki geometryczne

Korzystając z założenia, iż odkształcenia są małe, a ich rozkład w przekroju jest liniowy, otrzymuje się następującą zależność geometryczną, określającą odkształcenie w betonie w punkcie o współrzędnych  $\varphi, r_c$  (rys. 1):

$$\varepsilon_b = \frac{\cos\varphi - \cos\alpha}{\rho_R - \cos\alpha} \varepsilon' \quad (6)$$

gdzie:  $\alpha$  – kąt określający położenie osi obojętnej przekroju,  
 $\varepsilon'$  – największe odkształcenie ściskające w betonie w punkcie o współrzędnych  $(0, R)$ ,

$\varphi \in < 0, \pi >$  – współrzędna kątowa dowolnego punktu przekroju;

$$\rho_R = \frac{R}{r_c}.$$

Wszystkie kąty są mierzone od dwusiecznej kąta  $2\alpha_1$ , określającego wielkość otworu.

Analogiczny związek geometryczny w odniesieniu do stali przybiera postać

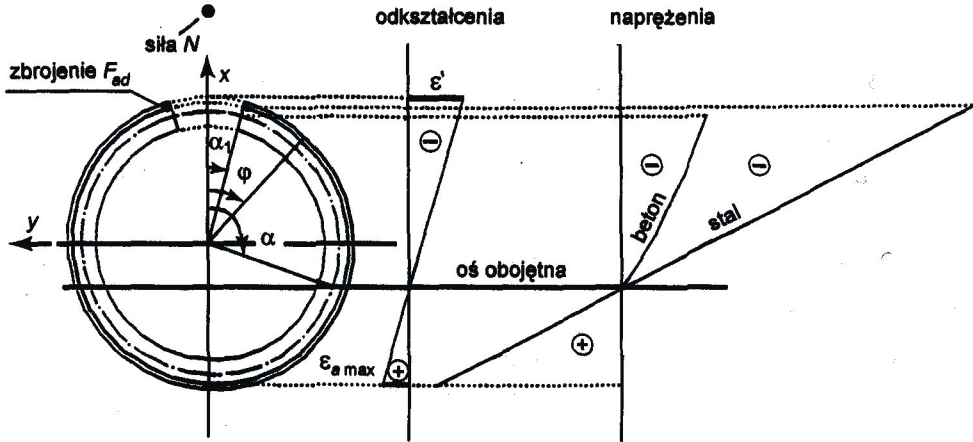
$$\varepsilon_a = \frac{\rho \cos\varphi - \cos\alpha}{\rho_R - \cos\alpha} \varepsilon' \quad (7)$$

gdzie  $\rho = \frac{r_s}{r_c}$ .

## 2.4. Równania równowagi

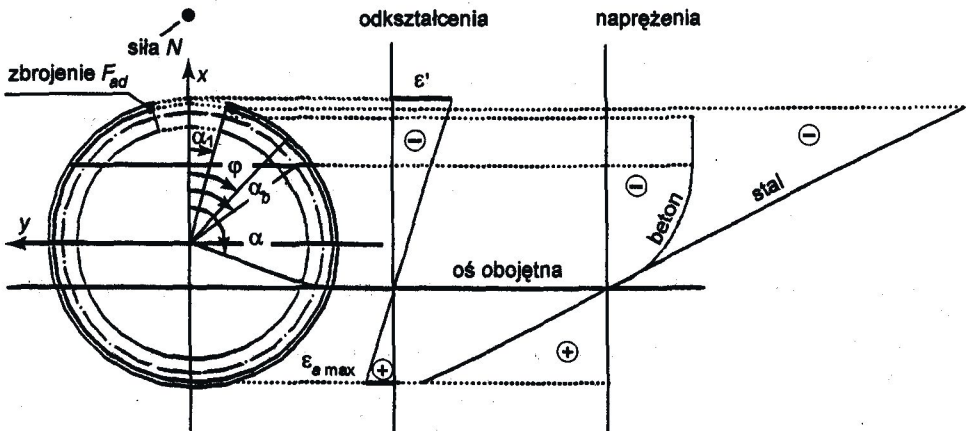
Rozwiązanie analizowanego zagadnienia wymaga teoretycznie rozpatrzenia ośmiu schematów pracy przekroju.

- Schemat 1 (rys. 2):



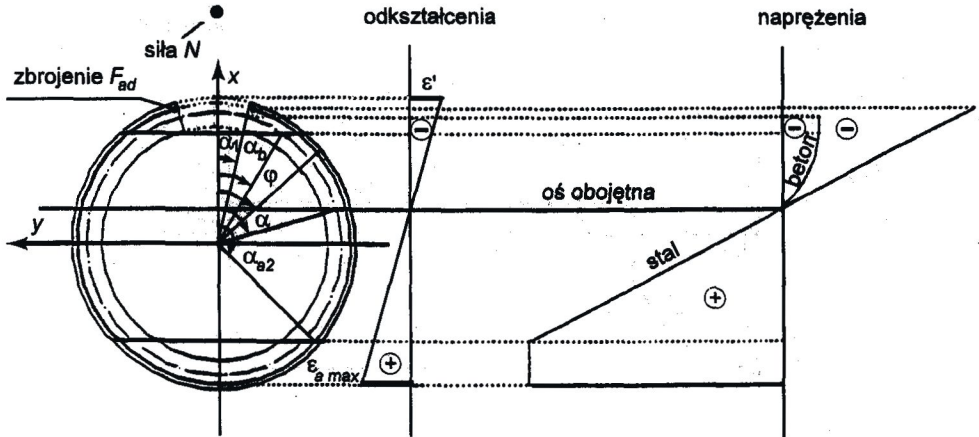
Rys. 2. Schemat pracy przekroju w fazie sprężystej  
Fig. 2. The elastic phase of the work of the cross-section

- Schemat 2 (rys. 3):



Rys. 3. Schemat pracy przekroju w fazie sprężysto-plastycznej. Uplastycznienie betonu. Sprężysta faza pracy stali  
Fig. 3. The elasto-plastic phase of the work of the cross-section. Plasticizing of concrete. The elastic phase of the work of steel

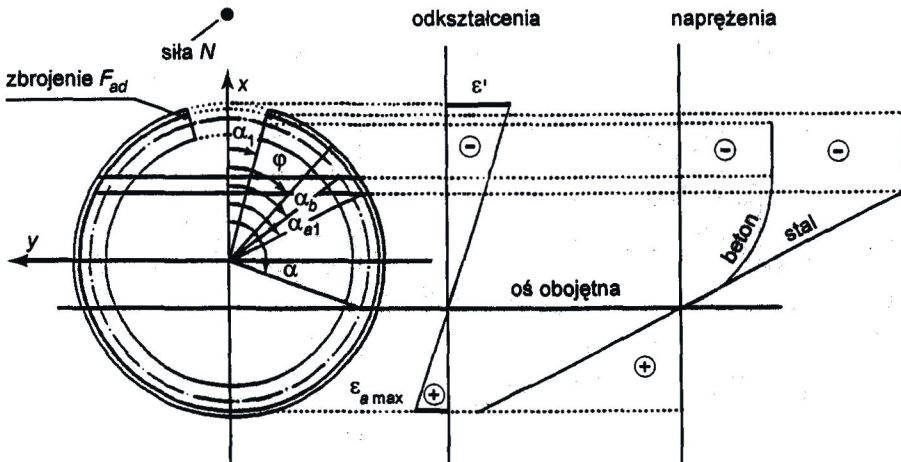
- Schemat 3 (rys. 4):



Rys. 4. Schemat pracy przekroju w fazie sprężysto-plastycznej. Uplastycznienie betonu i stali w strefie rozciąganej

Fig. 4. The elasto-plastic phase of the work of the cross-section. Plasticizing of concrete and steel in tension

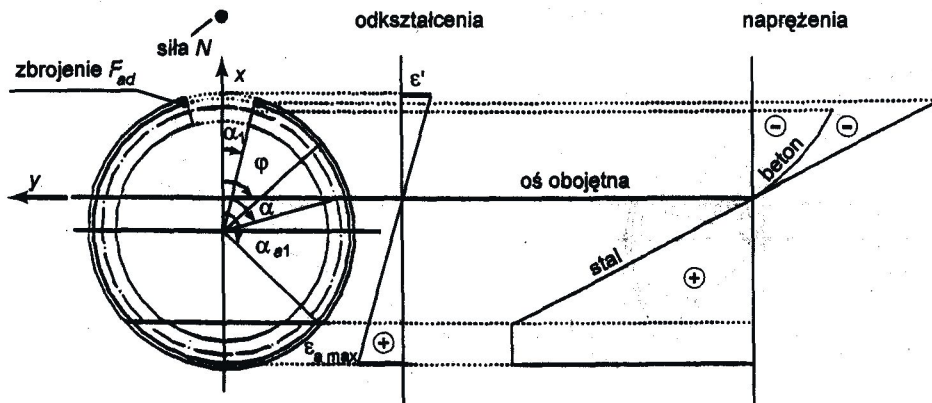
- Schemat 4 (rys. 5):



Rys. 5. Schemat pracy przekroju w fazie sprężysto-plastycznej. Uplastycznienie betonu i stali w strefie ściskanej

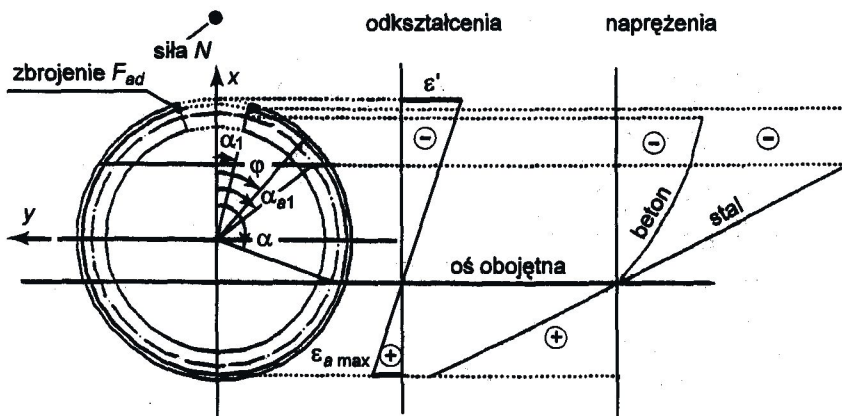
Fig. 5. The elasto-plastic phase of the work of the cross-section. Plasticizing of concrete and steel in compression

- Schemat 5 (rys. 6):



Rys. 6. Schemat pracy przekroju w fazie sprężysto-plastycznej. Sprężysta faza pracy betonu. Uplastycznienie stali w strefie rozciąganej  
 Fig. 6. The elasto-plastic phase of the work of the cross-section. The elastic phase of the work of concrete. Plasticizing of steel in tension

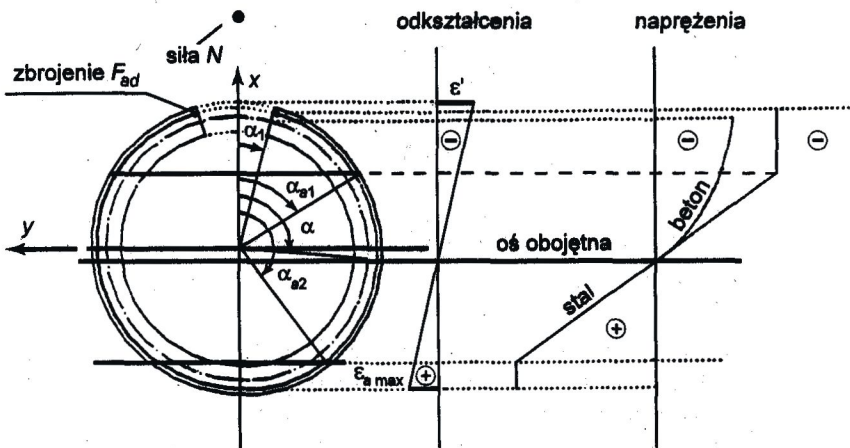
- Schemat 6 (rys. 7):



Rys. 7. Schemat pracy przekroju w fazie sprężysto-plastycznej. Sprężysta faza pracy betonu. Uplastycznienie stali w strefie ściskanej  
 Fig. 7. The elasto-plastic phase of the work of the cross-section. The elastic phase of the work of concrete. Plasticizing of steel in compression

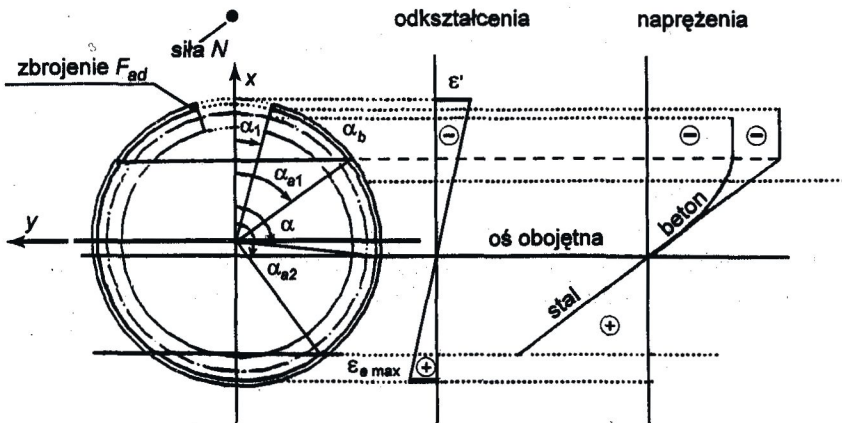


- Schemat 7 (rys. 8):



Rys. 8. Schemat pracy przekroju w fazie sprężysto-plastycznej. Sprężysta faza pracy betonu. Uplastycznienie stali w strefie ściskanej i rozciąganej  
 Fig. 8. The elasto-plastic phase of the work of the cross-section. The elastic phase of the work of concrete. Plasticizing of steel in tension and compression

- Schemat 8 (rys. 9):



Rys. 9. Schemat pracy przekroju w fazie plastycznej. Uplastycznienie betonu i stali  
 Fig. 8. The plastic phase of the work of the cross-section. Plasticizing of concrete and steel

Rozpatrzone przypadek opisany za pomocą schematu 8. Zapisując odpowiadające temu schematowi równanie równowagi sił normalnych w przekroju, otrzymujemy

$$2 \left( \int_{\alpha_1}^{\alpha_b} \sigma_b^{pl} dA_b + \int_{\alpha_b}^{\alpha} \sigma_b^{sp} dA_b \right) + 2 \left( - \int_{\alpha_1}^{\alpha_{a1}} \sigma_s^{pl} dA_s + \int_{\alpha_{a1}}^{\alpha_{a2}} \sigma_s^{sp} dA_s + \int_{\alpha_{a2}}^{\pi} \sigma_s^{pl} dA_s \right) - 2 F_{ad} \sigma_s^{pl}(\alpha_1) + N = 0 \quad (8)$$

W równaniu (8) przyjęto następujące oznaczenia:

- $\sigma_b^{pl}, \sigma_b^{sp}$  – funkcje określające naprężenie w betonie odpowiednio w zakresie plastycznym i sprężystym,
- $\sigma_s^{pl}, \sigma_s^{sp}$  – analogiczne zależności dla stali zbrojeniowej,
- $dA_b, dA_s$  – różniczka pola odpowiednio dla betonu i stali,
- $F_{ad}$  – przekrój zbrojenia dodatkowego przy otworze,
- $\alpha_b$  – kąt określający granicę strefy uplastycznienia betonu,
- $\alpha_{a1}$  – kąt określający granicę strefy uplastycznienia stali ściskanej,
- $\alpha_{a2}$  – kąt określający granicę strefy uplastycznienia stali rozciąganej.

Na podstawie założenia o małej grubości pierścienia  $dA_b + dA_s = dA = r_m t d\varphi$ . Jeżeli zdefiniujemy stopień zbrojenia  $\mu$  jako

$$\mu = \frac{dA_s}{dA} \quad (9)$$

równanie równowagi (8) przyjmie postać

$$2 r_m t (1 - \mu) \left( \int_{\alpha_1}^{\alpha_b} \sigma_b^{pl} d\varphi + \int_{\alpha_b}^{\alpha} \sigma_b^{sp} d\varphi \right) + 2 r_m t \mu \left( - \int_{\alpha_1}^{\alpha_{a1}} \sigma_s^{pl} d\varphi + \int_{\alpha_{a1}}^{\alpha_{a2}} \sigma_s^{sp} d\varphi + \int_{\alpha_{a2}}^{\pi} \sigma_s^{pl} d\varphi \right) - 2 F_{ad} \sigma_s^{pl}(\alpha_1) + N = 0 \quad (10)$$

gdzie:  $r_m = 0,5 (R + r)$  – średni promień pierścienia,  
 $t = R - r$  – grubość pierścienia.

Równanie równowagi momentów w przekroju względem prostej prostopadłej do kierunku zginania i przechodzącej przez środek geometryczny pierścienia przyjmuje postać

$$r_m t (1 - \mu) \left( \int_{\alpha_1}^{\alpha_b} \sigma_b^{pl} r_m \cos \varphi d\varphi + \int_{\alpha_b}^{\alpha} \sigma_b^{sp} r_m \cos \varphi d\varphi \right) + r_m t \mu \left( - \int_{\alpha_1}^{\alpha_{a1}} \sigma_s^{pl} r_s \cos \varphi d\varphi + \int_{\alpha_{a1}}^{\alpha_{a2}} \sigma_s^{sp} r_s \cos \varphi d\varphi + \int_{\alpha_{a2}}^{\pi} \sigma_s^{pl} r_s \cos \varphi d\varphi \right) - F_{ad} \sigma_s^{pl}(\alpha_1) r_m \cos \alpha_1 + N e = 0 \quad (11)$$

## 2.5. Wynikowa postać układu równań

Uwzględniając w równaniu równowagi sił normalnych w przekroju (10) związki geometryczne (6) i (7), równania konstytutywne (1)–(5), otrzymujemy po scałkowaniu i przekształceniach równanie

$$\begin{aligned}
 & - \frac{(1-\mu)}{\gamma_b} (\alpha_b - \alpha_1) + \frac{1-\mu}{\gamma_b} \frac{\varepsilon'}{\rho_R - \cos\alpha} \left[ X_1(\alpha, \alpha_b) + \frac{\varepsilon'}{4(\rho_R - \cos\alpha)} X_2(\alpha, \alpha_b) \right] + \\
 & + \mu \frac{f_{yk}}{F_{ck}} \left[ - \frac{1}{\gamma_s} (\alpha_{a1} - \alpha_1) + \frac{\varepsilon'}{\varepsilon_s (\rho_R - \cos\alpha)} X_3(\alpha_{a1}, \alpha_{a2}) + \frac{\pi - \alpha_{a2}}{\gamma_s} \right] + \quad (12) \\
 & + \frac{f_{yk}}{f_{ck}} \frac{F_{ad}}{\gamma_s r_m t} + \frac{N}{2 r_m t f_{ck}} = 0
 \end{aligned}$$

gdzie:

$$\begin{aligned}
 X_1(\alpha, \alpha_b) &= \sin\alpha - \sin\alpha_b - \cos\alpha (\alpha - \alpha_b) \\
 X_2(\alpha, \alpha_b) &= \left( \frac{1}{2} + \cos^2\alpha \right) (\alpha - \alpha_b) + \frac{1}{4} (\sin 2\alpha - \sin 2\alpha_b) - 2 \cos\alpha (\sin\alpha - \sin\alpha_b) \quad (13) \\
 X_3(\alpha_{a1}, \alpha_{a2}) &= \rho (\sin\alpha_{a2} - \sin\alpha_{a1}) - \cos\alpha (\alpha_{a2} - \alpha_{a1})
 \end{aligned}$$

Po scałkowaniu w analogiczny sposób równania równowagi momentów (11) uzyskuje się – po przekształceniach – równanie

$$\begin{aligned}
 & - \frac{1}{2} \frac{1-\mu}{\gamma_b} (\sin\alpha_b - \sin\alpha_1) + \frac{1}{2} \frac{1-\mu}{\gamma_b} \frac{\varepsilon'}{\rho_R - \cos\alpha} \left[ Y_1(\alpha, \alpha_b) + \frac{\varepsilon'}{4(\rho_R - \cos\alpha)} Y_2(\alpha, \alpha_b) \right] + \\
 & + \frac{1}{2} \mu \frac{f_{yk}}{f_{ck}} \left[ - \frac{1}{\gamma_s} \rho (\sin\alpha_{a1} - \sin\alpha_{a1}) + \frac{\varepsilon'}{\varepsilon_s (\rho_R - \cos\alpha)} Y_3(\alpha_{a1}, \alpha_{a2}) - \frac{\rho \sin\alpha_{a2}}{\gamma_s} \right] + \quad (14) \\
 & + \left( \frac{1}{2} \frac{f_{yk}}{f_{ck}} \frac{F_{ad}}{\gamma_s r_m t} \rho \cos\alpha_1 \right) + \frac{N e}{4 r_m^2 t f_{ck}} = 0
 \end{aligned}$$

gdzie:

$$\begin{aligned}
 Y_1(\alpha, \alpha_b) &= \frac{1}{2} (\alpha - \alpha_b) + \frac{1}{4} (\sin 2\alpha - \sin 2\alpha_b) - \cos\alpha (\sin\alpha - \sin\alpha_b) \\
 Y_2(\alpha, \alpha_b) &= (1 + \cos^2\alpha) (\sin\alpha - \sin\alpha_b) - \frac{1}{3} (\sin^3\alpha - \sin^3\alpha_b) - \\
 & - \cos\alpha \left[ \alpha - \alpha_b + \frac{1}{2} (\sin 2\alpha - \sin 2\alpha_b) \right] \quad (15) \\
 Y_3(\alpha_{a1}, \alpha_{a2}) &= \rho \left\{ \rho \left[ \frac{1}{2} (\alpha_{a2} - \alpha_{a1}) + \frac{1}{4} (\sin 2\alpha_{a2} - \sin 2\alpha_{a1}) \right] - \cos\alpha (\sin\alpha_{a2} - \sin\alpha_{a1}) \right\}
 \end{aligned}$$

Zgodnie z zależnościami geometrycznymi (6) i (7) oraz równaniami konstytutywnymi od (1) do (5) zachodzą następujące zależności:

$$\frac{\cos\alpha_b - \cos\alpha}{\rho_R - \cos\alpha} \varepsilon' + 2 = 0 \quad (16)$$

$$\frac{\rho \cos\alpha_{a1} - \cos\alpha}{\rho_R - \cos\alpha} \varepsilon' + \frac{\varepsilon_s}{\gamma_s} = 0 \quad (17)$$

$$\frac{\rho \cos\alpha_{a2} - \cos\alpha}{\rho_R - \cos\alpha} \varepsilon' - \frac{\varepsilon_s}{\gamma_s} = 0 \quad (18)$$

Rozwiązanie problemu sprowadza się do znalezienia rozwiązania układu pięciu równań (12), (14), (16)–(18) z niewiadomymi  $\alpha$ ,  $\varepsilon'$ ,  $\alpha_b$ ,  $\alpha_{a1}$ ,  $\alpha_{a2}$ .

Równania (12), (14) można zapisać w następującej skróconej formie:

$$W_N(\alpha, \varepsilon', \alpha_b, \alpha_{a1}, \alpha_{a2}) + F_N^{pl} = 0 \quad (19)$$

$$W_M(\alpha, \varepsilon', \alpha_b, \alpha_{a1}, \alpha_{a2}) + F_M^{pl} = 0 \quad (20)$$

gdzie:

$$F_N^{pl} = - \frac{F_{ad}}{\gamma_s} \frac{f_{yk}}{r_m t f_{ck}} \rho \cos\alpha_1 \quad (21)$$

$$F_M^{pl} = - \frac{1}{2} \frac{F_{ad}}{\gamma_s} \frac{f_{yk}}{r_m t f_{ck}} \rho \cos\alpha_1 \quad (22)$$

są wyrazami uwzględniającymi wpływ dodatkowego zbrojenia przy otworze, natomiast  $W_N(\alpha, \varepsilon', \alpha_b, \alpha_{a1}, \alpha_{a2})$  oznacza lewą stronę równania (12) z pominięciem wyrazu  $F_N^{pl}$ , zaś  $W_M(\alpha, \varepsilon', \alpha_b, \alpha_{a1}, \alpha_{a2})$  – lewą stronę równania (14) z pominięciem wyrazu  $F_M^{pl}$ .

W przypadku sprężystej pracy zbrojenia dodatkowego przy otworze wyrazy (21), (22) przyjmują postać

$$F_N^s = \frac{F_{ad}}{\varepsilon_s} \frac{f_{yk}}{r_m t} \frac{\rho \cos\alpha_1 - \cos\alpha}{\rho_R - \cos\alpha} \varepsilon' \quad (23)$$

$$F_M^s = \frac{F_{ad}}{\varepsilon_s} \frac{f_{yk}}{r_m t} \frac{\rho \cos\alpha_1 - \cos\alpha}{\rho_R - \cos\alpha} \varepsilon' \rho \cos\alpha_1 \quad (24)$$

Zgodnie z wyżej przyjętymi oznaczeniami równania (12), (14), (16)–(18) przyjmują w przypadku pozostałych schematów pracy przekroju następujące postacie:

- Schemat 1 (rys. 2) – sprężysta faza pracy przekroju.

$$\begin{aligned} W_N(\alpha, \varepsilon', \alpha_b, \alpha_{a1}, \alpha_{a2}) + F_N^S &= 0 \\ W_M(\alpha, \varepsilon', \alpha_b, \alpha_{a1}, \alpha_{a2}) + F_M^S &= 0 \\ \alpha_b &= \alpha_1 \\ \alpha_{a1} &= \alpha_1 \\ \alpha_{a2} &= \pi \end{aligned} \quad (25)$$

- Schemat 2 (rys. 3) – uplastycznienie betonu; sprężysta faza pracy stali.

$$\begin{aligned} W_N(\alpha, \varepsilon', \alpha_b, \alpha_{a1}, \alpha_{a2}) + F_N^S &= 0 \\ W_{W_M}(\alpha, \varepsilon', \alpha_b, \alpha_{a1}, \alpha_{a2}) + F_M^S &= 0 \\ \frac{\cos\alpha_b - \cos\alpha}{\rho_R - \cos\alpha} \varepsilon' + 2 &= 0 \\ \alpha_{a1} &= \alpha_1 \\ \alpha_{a2} &= \pi \end{aligned} \quad (26)$$

- Schemat 3 (rys. 4) – uplastycznienie betonu i stali w strefie rozciąganej.

$$\begin{aligned} W_N(\alpha, \varepsilon', \alpha_b, \alpha_{a1}, \alpha_{a2}) + F_N^S &= 0 \\ W_M(\alpha, \varepsilon', \alpha_b, \alpha_{a1}, \alpha_{a2}) + F_M^S &= 0 \\ \frac{\cos\alpha_b - \cos\alpha}{\rho_R - \cos\alpha} \varepsilon' + 2 &= 0 \\ \alpha_{a1} &= \alpha_1 \\ \frac{\rho \cos\alpha_{a2} - \cos\alpha}{\rho_R - \cos\alpha} \varepsilon' - \frac{\varepsilon_s}{\gamma_s} &= 0 \end{aligned} \quad (27)$$

- Schemat 4 (rys. 5) – uplastycznienie betonu i stali w strefie ściskanej.

$$\begin{aligned} W_N(\alpha, \varepsilon', \alpha_b, \alpha_{a1}, \alpha_{a2}) + F_N^{Pl} &= 0 \\ W_M(\alpha, \varepsilon', \alpha_b, \alpha_{a1}, \alpha_{a2}) + F_M^{Pl} &= 0 \\ \frac{\cos\alpha_b - \cos\alpha}{\rho_R - \cos\alpha} \varepsilon' + 2 &= 0 \\ \frac{\rho \cos\alpha_{a1} - \cos\alpha}{\rho_R - \cos\alpha} \varepsilon' + \frac{\varepsilon_s}{\gamma_s} &= 0 \\ \alpha_{a2} &= \pi \end{aligned} \quad (28)$$

- Schemat 5 (rys. 6) – sprężysta faza pracy betonu; uplastycznienie stali w strefie rozciąganej.

$$\begin{aligned}
 W_N(\alpha, \varepsilon', \alpha_b, \alpha_{a1}, \alpha_{a2}) + F_N^s &= 0 \\
 W_M(\alpha, \varepsilon', \alpha_b, \alpha_{a1}, \alpha_{a2}) + F_M^s &= 0 \\
 \alpha_b &= \alpha_1 \\
 \alpha_{a1} &= \alpha_1 \\
 \frac{\rho \cos \alpha_{a2} - \cos \alpha}{\rho_R - \cos \alpha} \varepsilon' - \frac{\varepsilon_s}{\gamma_s} &= 0
 \end{aligned} \tag{29}$$

- Schemat 6 (rys. 7) – sprężysta faza pracy betonu; uplastycznienie stali w strefie ściskanej.

$$\begin{aligned}
 W_N(\alpha, \varepsilon', \alpha_b, \alpha_{a1}, \alpha_{a2}) + F_N^{pl} &= 0 \\
 W_M(\alpha, \varepsilon', \alpha_b, \alpha_{a1}, \alpha_{a2}) + F_M^{pl} &= 0 \\
 \alpha_b &= \alpha_1 \\
 \frac{\rho \cos \alpha_{a1} - \cos \alpha}{\rho_R - \cos \alpha} \varepsilon' + \frac{\varepsilon_s}{\gamma_s} &= 0 \\
 \alpha_{a2} &= \pi
 \end{aligned} \tag{30}$$

- Schemat 7 (rys. 8) – sprężysta faza pracy betonu; uplastycznienie stali w strefie ściskanej i rozciąganej.

$$\begin{aligned}
 W_N(\alpha, \varepsilon', \alpha_b, \alpha_{a1}, \alpha_{a2}) + F_N^{pl} &= 0 \\
 W_M(\alpha, \varepsilon', \alpha_b, \alpha_{a1}, \alpha_{a2}) + F_M^{pl} &= 0 \\
 \alpha_b &= \alpha_1 \\
 \frac{\rho \cos \alpha_{a1} - \cos \alpha}{\rho_R - \cos \alpha} \varepsilon' + \frac{\varepsilon_s}{\gamma_s} &= 0 \\
 \frac{\rho \cos \alpha_{a2} - \cos \alpha}{\rho_R - \cos \alpha} \varepsilon' - \frac{\varepsilon_s}{\gamma_s} &= 0
 \end{aligned} \tag{31}$$

Podstawiając w równaniach od (12) do (31)  $\alpha_1 = 0$ ,  $F_{ad} = 0$ , uzyskuje się równania opisujące stan odkształcenia (naprężenia) w pełnym przekroju pierścieniowym.

### 3. Algorytm rozwiązania

Rozwiązanie rozpatrywanego zagadnienia przebiega według następującego algorytmu:

1. Zakłada się sprężystą fazę pracy przekroju, opisywaną układem równań postaci (25).
2. Równania (25) rozwiązuje się numerycznie, na przykład metodą Levenberga-Marquardta lub metodą optymalizacji globalnej, wyznaczając wartości  $\alpha$ ,  $\varepsilon'$ . Na tej podstawie

określa się maksymalne wartości odkształceń w betonie i stali ściskanej oraz maksymalne wartości odkształceń w stali rozciąganej.

3. W przypadku przekroczenia granicznych odkształceń sprężystych w betonie lub/i w stali wybiera się odpowiedni schemat pracy przekroju wraz z właściwą mu postacią równań i rozwiązuje się go wyznaczając wartości  $\alpha$ ,  $\varepsilon'$ ,  $\alpha_b$ ,  $\alpha_{a1}$ ,  $\alpha_{a2}$  jedną z wymienionych wyżej metod.

4. Po obliczeniu maksymalnych odkształceń w betonie i w stali sprawdza się, czy odpowiadają one założonemu schematowi pracy przekroju.

5. W przypadku negatywnym modyfikuje się schemat pracy przekroju i powtarza p. 3 i 4.

Na podstawie wyznaczonych wartości  $\alpha$ ,  $\varepsilon'$ ,  $\alpha_b$ ,  $\alpha_{a1}$ ,  $\alpha_{a2}$  są określane maksymalne wartości odkształceń w betonie, stali rozciąganej i stali ściskanej oraz odpowiadające im wartości naprężeń.

Na podstawie tak sformułowanego algorytmu opracowano program komputerowy określający poszukiwane wartości odkształceń i naprężeń w mimośrodowo ściskanim pierścieniowym przekroju żelbetowym o zadanych parametrach geometrycznych i materiałowych.

### 3.1. Przykłady obliczeń

Jako przykład podstawowy rozpatrzono przekrój pierścieniowy komina żelbetowego osłabiony jednym otworem. Do analizy sprężysto-plastycznej pracy przekroju zastosowano przedstawiony wyżej algorytm rozwiązania.

Dane do obliczeń:

$$R = 4,8 \text{ m},$$

$$r = 4,22 \text{ m},$$

kąt  $\alpha_1$  określający położenie otworu – zmienny,

$$N = 16\,900 \text{ kN},$$

mimośród  $e$  – zmienny,

wytrzymałość obliczeniowa betonu na ściskanie według DIN 1056:  $\beta_b = 27 \text{ MPa}$ ,

granica plastyczności stali:  $\beta_s = 500 \text{ MPa}$ ,

$$r_c = r_m = 4,51 \text{ m},$$

$$r_s = 4,74 \text{ m};$$

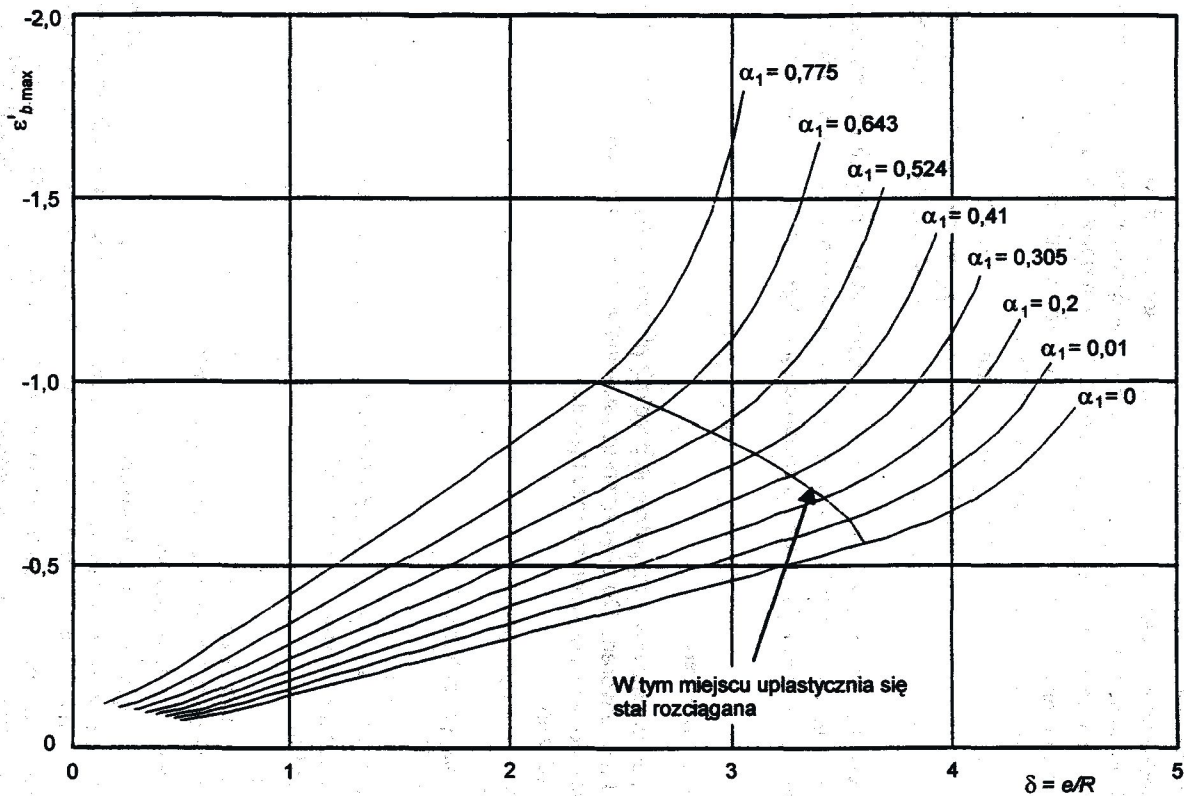
przyjęto jednostronne zewnętrzne zbrojenie trzonu:  $\mu = 1,0\%$ ,

$$F_{ad} = 0,0 \text{ (brak dodatkowego zbrojenia przy otworze),}$$

częściowe współczynniki bezpieczeństwa:  $\gamma_b = 1,2$ ;  $\gamma_s = 1,15$ .

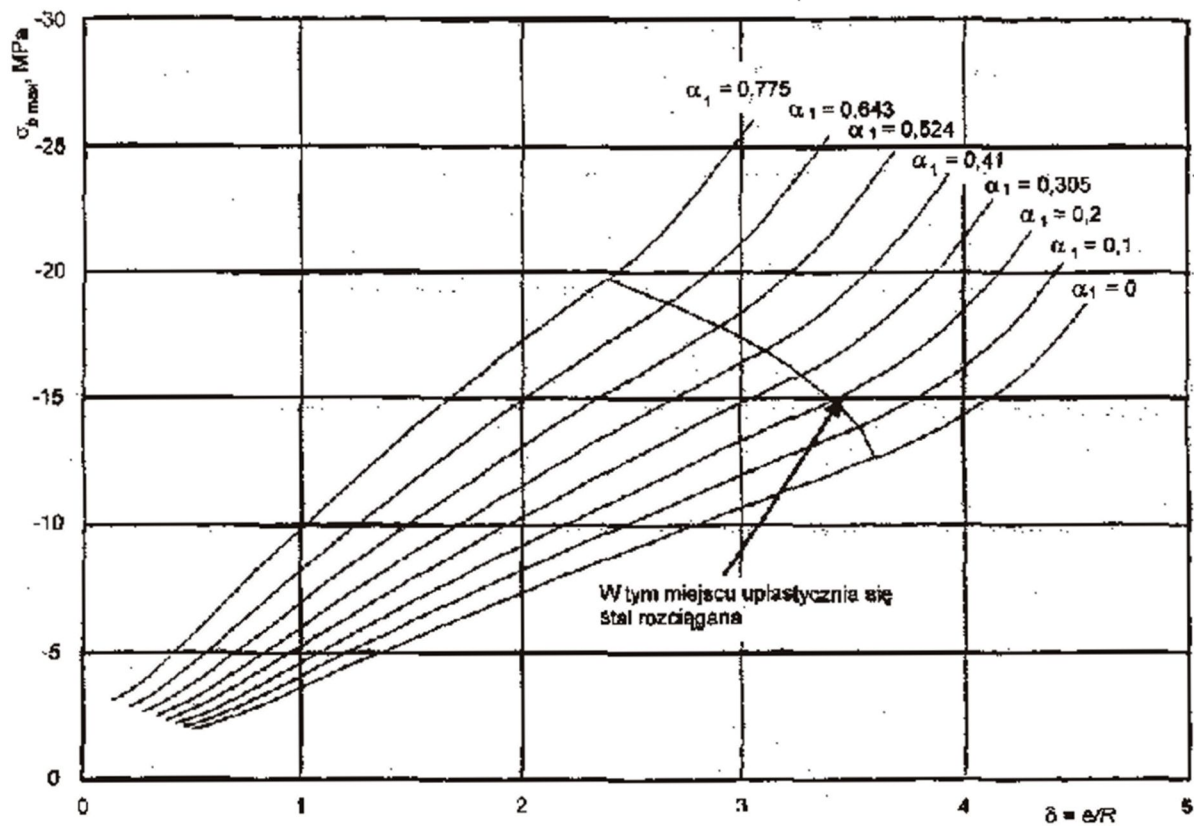
Celem obliczeń było – oprócz przetestowania poprawności przedstawionego algorytmu – zbadanie wpływu mimośrodu obciążenia i wielkości otworu na wartości odkształceń i naprężeń w betonie i stali. W tym celu wykonano serię obliczeń, wyznaczając rozwiązanie zadania w zależności od parametru  $e/R$  i kąta  $\alpha_1$  określającego wielkość otworu.

Na rysunkach 10 i 11 przedstawiono wykresy zależności maksymalnych odkształceń i naprężeń ściskających w betonie w funkcji mimośrodu obciążenia  $e$  i wielkości otworu. Na rysunkach 12 i 13 pokazano analogiczne zależności maksymalnych odkształceń i naprężeń rozciągających w stali. Wpływ mimośrodu obciążenia  $e$  i wielkości otworu na maksymalne odkształcenia i naprężenia w stali ściskanej ilustrują wykresy przedstawione na rysunkach 14 i 15.

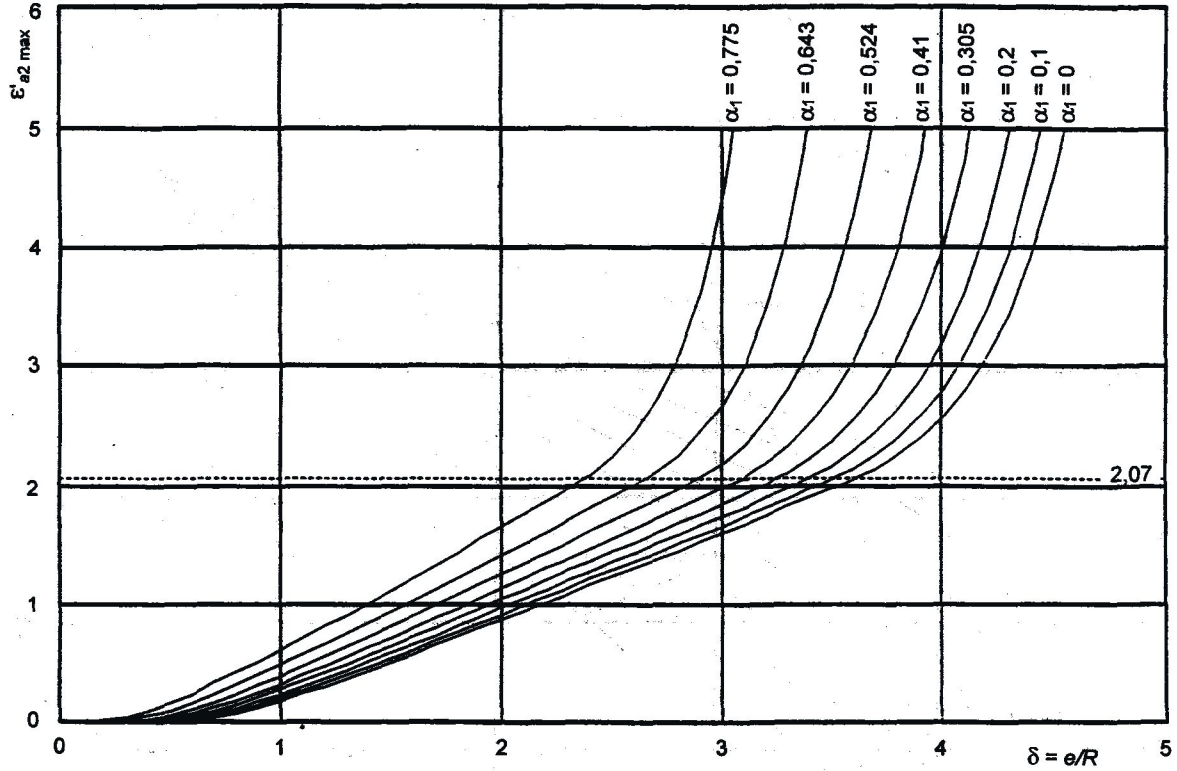


Rys. 10. Wykres zależności maksymalnych odkształceń w betonie od mimośrodowość obciążenia  $e$  i wielkości otworu  $\delta$ .  
 Fig. 10. The maximum strain in concrete versus the eccentricity of loading and the width of opening



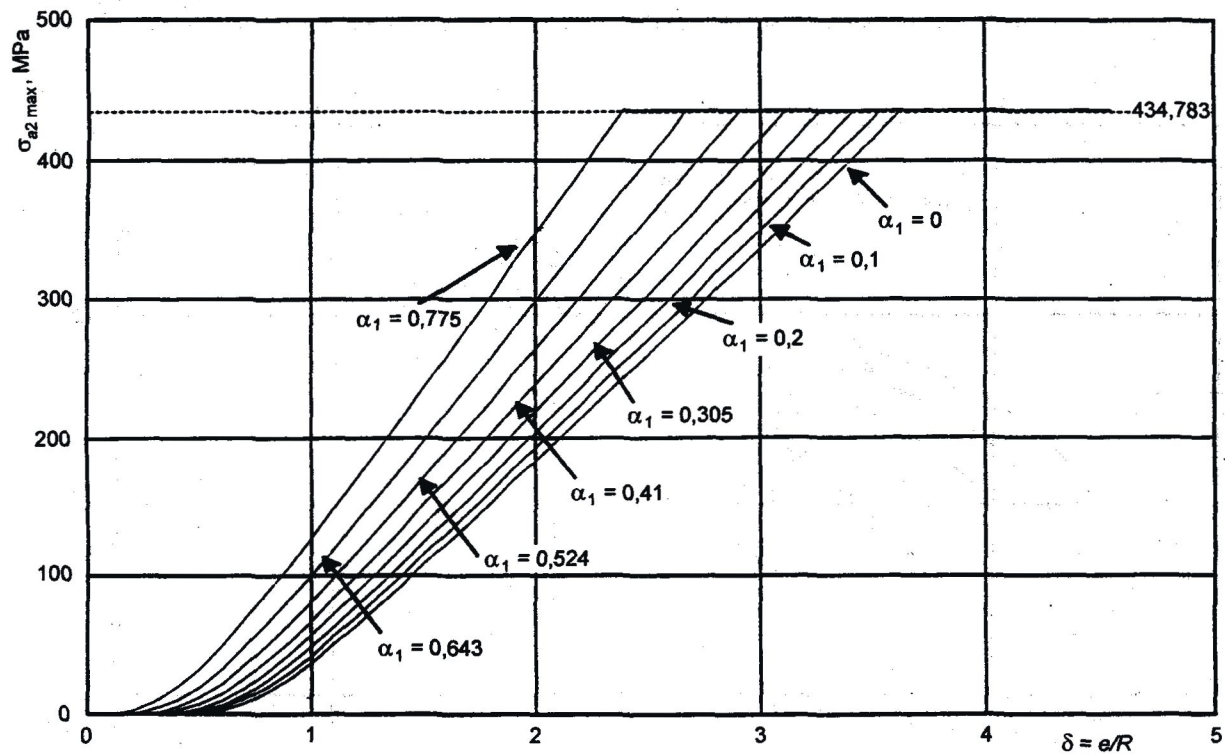


Rys. 11. Wykres zależności maksymalnych naprężeń ściskających w betonie w funkcji mimośrodowości obciążenia  $e$  i wielkości otworu  
 Fig. 11. The maximum compressive stress in concrete versus the eccentricity of loading and the width of opening



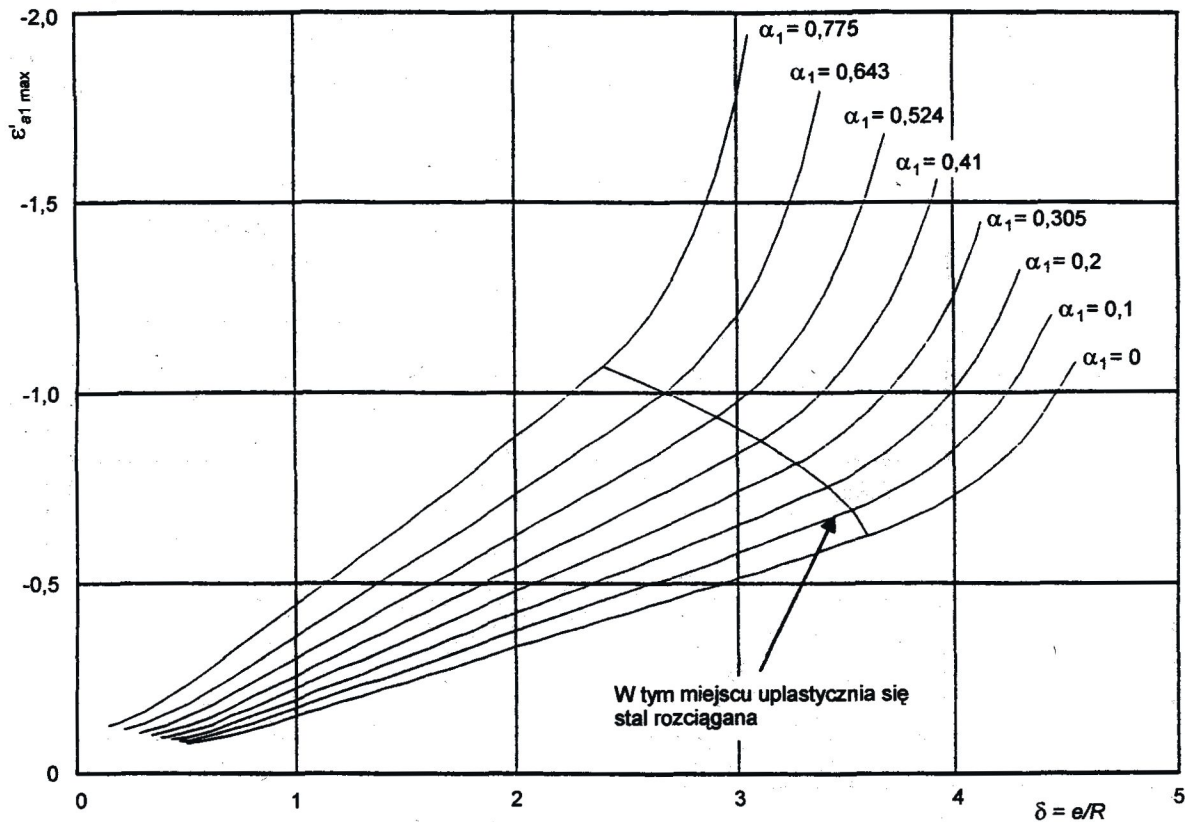
Rys. 12. Wykres zależności maksymalnych odkształceń w stali rozciąganej od mimośrodu obciążenia  $e$  i wielkości otworu

Fig. 12. The maximum strain in steel in tension versus the eccentricity of loading and the width of opening



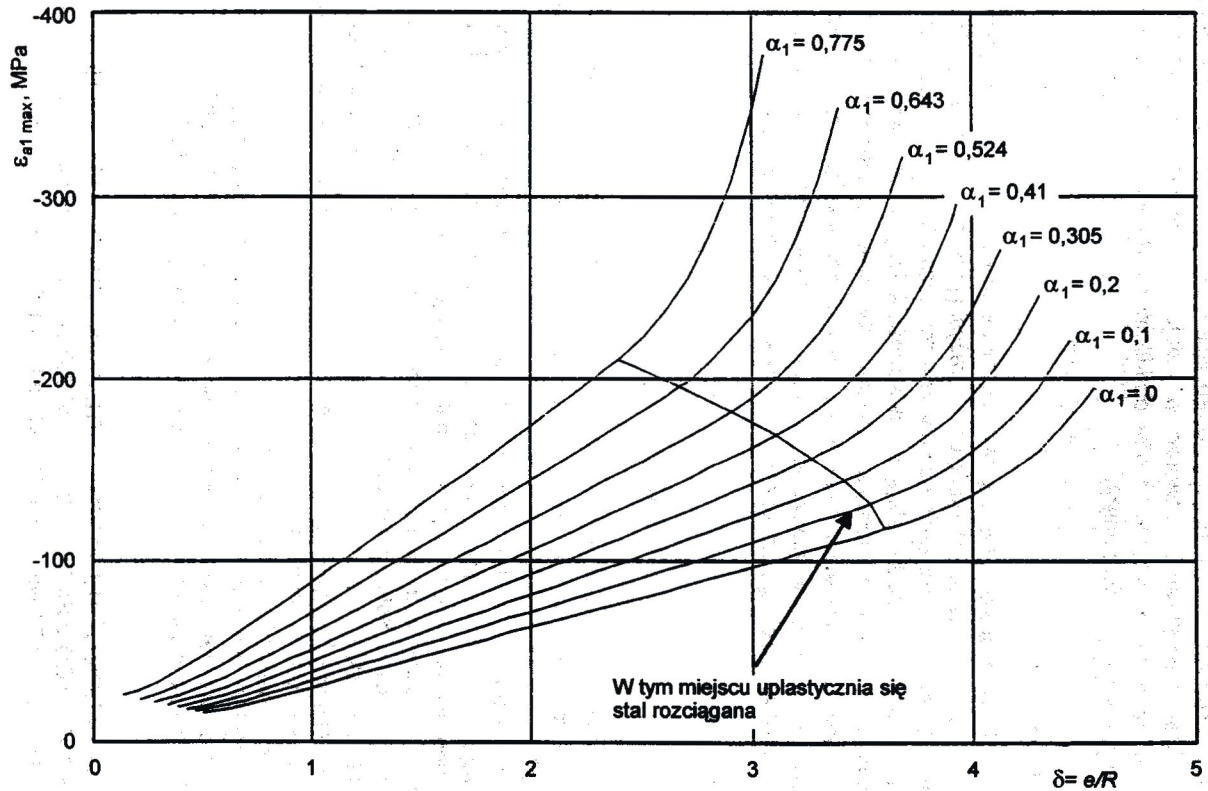
Rys. 13. Wykres zależności maksymalnych naprężeń rozciągających w stali w funkcji mimośrodu obciążenia  $e$  i wielkości otworu

Fig. 13. The maximum tensile stress in steel versus the eccentricity of loading and the width of opening



Rys. 14. Wykres zależności maksymalnych odkształceń w stali ściskanej od mimośrodu obciążenia  $e$  i wielkości otworu

Fig. 14. The maximum strain in steel in compression versus the eccentricity of loading and the width of opening



Rys. 15. Wykres zależności maksymalnych naprężeń ściskających w stali w funkcji mimośrodowości obciążenia  $e$  i wielkości otworu  
 Fig. 15. The maximum compressive stress in steel versus the eccentricity of loading and the width of opening

Przebieg zmienności wykresów wskazuje, że odkształcenia (naprężenia) w betonie i w stali narastają w sposób silnie nieliniowy po osiągnięciu granicy plastyczności w zbrojeniu rozciągającym. Osłabienie przekroju otworem wywołuje – w zależności od szerokości otworu – wzrost naprężeń w betonie i w stali od kilkunastu do kilkudziesięciu procent w stosunku do przekroju nieosłabionego.

## 5. Podsumowanie

Wykonane obliczenia potwierdziły poprawność matematyczną i fizyczną uzyskanych zależności analitycznych, opisujących pracę pozasprężystą przekroju żelbetowego osłabionego otworem. Otrzymane rozwiązania numeryczne dowodzą istnienia i jednoznaczności rozwiązań, uzyskiwanych z zadowalającą dokładnością. Uzyskane równania opisują w szczególności pełny przekrój pierścieniowy komina żelbetowego. Zaprezentowana metoda rozwiązania może być zastosowana nie tylko do sprawdzania kominów istniejących, ale również do obliczeń komina projektowanego. Uzyskane zależności analityczne można uogólnić na przypadek przekroju pierścieniowego osłabionego dwoma lub większą liczbą otworów.

## Bibliografia

- [1] PN-88/B-03004 Kominy murowane i żelbetowe. Obliczenia statyczne i projektowanie
- [2] Pinfold M.: Reinforced concrete chimneys and towers, II ed. Viewpoint Publications, London 1984
- [3] Ciesielski R., Banaś K.: Analiza pracy przekrojów wielopierścieniowych przy zginaniu z siłą osiową z uwzględnieniem fizycznej nieliniowości materiałów. PAN – Oddział w Krakowie, Komisja Budownictwa – konstrukcje i materiały budowlane, 1990
- [4] Bachmann K.: Beitrag zum Bemessungskonzept für freistehende Schornsteine aus Stahlbeton. W. Ernst u. Sohn, Berlin 1981
- [5] Lechman M., Lewiński P.: Generalized Section Model for Analysis of Reinforced Concrete Chimney Weakened by Openings, *Engineering Transactions Rozprawy Inżynierskie*, Quaterly, vol. 49, Issue 1, Warszawa 2001, pp. 4–28
- [6] DIN-1056 Freistehende Schornsteine in Massivbauart
- [7] Nieser H., Engel V.: Industrieschornsteine in Massivbau. Beuth, Berlin 1986
- [8] Model Code for Concrete Chimneys, Part A: The Shell, August 1998, CICIND
- [9] PN-B-03264 Konstrukcje betonowe, żelbetowe i sprężone (styczeń 1999)

### DETERMINATION OF THE NORMAL STRESSES IN THE CROSS-SECTION OF A REINFORCED CONCRETE CHIMNEY WEAKENED BY ONE OPENING TAKING INTO ACCOUNT THE PHYSICAL NONLINEARITY OF MATERIALS

#### Summary

In the paper the equilibrium equations are derived describing the strains and the normal stresses in the annular cross-section of a reinforced concrete chimney weakened by one opening. The normal tensile stresses in concrete are neglected, and the reinforcing steel is continuously spaced at one

layer, the location of which is determined by the equivalent radius  $r_s$ . The constitutive equations for steel are assumed to be elasto-plastic, while the concrete is described as an elasto-plastic material in compression and brittle in tension. Furthermore, the strains are assumed to be small and their distribution across the section to be linear. The additional reinforcement located in the zone of the opening is involved. The numerical Levenberg-Marquardt technique is applied for the solution of these equations. As examples, the effects of the eccentricity of the loading and the width of the opening on the normal stresses and strains in concrete and steel are presented and discussed.

*Praca wpłynęła do Redakcji 27 VIII 2002*