PRACE INSTYTUTU TECHNIKI BUDOWLANEJ – KWARTALNIK nr 4 (124) 2002
BUILDING RESEARCH INSTITUTE – QUARTERLY No 4 (124) 2002

BADANIA I STUDIA – RESEARCH AND STUDIES

Lesław Brunarski*

KRYTERIA ZGODNOŚCI WYTRZYMAŁOŚCI CHARAKTERYSTYCZNEJ MATERIAŁÓW BUDOWLANYCH W NORMACH PN-EN-ISO

Praca dotyczy podstaw ustalania normowych kryteriów zgodności metodami: a) klasycznego wnioskowania statystycznego, b) krzywych (funkcji) operacyjno-charakterystycznych, c) wnioskowania Bayesowskiego. Szczegółową analizą objęto przyjęte w PN-EN-ISO kryteria zgodności charakterystycznych wytrzymałości wybranych materiałów budowlanych (betonu, muru, kamienia), wykazując konsekwencje braku ujednoliconego podejścia statystycznego w normach.

1. Wprowadzenie

We współczesnych normach PN-EN-ISO dotyczących jakości materiałów budowlanych oraz niezawodności (bezpieczeństwa) konstrukcji wykorzystuje się pojęcie tzw. kryteriów zgodności określonych wielkości z wymaganymi w przepisach techniczno-budowlanych. Kryteria te są na ogół formułowane przy wykorzystaniu metod rachunku prawdopodobieństwa i statystyki matematycznej wymienionych w dokumencie ISO/DIS 12491:1995 *Statistical Methods for Quality Control of Building Materials and Components* [1]. Dokument ten wprawdzie dopuszcza definiowanie takich kryteriów następującymi trzema metodami:

- metodą klasyczną wnioskowania statystycznego z uwzględnieniem liczności próbek i przy założonym poziomie ufności oszacowania γ,
- metodą opartą na wykorzystaniu funkcji operacyjno-charakterystycznych (OC), przy założonych ryzykach dostawcy i odbiorcy,
- metodą wnioskowania Bayesowskiego,

ale zwraca uwagę, że rezultaty końcowe mogą się znacznie różnić od siebie. Nie wymaga uzasadnienia wniosek, że w celu zapewnienia wymaganego poziomu niezawodności (bezpieczeństwa) projektowanych lub ocenianych istniejących konstrukcji przyjmowane

* prof. dr inż.

kryteria zgodności odnośnie do różnych materiałów konstrukcyjnych powinny być ustalone w sposób jednolity. Tymczasem obserwuje się zadziwiający brak takiego podejścia w wymienionych normach, co można najlepiej zilustrować na przykładzie postanowień norm dotyczących betonu.

Wytrzymałość charakterystyczna betonu została zdefiniowana po raz pierwszy w normie ISO 3893:1977 *Concrete – Classification by compressive strength* [2] jako wartość wytrzymałości, poniżej której prawdopodobieństwo wystąpienia niższych wartości wynosi 5%. Z punktu widzenia statystyki jest to więc kwantyl rzędu 0,05. Uwzględniając fakt, że w praktyce liczba próbek n jest ograniczona, w tejże normie ISO ustalono, że w badaniach kontrolnych kwantyle te powinny być oznaczane przy poziomie ufności ich oszacowania γ od 50% do 95%. Analogiczna definicja znajdowała się w ostatniej krajowej PN-B-06250:1988 *Beton zwykły* [3], w której przy liczności próbek w serii $n = 15$ w kryterium zgodności przyjęto współczynnik $k = 1,64$.

W definicji podanej w PN-EN 206-1:2002 *Beton. Część 1: Wymagania, właściwości, produkcja i zgodność* [4] pominięto wymaganie dotyczące minimalnego poziomu ufności oceny wytrzymałości kontrolowanego betonu i bez komentarza przy estymacji kwantyli rzędu 0,05 zredukowano współczynnik k do wartości 1,48. Z kolei w EN 1990:2000 (Eurocode 1) *Basis of design, Annex D Design assisted by testing* [5] do określania charakterystycznych właściwości materiałów zalecane są wzory ze współczynnikami znacznie większymi od 1,64, wyznaczonymi na podstawie procedury Bayesowskiej.

Podobne niespójności występują w EN dotyczących innych materiałów konstrukcyjnych. Wydaje się, że przyczyną takiego stanu rzeczy jest hermetyczność poszczególnych grup roboczych opracowujących projekty EN. Stąd różne postacie kryteriów zgodności spotykane w normach zależą od indywidualnego zasobu wiedzy z dziedziny statystyki, a nawet gustów członków danej grupy.

Autor podjął pierwszą próbę zebrania opracowań (publikacji i udostępnionych materiałów niepublikowanych) na omawiany temat oraz przeprowadzenia analizy porównawczej podstaw teoretycznych kryteriów zgodności (Conformity Criteria) przyjętych w normach budowlanych PN-EN-ISO. Studium pełne, będące przedmiotem przygotowywanej do druku monografii, obejmuje kryteria zgodności ustalone za pomocą wyżej wymienionych trzech metod określania kwantyli rozkładów – zarówno normalnego, jak i rzadziej spotykanych rozkładów niesymetrycznych: logarytmo-normalnych dwu- i trójparametrowych, Gumbela I typu oraz Pearsona III typu [6]. Szczegółową analizą objęto podstawy teoretyczne aktualnych i uprzednio zalecanych normowych kryteriów zgodności (zwanych też kryteriami przyjęcia) charakterystycznej wytrzymałości wybranych materiałów budowlanych (betonu, muru, kamienia budowlanego). Wyniki analizy umożliwiają rozpoznanie przyjętych podstaw oraz krytyczną ocenę kryteriów zalecanych w innych normach dotyczących dowolnych charakterystycznych wielkości (wytrzymałości innych materiałów lub oddziaływań, na przykład wiatru). W przyszłości, przy nowelizacji norm, opracowanie może stanowić podstawę przyjęcia w nich ujednoliconego podejścia statystycznego do wszelkich kryteriów zgodności.

W niniejszej publikacji ograniczono się do analizy porównawczej kryteriów zgodności charakterystycznych wytrzymałości materiałów budowlanych.

W pracy, stosując zalecane w obowiązującej PN symbole angielskie, pozostawiono symbol SKJ jako powszechnie u nas rozumiany skrót procedur związanych ze statystyczną oceną jakości wyrobów, chociaż zgodnie z PN-ISO 3534-2:1994 *Statystyka. Statystyczne sterowanie jakością. Terminologia i symbole* obecnie symbol SKJ nie odpowiada angielskiemu odpowiednikowi SQC – *Statistical Quality Control*), oznaczającemu statystyczne sterowanie jakością i zawierającemu w sobie dawne znaczenie zakresu terminu statystycznej kontroli jakości (angielski odpowiednik SQI – *Statistical Quality Inspection*).

2. Kryteria zgodności wynikające z estymacji przedziałowej kwantyli

2.1. Definicja kwantyla rozkładu rzędu *p*

Znając funkcję gęstości $f(x)$ rozkładu normalnego ciągłej zmiennej losowej X, można określić kwantyl rzędu p, tj. wartość zmiennej losowej x_p, przy której wartość dystrybuanty wynosi $F\left(x_p\right) = p$, przy czym

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x_p} f(x)\, dx \tag{1}$$

Inaczej mówiąc, prawdopodobieństwo wystąpienia wartości zmiennej losowej mniejszych od kwantyla x_p wynosi p.

Jeśli populacja zmiennej losowej ma rozkład normalny, z wartością średnią m i odchyleniem standardowym σ, kwantyl rzędu p jest zdefiniowany wzorem

$$x_p = m + u_p\, \sigma \tag{2}$$

w którym u_p jest tzw. statystyką rozkładu normalnego, czyli kwantylem rzędu p tzw. normowanego rozkładu normalnego $f(u)$ nowej zmiennej u, określonej wzorem

$$u = \frac{x - m}{\sigma} \tag{3}$$

Normowany jest to rozkład normalny z charakterystykami $m = 0$ oraz $\sigma = 1$. Prawdopodobieństwo wystąpienia wartości u mniejszych od kwantyla u_p wynosi p; wartości kwantyli u_p w zależności od p są podane w tablicy 1.

Wartości kwantyli rzędu $p > 0,5$ są stosowane do wyznaczania **kwantyli górnych (prawostronnych)**. Kwantyle takie mogą być wykorzystywane przy oznaczaniu właściwości, przy których istotna jest ich maksymalna wartość (na przykład oddziaływania na konstrukcje).

Wartości kwantyli rzędu $p < 0,5$ są stosowane do wyznaczania **kwantyli dolnych (lewostronnych)**. Kwantyle takie są wykorzystywane przy oznaczaniu właściwości, przy których istotna jest ich wartość minimalna (na przykład wytrzymałość materiałów konstrukcyjnych).

W budownictwie najczęściej stosuje się kwantyle rzędu 0,05 albo 0,95, stąd odpowiadające im wartości statystyk wynoszą $u_p = -1{,}64$ oraz $u_p = +1{,}64$.

Tablica 1. Statystyki u_p rozkładu normalnego (kwantyle rzędu p normowanego rozkładu normalnego)
Table 1. Gaussian distribution u_p – statistics (p – order of the quantiles of the normalized Gaussian distribution)

p	0,01	0,025	0,05	0,10	0,90	0,95	0,975	0,99
u_p	–2,33	–1,96	–1,64	–1,28	1,28	1,64	1.96	2,33

2.2. Estymacja przedziałowa kwantyli

2.2.1. Istota wnioskowania statystycznego

Wnioskowanie statystyczne pozwala przez uogólnienie wyników badań zbiorowości próbnej oszacować parametry (wyznaczyć estymatory) rozkładu populacji generalnej. Podstawowe procedury wnioskowania statystycznego są następujące:

- **estymacja punktowa** (oszacowanie wartości) parametrów rozkładu wyników w populacji, m.in. wartości średniej, odchylenia standardowego oraz kwantyla,
- **estymacja przedziałowa**, czyli określenie granic przedziału, w którym z zadanym prawdopodobieństwem (przy założonym poziomie ufności) znajduje się wartość wyznaczanego parametru populacji generalnej.

Po wprowadzeniu do norm projektowania konstrukcji budowlanych **metody częściowych współczynników pewności (bezpieczeństwa)** w obliczeniach przyjmuje się wartości tzw. **charakterystycznych oddziaływań** oraz **charakterystycznych wytrzymałości materiałów**, które ze statystycznego punktu widzenia są kwantylami określonego rzędu (te ostatnie zwykle rzędu 0,05). Z uwagi na niepewność statystyczną, wynikającą z małych liczności zbiorowości próbnych, istotną stała się estymacja przedziałowa wyznaczanych kwantyli.

2.2.3. Estymacja kwantyli rozkładu normalnego

Estymację przedziałową kwantyli określonego rzędu p przeprowadza się analogicznie, jak klasyczną estymację przedziałową wartości średniej, przyjmując zamiast statystyk rozkładu Studenta, statystyki rozkładu t-niecentralnego t_γ dzielone przez pierwiastek z liczby n (por. [7], [8]).

Mając określoną na podstawie badań zbiorowości próbnej o liczności n wartość estymatora średniej x, wartości estymatorów kwantyli prawostronnych ($p > 0{,}50$) rozkładu normalnego populacji wyznacza się z następujących wzorów:

- jeśli jest znane odchylenie standardowe σ generalnej populacji zmiennej x

$$x_{p,est} = \bar{x} + k_\sigma \, \sigma \tag{4}$$

- jeśli jest znany tylko estymator odchylenia standardowego s zmiennej losowej x

$$x_{p,est} = \bar{x} + k_s \, s \tag{5}$$

gdzie s – estymator odchylenia standardowego, został określony znanym wzorem

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum (x - \bar{x})^2} \tag{6}$$

Wartości współczynników k_σ, k_s, zalecane w dokumencie ISO/DIS 12491:1995, są podane w tablicy 2. Tablica ta może służyć również do wyznaczania estymatorów kwantyli lewostronnych ($p < 0,5$). W tym celu należy wartości p zastępować przez $1-p$ i odczytane z tablic wartości k_σ, k_s stosować we wzorach (4), (5) ze znakiem minus.

Tablica 2. Współczynniki k_σ, k_s do estymacji przedziałowej kwantyli rozkładu metodą wnioskowania statystycznego (opracowane według [9])
Table 2. Coefficients k_s, k_s – used for confidence estimation of the distribution quantiles by statistical inference (worked up after [9])

Rząd kwantyla p	Liczność n	Znane σ		Znane s	
		poziom ufności γ			
		0,50	0,75	0,50	0,75
0,95	3	1,64	2,03	1,94	3,15
	6		1,92	1,75	2,34
	10		1,86	1,70	2,10
	15		1,81	1,68	1,99
	20		1,79	1,67	1,93
	30		1,77	1,66	1,87
	100		1,71	1,64	1,76

2.2.4. Estymacja kwantyli rozkładu logarytmo-normalnego dwuparametrowego

Stosowanie funkcji rozkładu logarytmo-normalnego dwuparametrowego, oznaczanego dalej symbolem LN2, do populacji o rozkładzie niesymetrycznym jest problematyczne, ale został on tu uwzględniony, ponieważ jest wykorzystany w niektórych EN (na przykład w kryteriach zgodności wytrzymałości kamienia naturalnego). Problematyczność polega na tym, że rozkład LN2 nie może być uznany za w pełni miarodajny w przypadku rozkładu niesymetrycznego zmiennej losowej, gdyż skośność (charakterystyka niesymetryczności) nie jest uwzględniona jako parametr niezależny, lecz określona wzorem

$$g_1 = \frac{s}{\bar{x}} \left[3 + \left(\frac{s}{\bar{x}} \right)^2 \right] \tag{7}$$

W przypadku rozkładu LN2 wartości współczynników k_σ, k_s podane w tablicy 2 są stosowane do parametrów

$$\bar{x}_{\ln} = \frac{1}{n} \sum \ln x$$

$$s_{\ln} = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum \left(\ln x - \bar{x}_{\ln}\right)^2} \tag{8}$$

Natomiast zamiast wzorów (4) i (5) stosuje się wzory następujące:

- jeśli jest znane odchylenie standardowe σ generalnej populacji zmiennej x

$$x_{p,est} = \exp\left(\bar{x}_{\ln} + k_\sigma\, s_{\ln}\right) \tag{9}$$

- jeśli jest znany tylko estymator odchylenia standardowego s zmiennej losowej x

$$x_{p,est} = \exp\left(\bar{x}_{\ln} + k_s\, s_{\ln}\right) \tag{10}$$

3. Kryteria zgodności ustalone za pomocą funkcji operacyjno-charakterystycznych (OC)

3.1. Definicja funkcji OC

W procedurach statystycznego sterowania jakością (dawniej SKJ) ustalonych w PN-ISO 3534-2:1994 [10] istotne znaczenie mają funkcje określające w planie badania prawdopodobieństwo, że jest spełnione kryterium zgodności w zależności od **poziomu jakości** (QL) kontrolowanej partii wyrobu lub procesu (w dalszym ciągu rozważania będą ograniczone do przyjęcia partii). W praktyce funkcje te są przedstawiane graficznie w postaci tzw. **krzywych operacyjno-charakterystycznych** (*Operating Characteristic Curve*), oznaczanych dalej w opracowaniu symbolem OC. Krzywe OC, pokazane na rysunku 1, mogą być określone przez:

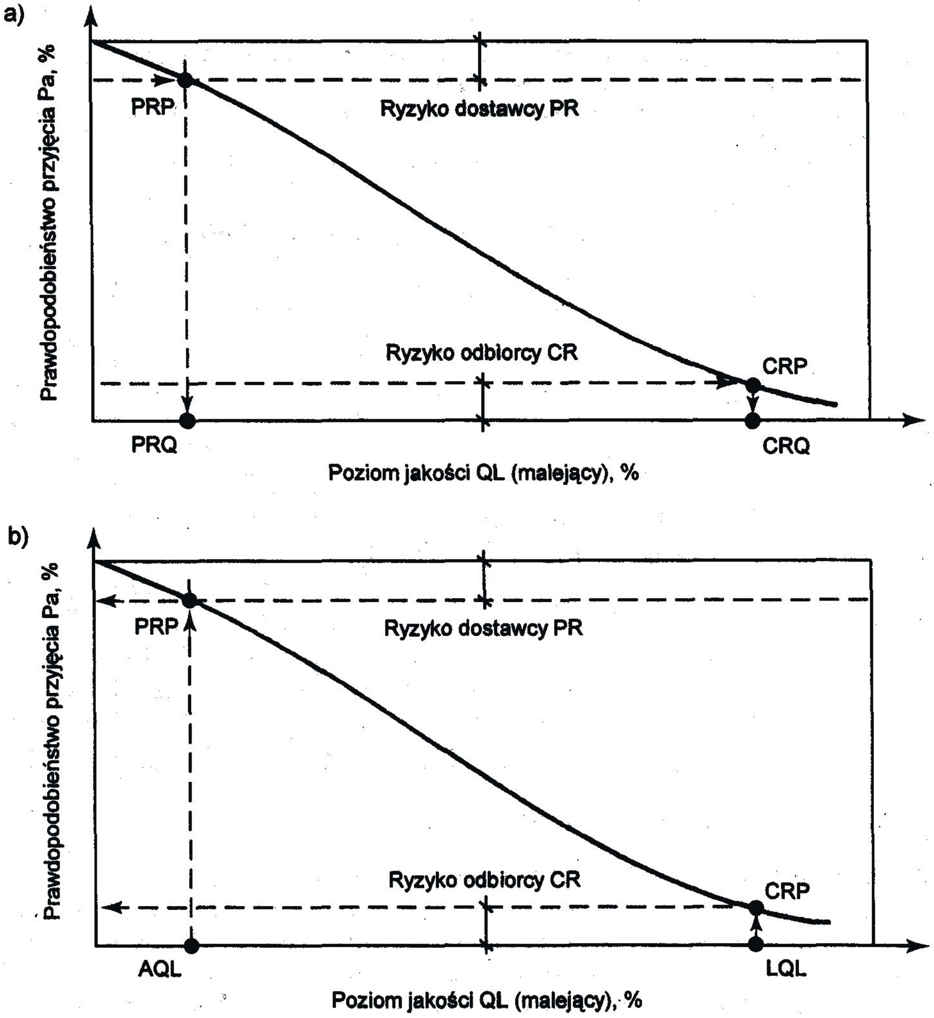
- **jakość odpowiadającą ryzyku dostawcy** (*Producer's Risk Quality* – PRQ) i **jakość odpowiadająca ryzyku odbiorcy** (*Consumer's Risk Quality* – CRQ),
- **akceptowany poziom jakości** (*Accetable Quality Level* – AQL) i **graniczny poziom jakości** (*Limiting Quality Level* – LQL).

Ryzyko odbiorcy (CR) w określonym planie kontroli wyrywkowej oznacza prawdopodobieństwo przyjęcia (Pa) partii, jeżeli poziom jej jakości ma wartość uznaną w tym planie za niezadowalającą (na przykład przyjmuje – pokazaną na wykresach OC – wartość granicznego poziomu jakości – LQL). Ryzyko odbiorcy nazywane jest też maksymalnym prawdopodobieństwem błędu II rodzaju.

Ryzyko dostawcy (PR) w określonym planie kontroli wyrywkowej oznacza prawdopodobieństwo nieprzyjęcia partii, jeżeli poziom jakości partii ma wartość uznaną w tym planie jako możliwą do przyjęcia (na przykład przyjmuje – pokazaną na wykresach OC

– wartość akceptowanego poziomu jakości – AQL). Ryzyko dostawcy (producenta) jest też nazywane maksymalnym prawdopodobieństwem błędu I rodzaju).

We wspomnianym już dokumencie ISO/DIS 12491:1995 [1] jest zalecane przyjmowanie jednakowego ryzyka dostawcy i odbiorcy na poziomie 5% (PR = CR = 0,05). Odpowiadające tym wielkościom rekomendowane maksymalne poziomy jakości są następujące: PRQ – do 4% oraz CRQ – do 15%.



Rys. 1. Krzywe OC określone [11]: a – przez ryzyko dostawcy (PR) i odbiorcy (CR), b – przez poziom jakości akceptowany (AQL) i graniczny (LQL)
Fig. 1. Operating characteristic curves (OCC) determined by [11]: a – a producer's risc (PR) and a consumer's risc (CR), b – an accetable quality level (AQL) and a limiting quality level (LQL)

Odpowiadająca podanym warunkom tablica 3, zawierająca liczby próbek n i współczynniki k w kryteriach zgodności, w zależności od tego, czy odchylenie standardowe σ jest znane lub znany jest tylko jego estymator s, podali M. Holicky i M. Vorliček [8]. Autorzy tej pracy analizowali krzywe OC odpowiadające PRQ = 1,5% oraz CRQ równym 10% i 15%, przy licznościach zbiorowości próbnych n = 35 i n = 23, stwierdzając, że przy prawdopodobieństwie przyjęcia Pa = 50% tylko przy liczności n = 35 nie został przekroczony akceptowany poziom jakości 5%

Tablica 3. Charakterystyki planów badania wyrywkowego (wartości górne – liczności n, wartości dolne – współczynniki k_σ lub k_s opracowane według [8]
Table 3. Sampling plan characteristic (sample size n – upper values, coefficients k_σ or k_s – lower values worked up after [8]

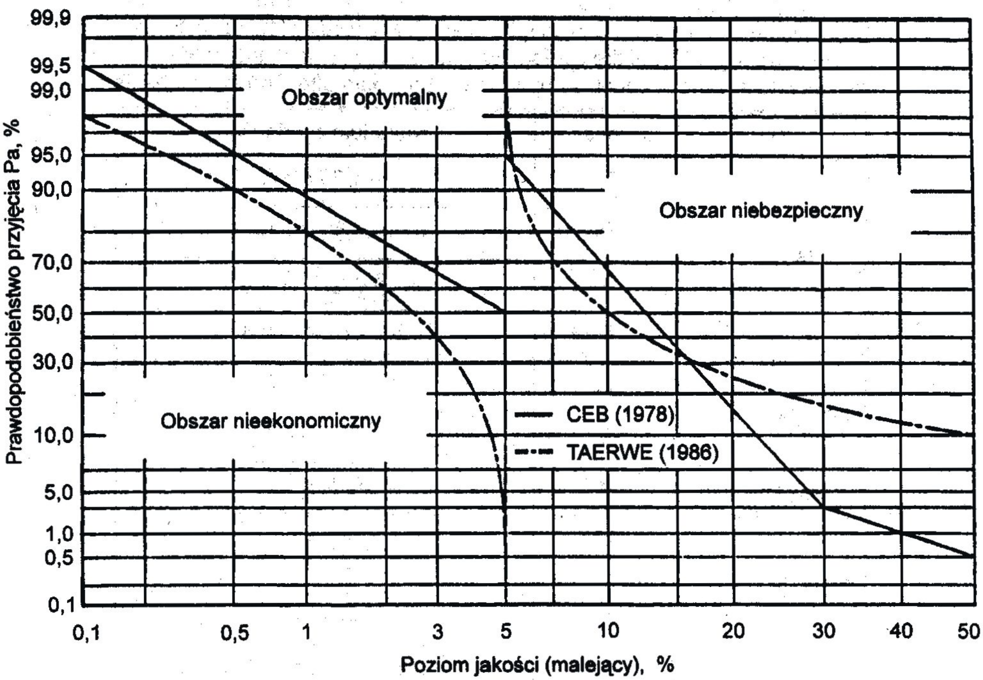
Jakość odpowiadająca ryzyku odbiorcy CRQ, %	Znane σ				Znane s			
	jakość odpowiadająca ryzyku producenta PRQ, %							
	1,0	1,5	2,5	4,0	1,0	1,5	2,5	4,0
2,5	100				120			
	2,14				2,14			
4,0	33	60			75	100		
	2,04	1,96			2,04	1,96		
6,5	17	26	55		45	65	90	
	1,92	1,84	1,74		1,92	1,84	1,74	
10,0	10	14	24	50	28	35	55	80
	1,80	1,73	1,62	1,52	1,80	1,73	1,62	1,52
15,0	7	9	13	22	19	23	28	43
	1,68	1,60	1,50	1,39	1,68	160	1,50	1,39

3.2. Procedury określania funkcji OC

3.2.1. Funkcje OC do pojedynczych kryteriów zgodności

Kryteria zgodności oparte na funkcjach OC były analizowane od roku 1966 przez Komitety CEB/CIB/FIP/RILEM i rekomendowane od 1975 r. (zob. publikacja w organie RILEM [12]). W publikacji tej, na specjalnych siatkach pozwalających na zlinearyzowanie krzywych OC, pokazano (rys. 2) granice obszarów uznawanych za nieekonomiczne oraz niebezpieczne, między którymi powinny przebiegać linie OC w przypadku kryterium zgodności typu

$$\bar{x} - \lambda\, s \geq f_k \tag{11}$$



Rys. 2. Porównanie granic optymalnych obszarów krzywych operacyjno-charakterystycznych (funkcji OC) według rekomendacji CEB/CIB/FIP/RILEM [12] oraz według propozycji L. Taerwe [13]
Fig. 2. Comparison of optimum limits of the operating characteristic curves (OCC) in accordance with CEB/CIB/FIP/RILEM [12] and according to L. Taerwe [13]

Stosowane w owym czasie w niektórych krajach kryteria przyjęcia, w tym również przyjęte w PN-B-06250:1988 *Beton zwykły* [3], zestawiono w tablicy 4.

Pierwsze krytyczne analizy pojedynczego kryterium zgodności według wzoru (3), zalecanego przez Komitety CEB/CIB/FIP/RILEM, prowadzili Q. Mascarenhas Guedes i M.O. Leite Souza z LNEC w Lizbonie (por. [14]). W celu uzyskania bardziej ogólnej oceny przedstawili oni kryterium zgodności w postaci wzoru

$$\bar{x} - \lambda\, s \geq K \tag{12}$$

gdzie:

$$K = \rho\, f_k = \frac{\rho}{\theta}\,(\mu - 1{,}645\,\sigma) \tag{13}$$

Parametry funkcji OC, w szczególności współczynnik λ, można wyznaczyć z warunku, w którym wykorzystuje się estymację przedziałową kwantyla rozkładu normalnego wytrzymałości za pomocą rozkładu t-niecentralnego.

Tablica 4. Zestawienie kryteriów zgodności stosowanych w normach dotyczących betonu w różnych krajach do roku 1990 – dane według [12] uzupełnione
Table 4. Specification of the conformity criteria used in standards refering to concrete in various countries up to the 1990 – data after [12] supplemented

Kraj	Liczność n	Kryterium zgodności
Niemcy	35	$\bar{x} - 1{,}65\, s \geq f_{ck}$
	15	$\bar{x} - 1{,}65\, \sigma \geq f_{ck}$
	3	$\bar{x} - 5 \geq f_{ck}$; $x_1 \geq f_{ck}$
	9	$\bar{x} - 5 \geq f_{ck}$; $x_1 \geq 0{,}8\, f_{ck}$
Holandia	12	$\bar{x} - 1{,}52\, s \geq f_{ck}$
	6	$\bar{x} - 1{,}52\, \sigma \geq f_{ck}$
Wielka Brytania	4	$\bar{x} - 0{,}82\, \sigma \geq f_{ck}$
Szwecja	12	$2\frac{x_1 + x_2 + \ldots x_5}{5} - x_6 \geq f_{ck}$
	6	$x_1 + x_2 - x_3 \geq f_{ck}$
USA	3	$\bar{x} \geq f_{ck}$; $x_1 \geq f_{ck} - 3{,}5$
Francja	30	$\bar{x} - 1{,}69\, s \geq f_{ck}$
Polska	15	$\bar{x} - 1{,}64\, s \geq f_{ck}$
	3	$x_1 \geq 1{,}15\, f_{ck}$ albo $x_1 \geq f_{ck}$; $\bar{x} \geq 1{,}2\, f_{ck}$

3.2.2. Funkcje OC do podwójnych kryteriów zgodności

Studium funkcji OC w przypadku tego rodzaju kryteriów zgodności przeprowadzili Q. Mascarenhas Guedes i L. Gopfert [15]. Kryteria te mają postać

$$\begin{aligned} &\text{a) } \bar{x} - \lambda\, s \geq K \\ &\text{b) } x_1 \geq K_1\, K - K_2 \end{aligned} \qquad (14)$$

gdzie: K – wielkość według wzoru (13),
x_1 – minimalna wartość x w zbiorowości próbnej.

3.2.3. Zmodyfikowane funkcje OC (optymalizacja, wpływ autokorelacji)

Istotne zmiany w podejściu do opracowywanych kryteriów zgodności w kontroli jakości wprowadził w serii swoich publikacji L. Taerwe. Powołując się na swoją niepublikowaną rozprawę doktorską [13] uzasadnił nowe, optymalne granice obszarów nieekonomicznego i niebezpiecznego wykresów krzywych OC, przedstawione w postaci ciągłych linii gładkich również na rysunku 2. Zmiany w stosunku do granic zalecanych przez Komitety CEB/CIB/FIP/RILEM nie są duże, ale wydają się uzasadnione. Ponadto L. Taerwe [16], [17] w analizach przydatności różnych kryteriów przyjęcia uwzględnił wpływ autokorelacji na funkcje OC. Z dalszych analiz wynika, że to jego sugestie przyjęto przy opracowaniu ostatecznej wersji PN-EN 206-1: 2002 dotyczącej betonu [4].

Autokorelacja jest wykorzystywana w opisach procesów stochastycznych. Termin „autokorelacja" określa współzależności między elementami tego samego ciągu obserwacji, uporządkowanymi czasowo lub przestrzennie, w przeciwieństwie do bardziej znanych korelacji dwóch lub więcej zmiennych. Analiza polega na wykorzystaniu schematu generującego ciąg obserwacji, w którym wartość każdej obserwacji jest częściowo zależna od wartości obserwacji bezpośrednio ją poprzedzających (ściślej od jednej lub wielu poprzednich obserwacji – stąd pojęcie rzędu regresji *k*). Miarą jest współczynnik autokorelacji ρ_k, którego estymatorem jest wartość r_k, określona jako stosunek autokowariancji do estymatora odchylenia standardowego.

Podsumowując wyniki przeprowadzonych analiz różnych postaci kryteriów zgodności, L. Taerwe uznał, że przy $n \geq 3$ najlepiej odpowiadającym przyjmowanym w teorii konstrukcji wymaganiom niezawodności przy poziomie 2 (Level 2) jest kryterium typu

$$\bar{x}_n \geq f_k + \lambda\, s_n \tag{15}$$

w przypadku znanego odchylenia standardowego σ przyjmujące postać

$$\bar{x}_n \geq f_k + \lambda\, \sigma \tag{16}$$

Wartości współczynników λ przy *n* od 3 do 15, obliczone z pominięciem oraz z uwzględnieniem autokorelacji typu AR(2), są podane w tablicy 5. Efektem uwzględnienia autokorelacji jest obniżenie prawdopodobieństwa przyjęcia *Pa* przy poziomie jakości QL = 5%, a tym samym zmniejszenie ryzyka odbiorcy.

Tablica 5. Współczynniki λ w kryteriach zgodności typu $\bar{x}_n \geq f_k + \lambda\, s_n$ ustalonych za pomocą funkcji OC, opracowane według [18]

Table 5. Coefficient λ – used in conformity criteria of the type $\bar{x}_n \geq f_k + \lambda\, s_n$ determined by the operating characteristic curves (OCC) worked up after [18]

Liczność *n*	Autokorelacja	
	nieuwzględniona	uwzględniona typu AR(2)
3	1,75	2,67
6	1,38	1,87
10	1,33	1,62
15	1,32	1,48

Spośród wielu analizowanych przez L. Taerwe przypadków warto zwrócić uwagę na wyniki otrzymane w wyniku zastosowania podwójnego kryterium w postaci

$$\begin{aligned} \bar{x} &\geq f_k + K \\ x_{min} &\geq f_k - k_2 \end{aligned} \tag{17}$$

W przypadku przyjęcia $K = K_2 = 3$ proste OC znajdują się częściowo w obszarze uznawanym za niebezpieczny, a więc świadczą o zwiększonym ryzyku odbiorcy.

4. Kryteria zgodności ustalone metodą wnioskowania Bayesowskiego

4.1. Definicja wnioskowania Bayesowskiego

We wnioskowaniu (prognozowaniu) Bayesowskim, alternatywnym w stosunku do klasycznego wnioskowania statystycznego na podstawie estymacji przedziałów ufności, traktuje się parametry statystyczne jako zmienne losowe o rozkładach a priori odpowiadających stanowi nagromadzonej wiedzy. Metody takiego wnioskowania są oparte na twierdzeniu i postulatach Bayesa.

Podejście Bayesa znajduje dziś szerokie zastosowanie w analizach niezawodności konstrukcji [19]. Pozwala ono kojarzyć informacje uzyskane w wyniku prób kontrolnych z wcześniej otrzymanymi rezultatami w celu określenia najbardziej prawdopodobnych wspólnych posteriorycznych charakterystyk, które dopiero stanowią podstawę oceny. Schemat jednego z możliwych wariantów wnioskowania Bayesowskiego w odniesieniu do nieniszczących metod badań in situ przedstawiono m.in. w pracy [20].

O zaakceptowaniu podejścia Bayesowskiego w statystycznej kontroli jakości świadczy jego włączenie do dokumentu ISO/DIS 12491:1995 [1].

4.2. Estymacja kwantyli

4.2.1. Procedury estymacji kwantyli

Podejście Bayesowskie w tego rodzaju procedurach przyjęto w EN 1990-1:2000 (Eurocod 1) [5], w części dotyczącej wymiarowania konstrukcji wspomaganego badaniami diagnostycznymi. Podane zasady mogą być stosowane, jeżeli nie są dostatecznie znane cechy materiałów konstrukcyjnych (betonu i stali), a więc w klasycznych przypadkach diagnostyki budowlanej.

Badania diagnostyczne powinny więc prowadzić do posteriorycznych statystycznych rozkładów analizowanych cech materiału. Na podstawie tych rozkładów ustala się dopiero wartości charakterystyczne, a następnie obliczeniowe tych cech. Do wymienionego celu są wykorzystywane procedury Bayesowskie przy nieokreślonych parametrach normalnego rozkładu priorycznego. Zakłada się zupełny brak wstępnej informacji (priorycznej), informacji dotyczącej wartości średniej oraz alternatywnie: brak lub posiadanie takiej informacji dotyczącej odchylenia standardowego, a więc i współczynnika zmienności. Oczywiście jest możliwe przyjęcie niesymetrycznych funkcji rozkładu, a także znanej wstępnej wartości średniej, co w efekcie prowadzi do bardziej korzystnych wartości obliczeniowych. Podejścia takie nie są jednak przyjmowane w żadnych propozycjach normowych i z tego względu zostały tu pominięte.

Prognozowana wartość kwantyla lewostronnego rzędu p, stanowiąca wartość charakterystyczną materiału konstrukcyjnego, wynosi

$$x_p = m'' - t_\gamma s'' \sqrt{1 + \frac{1}{n''}} \tag{18}$$

gdzie t_γ jest statystyką rozkładu t-Studenta.

Jeśli prioryczne informacje są niedostępne, wtedy charakterystyki m'', n'', s'' są równoważne znanym już parametrom x, n, s, prognozowana zaś wartość kwantyla wynosi

$$x_p = \bar{x} - t_\gamma s \sqrt{1 + \frac{1}{n}} \tag{19}$$

przy czym t_γ – statystyki rozkładu t-Studenta w zależności od liczby stopni swobody $\nu = n - 1$ oraz rzędu kwantyla p są podane w tablicy 6.

Tablica 6. Statystyki rozkładu t-Studenta
Table 6. Students t_γ distribution statistics

n	Rząd kwantyla p	
	0,10	0,05
3	1,89	2,92
6	1,48	2,02
10	1,38	1,83
15	1,35	1,76
20	1,32	1,73
30	1,31	1,70
∞	1,28	1,64

W szczególnym przypadku, jeśli odchylenie standardowe σ jest znane, czyli przy nieskończenie dużej liczbie stopni swobody, wartość t_γ może być zastąpiona wartością u_p kwantyli normowanego rozkładu normalnego, podaną w tablicy 1.

4.2.2. Współczynniki k do estymacji kwantyli rozkładu normalnego

W analogii do metod wnioskowania statystycznego opartych na teorii przedziałów ufności można wprowadzić współczynnik

$$k_n = t_\gamma \sqrt{1 + \frac{1}{n}} \tag{20}$$

i przekształcić wzór (19) do postaci

$$x_{p,est} = \bar{x} - k_n s \tag{21}$$

Charakterystyczne wytrzymałości betonu stanowią kwantyle rozkładu normalnego rzędu $p = 0,05$.

Zatem w przypadku nieznanego odchylenia standardowego σ i dysponowania jedynie jego estymatorem s wartości tych kwantyli w zależności od liczby próbek kontrolnych (wyników badań n) otrzymuje się ze wzoru (21), przyjmując we wzorze (21) statystyki t_γ z tablicy 6.

Jeżeli na przykład $n = 15$ oraz $p = 0,05$, wartość t_γ wynosi 1,76, stąd ze wzoru (20) wartość $k_n = 1,82$. Obliczone w ten sposób wartości współczynników k_n są podane w trzecim wierszu tablicy 7.

W przypadku znanej wartości odchylenia σ kwantyle rzędu $p = 0,05$ można obliczyć przyjmując we wzorze (21) stałą wartość $t_\gamma = u_p = 1,64$ i wtedy współczynnik k_n wynosi

$$k_n = 1,64\sqrt{1+\frac{1}{n}} \tag{22}$$

Obliczone ze wzoru (22) wartości współczynników k_n są dane w wierszu drugim tablicy 7.

Tablica 7. Współczynniki k_n do obliczania kwantyli metodą wnioskowania Bayesowskiego

Table 7. Coefficients k_n used for quantiles calculations by the method of Bayes inference

n	3	6	10	15	20	30	∞
Znane σ	1,89	1,77	1,72	1,69	1,68	1,67	1,64
Nieznane σ	3,37	2,18	1,92	1,82	1,76	1,73	1,64

5. Analiza kryteriów zgodności przyjętych w normach PN-EN-ISO (stan w 2002 r.)

5.1. Zasady analizy kryteriów zgodności

We wspomnianej w p.1 monografii przygotowywanej przez autora przeprowadzono analizę dowolnych kryteriów zgodności z wymaganiami normowymi dotyczącymi zarówno charakterystycznych wytrzymałości materiałów konstrukcyjnych, jak i charakterystycznych obciążeń konstrukcji. W artykule poddano analizie jedynie kryteria zgodności stosowane w budownictwie do oceny wytrzymałości materiałów konstrukcyjnych. Stąd w rozważaniach dotyczących wytrzymałości przyjęto powszechnie stosowane kwantyle rzędu 0,05.

Jak wynika ze studium przeprowadzonego w rozdziałach 2–4, następujące metody rachunku prawdopodobieństwa i statystyki matematycznej mogą stanowić podstawę teoretyczną kryteriów zgodności stosowanych w budownictwie w warunkach próby kontrolnej o małej liczności:

1) wnioskowanie statystyczne,

2) funkcje (krzywe) operacyjno-charakterystyczne (OC), w tym również wyznaczone z uwzględnieniem autokorelacji,

3) prognozowanie (wnioskowanie) według teorii Bayesa.

Zgodnie z metodą pierwszą, klasycznego wnioskowania statystycznego, oznaczając wytrzymałość charakterystyczną materiału konstrukcyjnego symbolem f_k, w przypadku określenia estymatorów wartości średniej wytrzymałości x_n oraz w zależności od tego, czy jest znane odchylenie standardowe σ, czy tylko jego estymator s, kryteria zgodności powinny mieć postać

$$\begin{aligned} \bar{x} &\geq f_k + k_n \sigma \\ \bar{x} &\geq f_k + k_n s \end{aligned} \tag{23}$$

Współczynniki k_n przyjmuje się z tablicy 2 w zależności od poziomu ufności γ oraz liczności próby n. Jeśli na przykład $n = 15$ i jest znany estymator s, to zakładając poziom ufności $\gamma = 0{,}5$, współczynnik w drugim wzorze (23) powinien wynosić 1,68.

Uwzględniając wymagania zalecane w ISO/DIS 12491:1995 [1], które omawiają M. Holicky i M. Vorliček w pracy [8], nie należy stosować poziomu ufności niższego niż $\gamma = 0{,}75$. Na przykład przy $n = 15$ współczynnik we wzorze (23) powinien wynosić $k_n = 1{,}99$.

Kryteria zgodności ustalone metodą wnioskowania statystycznego znajdują się w większości dotychczasowych norm krajowych oraz norm ISO.

Przy ustalaniu kryteriów przyjęcia według metody drugiej, opartej na funkcjach OC, przy symbolach jak wyżej należałoby zgodnie z teoriami wyprowadzonymi przez L. Taerwe [18] przyjąć kryteria zgodności typu

$$\bar{x}_n \geq f_k + \gamma s_n \tag{24}$$

w których współczynniki γ zależne od n, obliczone bez uwzględnienia i z uwzględnieniem autokorelacji, są podane w tablicy 6.

Przyjęcie takiej zasady wymaga jednak explicite stwierdzenia, że pomija się wymagania ustalone w normie ISO 3893:1977 dotyczące estymacji kwantyla rzędu 0,5 rozkładu wytrzymałości przy poziomie ufności $\gamma \geq 0{,}5$, zakłada się zaś określone ryzyko dostawcy i odbiorcy. Skutki pominięcia tych wymagań wykazali M. Holicky i M. Vorliček w pracy [8], stwierdzając, że przy liczności próby $n = 15$ i estymowanej wartości odchylenia standardowego s, proponowana przez L. Taerwe wartość współczynnika $\lambda = 1{,}48$ zapewnia poziom ufności zaledwie równy 0,3, zwiększając w sposób istotny ryzyko odbiorcy.

Warto tu podkreślić, że w zasadzie z przeprowadzonych w rozdziale 3 analiz funkcji OC wynika brak przesłanek formalnych do aprobaty przyjmowania w podwójnych kryteriach zgodności typu

$$\begin{aligned} \bar{x} &\geq f_k + K \\ x_{\min} &\geq f_k - K_2 \end{aligned} \tag{25}$$

przy ocenie najniższych wartości wytrzymałości $x_{\min}$ w próbie małej liczności (na przykład $n = 3$) wartości K_2 różnych od zera. Natomiast nierówność pierwsza w kryterium (25) wydaje się bardziej uzasadniona od przyjmowanej w niektórych normach formy iloczynowej, czyli warunku typu

$$\bar{x} \geq K f_k \tag{26}$$

Przy ustalaniu kryteriów zgodności na podstawie wnioskowania Bayesowskiego, podobnie jak w przypadku kryteriów ustalanych na podstawie funkcji OC, nie ma możliwości formalnego uwzględnienia wymagania dotyczącego poziomu ufności γ oszacowania kwantyla.

W ustalonych metodą wnioskowania Bayesowskiego kryteriach typu

$$\bar{X}_n \geq f_k + k_n s$$
$$\bar{X}_n \geq f_k + k_n \sigma \tag{27}$$

występują współczynniki k_n, których wybrane wartości są podane w tablicy 7.

Jak wynika z porównania wartości w tablicach 7 i 2, przy małych licznościach $n < 15$ współczynniki przy nieznanym odchyleniu standardowym są zbliżone do otrzymanych w wyniku klasycznego wnioskowania statystycznego przy zalecanym w normie statystycznej ISO/DIS 12491:1995 [1] poziomie ufności bliskim $\gamma = 0,75$.

Przyjmując powyższe zasady, przeprowadzono analizy kryteriów zgodności przyjętych w wybranych normach i wytycznych, wymienionych w bibliografii [2–5], [21–24], dotyczących wytrzymałości betonu, konstrukcji murowych oraz kamienia naturalnego.

W celu ułatwienia liczbowych porównań różnych kryteriów przyjęcia, w tablicy 8 podano w zależności od liczności n zestawienie wartości współczynników k_n oznaczonych metodami:

a) wnioskowania statystycznego,

b) funkcji operacyjno-charakterystycznych,

3) wnioskowania Bayesowskiego

– w przypadkach znanego odchylenia standardowego σ bądź znanego tylko estymatora tej wielkości s.

Tablica 8. Zestawienie wybranych wartości współczynników k_n w kryteriach zgodności ustalonych różnymi metodami

Table 8. Comparison on chosen values of the k_n coefficient for conformity criteria, determined by different methods

Metoda oznaczania		Liczba próbek n				
		3	6	15	30	∞
znane odchylenie standardowe σ						
a) wnioskowanie statystyczne	$\gamma = 0,50$	1,64	1,64	1,64	1,64	1,64
	$\gamma = 0,75$	2,03	1,92	1,82	1,77	1,71
b) funkcje OC		1,30	1,30	1,30	1,30	1,30
c) wnioskowanie Bayesowskie		1,89	1,77	1,69	1,67	1,64
nieznane odchylenie standardowe σ (znany estymator s)						
a) wnioskowanie statystyczne	$\gamma = 0,50$	1,94	1,75	1,68	1,66	1,64
	$\gamma = 0,75$	3,15	2,34	1,99	1,87	1,76
b) funkcie OC (z autokorelacją)		2,67	1,87	1,48	–	–
c) wnioskowanie Bayesowskie		3,37	2,18	1,82	1,73	1,64

Jak wynika z danych w tablicy 8, wartości współczynników są bardzo różne, szczególnie w przypadku małej liczby próbek n. Jeśli na przykład $n = 3$ przy znanym estymatorze odchylenia standardowego s, wartości k_n wynoszą od 1,94 do 3,37, przy znanym zaś odchyleniu standardowym σ – od 1,30 do 2,03. Znacznie mniejsze różnice występują, jeśli $n = 15$ i zawarte są odpowiednio w przedziałach od 1,48 do 1,99 oraz od 1,30 do 1,82.

5.2. Kryteria zgodności w normach dotyczących betonu

Kryteria zgodności w odniesieniu do wytrzymałości betonu po raz pierwszy zostały sformułowane w krótkiej, jednostronicowej normie ISO 3893:1977 *Concrete – Classification by compressive strength* [2]. Wytrzymałość charakterystyczna, oznaczająca klasę betonu, jest zdefiniowana jako wartość wytrzymałości, poniżej której może się znaleźć nie więcej niż 5% zbioru wszystkich możliwych wyników badań rozpatrywanego betonu. Jest więc ona statystycznym kwantylem rozkładu rzędu 0,05. Równocześnie w normie tej jest wymagane, aby przy sprawdzaniu kryterium zgodności danego betonu, przeprowadzanym na podstawie próbki losowej prostej o liczności n, kwantyl ten był określony przy poziomie ufności nie niższym od 0,5 (dokładniej od 0,5 do 0,95).

Wymagania powyższe są sformułowane odpowiednio do procedury klasycznego wnioskowania statystycznego. W ten sposób zostały ustalone kryteria zgodności wymagane w obowiązującej w 2001 r. PN dotyczącej betonu [3].

W punkcie 5.1 PN-B-06250:1988 *Beton zwykły* przyjęto (por. [25]) dwa rodzaje kryteriów zgodności, podane tu przy zachowaniu symboli przyjętych w tej normie:

a) przy liczbie kontrolowanych próbek n mniejszej niż 15 pojedyncze kryterium typu

$$R_{i\,\min} \geq \alpha\, R_b^G \tag{28}$$

gdzie: $R_{i\,\min}$ – najmniejsza wartość wytrzymałości w badanej serii n próbek,
α – współczynnik zależny od liczby próbek w sposób następujący:

$$n = 3 - 4 \qquad \alpha = 1{,}15$$
$$n = 5 - 8 \qquad \alpha = 1{,}10$$
$$n = 9 - 14 \qquad \alpha = 1{,}05$$

R_b^G – wytrzymałość gwarantowana według Polskiej Normy.

W przypadku gdy warunek (28) nie jest spełniony, można zastosować podwójne kryterium zgodności w postaci

$$R_{i\,\min} \geq R_b^G; \qquad \bar{R} \geq 1{,}2\, R_b^G \tag{29}$$

gdzie $\bar{R}$ – średnia wartość wytrzymałości badanej serii próbek;

b) przy liczbie kontrolowanych próbek n równej lub większej niż 15 obowiązuje pojedyncze kryterium

$$\bar{R} - 1{,}64\, s \geq R_b^G \tag{30}$$

gdzie s – odchylenie standardowe wytrzymałości obliczane ze znanego wzoru (6).

W przypadku gdy odchylenie standardowe wytrzymałości *s* jest większe od wartości 0,2 *R*, zaleca się ustalenie i usunięcie przyczyn powodujących zbyt duży rozrzut wytrzymałości betonu.

Zarówno przyjęta w kryterium zgodności (30) wartość współczynnika równa 1,64 (nieznacznie różniąca się od wymaganej 1,68), jak również kryteria przy licznościach próbek w serii *n* mniejszych od 15 zostały wyprowadzone (por. [25]) metodą wnioskowania statystycznego przy założeniu poziomu ufności γ nie niższego od 0,5.

W normie PN-EN 206-1:2002 [4] charakterystyczna wytrzymałość jest zdefiniowana podobnie jak w normie ISO [2], procedury zaś sprawdzania kryteriów zgodności, nieco odmienne, zostały przedstawione w p.8 (*Kontrola zgodności i kryteria zgodności*) oraz w normatywnym załączniku B (*Badanie identyczności ze względu na wytrzymałość na ściskanie*) w sposób niżej opisany. W normie tej rozróżnia się dwa rodzaje betonów towarowych:

- beton projektowany, którego ustalone właściwości są w zamówieniu podane producentowi odpowiedzialnemu za dostarczenie betonu zgodnego z wymaganymi cechami,
- beton recepturowy, którego ustalony skład jest podany producentowi odpowiedzialnemu za dostarczenie betonu zgodnego z zamówieniem.

Jako beton towarowy jest traktowany beton dostarczony w postaci mieszanki betonowej przez osobę lub jednostkę nie będącą wykonawcą, w przeciwieństwie do betonu wytwarzanego na placu budowy przez wykonawcę na jego własny użytek.

Przy kontroli zgodności betonu projektowanego rozróżnia się dwa rodzaje produkcji: początkową i ciągłą. Za początkową uznaje się produkcję betonu do momentu otrzymania co najmniej 35 wyników badań. Jeżeli uzyskano już 35 rezultatów, ale w okresie nie dłuższym niż 12 miesięcy, można daną produkcję uznać za ciągłą.

Podane w PN-EN kryteria zgodności wytrzymałości badanego betonu z wymaganą charakterystyczną wytrzymałością (oznaczoną symbolem f_{ck}) dotyczą wartości średniej z *n* wyników badania wytrzymałości (symbol f_{cm}) oraz dowolnego pojedynczego wyniku badania wytrzymałości w danej serii próbek (symbol f_{ci}). Wszystkie wartości są podawane w MPa.

Przy produkcji początkowej wymagana liczba próbek w serii wynosi $n = 3$, a podwójne kryterium zgodności ma postać

$$f_{cm} \geq f_{ck} + 4; \quad f_{ci} \geq f_{ck} - 4 \tag{31}$$

Przy produkcji ciągłej liczba próbek w serii powinna być nie mniejsza niż $n = 15$, kryterium zaś jest następujące:

$$f_{cm} \geq f_{ck} + 1{,}48\,\sigma; \quad f_{ci} \geq f_{ck} - 4 \tag{32}$$

Wstępne odchylenie standardowe *s* oblicza się na podstawie co najmniej 35 kolejnych wyników badań wykonanych w okresie do 3 miesięcy. Obliczona wartość jest przyjmowana jako stała w kryterium zgodności (32), jeśli odchylenie standardowe s_{15} w okresie ostatnich 15 oznaczeń spełnia warunek

$$0{,}64\,\sigma \leq s_{15} \leq 1{,}37\,\sigma \tag{33}$$

Jeżeli warunek (33) nie jest spełniony, w kryteriach zgodności przyjmuje się nową wartość σ, obliczoną na podstawie ostatnich 35 oznaczeń.

Współczynnik 1,48 przyjęty we wzorze (32) oznacza odstąpienie od wymagań normy ISO 3893:1977 [2], w której po raz pierwszy zdefiniowano pojęcie klas betonu i kryteria zgodności. Równocześnie powoduje on spadek ryzyka producenta kosztem wzrostu ryzyka odbiorcy. Nie wiadomo czy świadomie, ale tak właśnie postąpili autorzy ostatecznej wersji prEN 206 [4], wykreślając równocześnie normę ISO [2] z zestawienia norm związanych (w poprzednich wersjach prEN 206 norma ISO [2] była cytowana).

W załączniku B [4] podano kryteria stosowane w dodatkowych badaniach identyczności betonu ze względu na wytrzymałość na ściskanie, uzgodnionych między producentem i odbiorcą betonu. Mogą być one wykorzystywane w badaniach sprawdzających betonów wykonywanych według zamówionej receptury. Rozróżnia się przy tym, czy wyrób (beton) lub jego produkcja są objęte systemem certyfikacji, czy też nie.

W przypadku pierwszym (z certyfikacją), w zależności od liczby próbek n, kryterium zgodności ma postać

$$\begin{array}{lll} 1)\ n=1 & & f_{ci} \geq f_{ck}-4 \\ 2)\ n=2-4 & f_{cm} \geq f_{ck}+1 & f_{ci} \geq f_{ck}-4 \\ 3)\ n=5-6 & f_{cm} \geq f_{ck}+2 & f_{ci} \geq f_{ck}-4 \end{array} \tag{34}$$

W przypadku drugim (bez certyfikacji) obowiązuje kryterium (31). Przypadek taki występuje zwykle wtedy, gdy beton wytwarzany jest bezpośrednio na budowie.

EN 1990:2000 (Eurocode 1) *Basis of design* nie dotyczy w zasadzie kryteriów zgodności materiałów konstrukcyjnych, ale zawiera procedury oszacowania ich wytrzymałości charakterystycznych lub bezpośrednio obliczeniowych na podstawie badań diagnostycznych. Odpowiednie wzory i tablice współczynników, podane w załączniku D do tej normy dotyczącym analizy statystycznej badań nośności lub właściwości materiału, są oparte na metodzie wnioskowania Bayesowskiego, przy zastosowaniu nieco innych oznaczeń niż podane wyżej w rozdziale 4.

W omawianej normie, przyjmując do rozważań rozkład normalny właściwości materiału, zaznaczono, że w praktyce mogą być bardziej użyteczne inne rozkłady (na przyklad logarytmo-normalny) oraz, że wykorzystanie pewnych uprzednich wiadomości na temat wartości średniej może prowadzić do korzystniejszych wartości obliczeniowych. Stwierdzono jednak równocześnie, że postępowanie w takich przypadkach wykracza poza zakres przedmiotowej normy.

Z analizą kryteriów zgodności betonu wiąże się podana w normie metoda oceny wartości obliczeniowej wytrzymałości materiału za pośrednictwem jego wartości charakterystycznej. Wartość charakterystyczną, oznaczoną w normie przez X_k, określa się ze wzoru

$$X_k = m_x\left(1 - k_n V_x\right) \tag{35}$$

gdzie: m_x – wartość średnia z próby o liczności n, oznaczana wyżej symbolem x_n,
V_x – współczynnik zmienności, równy

$$V_x = \frac{s_x}{m_x} \tag{36}$$

s_x – odchylenie standardowe, oznaczane we wzorze (30) przez s,

Wartości k_n są podane w normie w tablicy identycznej jak tablica 7. W komentarzu do tej tablicy zaznaczono, że uwzględnia się dwa przypadki:

1) współczynnik zmienności V_x jest znany a priori na podstawie wcześniejszych informacji; informację tę może przynieść analiza wcześniej wykonanych badań w podobnych warunkach, przy czym podobieństwo warunków ocenia się kierując się rozsądkiem inżynierskim – w takim przypadku należy korzystać z wiersza drugiego tablicy 7;

2) współczynnik zmienności V_x nie jest znany a priori i trzeba go określić, korzystając ze znanego wzoru

$$V_x = \frac{1}{m_x}\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum\left(x_i - m_x\right)^2} \tag{37}$$

– w takim przypadku korzysta się z wiersza trzeciego tablicy 7.

Skutki przyjmowania różnych metod wyznaczania kryteriów zgodności, czyli w praktyce różnych wartości współczynników k_n w kryteriach zgodności betonu, najlepiej ilustrują poniższe przykłady liczbowe.

Przykład 1. Na podstawie próby ściskania n = 15 próbek betonu projektowanej klasy B20 według PN-B (fk = 20 MPa) otrzymano następujące wyniki:

- średnia wytrzymałość $\bar{x}_n$ = 27 MPa,
- estymator odchylenia standardowego s = 3,7 MPa,
- najniższa wartość wytrzymałości = 19 MPa.

W przypadku przyjęcia k_n według poszczególnych metod (korzystając z tablicy 8) kwantyle rzędu 0,05 są następujące:

- metoda a

$\gamma = 0{,}50$ $k_n = 1{,}68$ $x_{0,05} = 27 - 1{,}68 \times 3{,}7 = 20{,}8$ MPa > 20 MPa

$\gamma = 0{,}75$ $k_n = 1{,}99$ $x_{0,05} = 27 - 1{,}99 \times 3{,}7 = 19{,}6$ MPa < 20 MPa

- metoda b

$k_n = 1{,}48$ $x_{0,05} = 27 - 1{,}48 \times 3{,}7 = 21{,}5$ MPa > 20 MPa

- metoda c

$k_n = 1{,}82$ $x_{0,05} = 27 - 1{,}82 \times 3{,}7 = 20{,}3$ MPa > 20 MPa

Jak widać na podstawie obliczeń, kryterium zgodności danego betonu z wymaganiami nie jest spełnione jedynie przy założeniu poziomu ufności $\gamma = 0{,}50$.

Kryteria zgodności przyjęte w analizowanych normach dotyczących betonu zwykłego są również spełnione, i tak według:

PN-EN 206 $\bar{x}_n = 27$ MPa > 20 + 1,48 × 3,7= 25,5 MPa oraz

$x_{min} = 19$ MPa > 20 – 4 = 16 MPa

EN 1990 $\bar{x}_n = 27$ MPa > 20 + 1,82 × 3,7 = 26,7 MPa

PN-B-06250 $\bar{x}_n = 27$ MPa > 20 + 1,64 × 3,7 = 26,1 MPa

Przykład 2. Na podstawie próby ściskania n = 6 próbek betonu projektowanej klasy B20 otrzymano następujące wyniki:

- średnia wytrzymałość = 27 MPa,
- estymator odchylenia standardowego $s = 3{,}7$ MPa (dopuszczono tu możliwość oznaczenia s przy liczności $n = 6$),
- najniższa wartość wytrzymałości $x_{min} = 19$ MPa.

Postępując jak w przykładzie 1, stosując poszczególne metody, otrzymano:

- metoda a

$\gamma = 0{,}50$ $k_n = 1{,}75$ $x_{0,05} = 27 + 1{,}75 \times 3{,}7 = 20{,}5$ MPa > 20 MPa

$\gamma = 0{,}75$ $k_n = 2{,}34$ $x_{0,05} = 27 + 2{,}34 \times 3{,}7 = 18{,}3$ MPa < 20 MPa

- metoda b

$k_n = 1{,}87$ $x_{0,05} = 27 + 1{,}87 \times 3{,}7 = 20{,}1$ MPa > 20 MPa

- metoda c

$k_n = 2{,}18$ $x_{0,05} = 27 + 2{,}18 \times 3{,}7 = 18{,}9$ MPa < 20 MPa

Jak widać, dany beton można zakwalifikować do klasy B20 według PN-B tylko w dwóch przypadkach.

Do podobnego wniosku dochodzi się, stosując przy $n = 6$ kryteria zgodności według poszczególnych norm, i tak:

PN-EN 206 $\bar{x}_n = 27$ MP > 20 + 2 = 22 MPa oraz

$x_{min} = 19$ MPa > 20 – 4 = 16 MPa

PN 1990 $\bar{x}_n = 27$ MPa < 20 + 2,18 × 3,7 = 28,1 MPa

PN-B-06250 $\bar{x}_n = 27$ MP > 1,2 × 20 = 24 MPa, lecz

$x_{min} = 19$ MPa < 20 MPa.

Jak widać, kryteria zgodności z wymaganiami danego betonu są spełnione tylko według PN-EN 206.

Szczególna sytuacja może zaistnieć w przypadku oceny wytrzymałości betonu in situ, na przykład na podstawie badania odwiertów pobranych z konstrukcji. W zasadzie do wykorzystania przez eksperta są istotnie różniące się między sobą kryteria zgodności przyjęte w dwóch normach: 1) PN-EN 206-1:2002 [4] oraz 2) EN 1990:2000 [5].

Kryteria zgodności zalecane w normie 1 prowadzą do wzrostu ryzyka odbiorcy, zalecane zaś w normie 2 do zaniżania diagnozowanej wytrzymałości betonu w konstrukcji.

Jako autor kryteriów zgodności [25] przyjętych w ostatniej polskiej normie dotyczącej betonu [4] uważam, że w przypadku diagnostycznych badań betonu w konstrukcji można by stosować następujące kryteria zgodności:

- przy liczbie kontrolowanych próbek n mniejszej od 15 – podwójne kryterium zgodności (przy symbolach według PN-B-06250:1988 [4]):

$$\bar{R} \geq R_b^G + K; \quad R_{i\,\min} \geq R_b^G \tag{38}$$

przy czym dyskusyjna może być wartość parametru K. Nie powinna ona być – podobnie jak w EN 206 – mniejsza niż 4 MPa oraz nie większa niż – proponowana w raporcie CEB-FIP Model Code [26] – wartość 8 MPa; jako optymalną można by uznać na przykład wartość pośrednią równą 6 MPa

- przy liczbie kontrolowanych próbek $n \geq 15$ – pojedyncze kryterium

$$\bar{R} \geq R_b^G + k\,s \tag{39}$$

w którym stosowano by współczynnik $k = 1{,}64$, czyli wartość pośrednią pomiędzy 1,48 zalecaną w normie 1 oraz 1,82 wynikającą z zaleceń normy 2.

Na zakończenie przeglądu kryteriów zgodności betonu jako osobliwość warto przytoczyć rekomendowane w różnego typu opracowaniach, dotyczących na przykład stosowania taśm z włókien węglowych, współczynniki k do określania kwantyli rozkładu powierzchniowej wytrzymałości betonu na rozciąganie. Wytrzymałość ta określana jest w próbie odrywania uprzednio przyklejonych taśm do powierzchni betonu. Na przykład w materiałach [24] podano następujące wartości tych współczynników:

$$n = 6 \qquad k = 0{,}826$$
$$n = 15 \qquad k = 0{,}455$$
$$n = 30 \qquad k = 0{,}310$$

Pomijając fakt, że podane wartości świadczą o bliskim zeru poziomie ufności kwantyla γ, stosowanie ich we wspomnianych próbach, w których wartości średnie wynoszą około 3 MPa, a odchylenia standardowe – około 0,3 MPa, jest wysoce problematyczne. Przy $n = 15$ kwantyl rozkładu byłby niższy od wartości średniej najwyżej o $0{,}3 \times 0{,}455 = 0{,}15$ MPa, a więc różnica byłaby znacznie mniejsza od 0,5 MPa, czyli praktycznie nieistotna.

5.2. Kryteria zgodności w normach dotyczących innych poza betonem materiałów budowlanych

Zgodnie z celem opracowania, jakim jest pokazanie podstaw teoretycznych pozwalających na tworzenie nowych oraz na analizy statystycznych kryteriów zgodności zalecanych w różnych normach, w rozdziale niniejszym ograniczono się do analizy kryteriów odmiennych od przyjętych w normach dotyczących betonu, stosowanych do konstrukcji murowych i kamienia naturalnego w normach EN i PN. Procedury zastosowane do wymienionych wyrobów można z powodzeniem wykorzystać do analiz kryteriów zalecanych w już istniejących oraz w przyszłych normach dotyczących innych wyrobów budowlanych.

W PN-B-03002:1999 *Konstrukcje murowe niezbrojone – Projektowanie i obliczanie* [23] są rozważane dwa przypadki:

a) jeśli w badanej serii jest spełniony warunek

$$f_{i\,\min} \geq 0{,}9\, f_{mean} \tag{40}$$

w którym symbole stosowane w omawianej normie oznaczają:

$f_{i\,\min}$ – najmniejsza wartość wytrzymałości w badanej serii n próbek,
f_{mean} – średnia wartość wytrzymałości badanej serii próbek,
v – wskaźnik zmienności wytrzymałości;

wytrzymałość charakterystyczną muru na ściskanie f_k wyznacza się ze wzoru

$$f_k = 0{,}83\, f_{mean} \tag{41}$$

Wzór (41) po przekształceniu do postaci f_{mean} = 1,2 f_k odpowiada drugiej części podwójnego kryterium (29) w PN-B-06250 [3] dotyczącej betonu;

b) jeśli warunek (41) nie jest spełniony, f_k należy wyznaczać następująco:

- jeżeli liczba n badanych elementów muru wynosi od 3 do 5 – ze wzoru

$$f_k = f_{i\,\min} \tag{42}$$

- jeżeli $n \geq 6$ – ze wzoru

$$f_k = f_{mean}\left(1 - k_n\, v\right) \tag{43}$$

w którym wartości k_n wynoszą

$n = 6$ $k_n = 2{,}18$
$n = 10$ $k_n = 1{,}92$
$n = 30$ $k_n = 1{,}73$
$n = 50$ $k_n = 1{,}64$

v – oznacza wskaźnik zmienności.

Z porównania współczynników k_n z wartościami zamieszczonymi w tablicy 8 wynika, że autorzy normy dotyczącej konstrukcji murowych przyjęli kryterium zgodności ustalone metodą wnioskowania Bayesowskiego. Nie wnikając w przyczyny tej decyzji, można tylko wyrazić zdziwienie, dlaczego podejście do konstrukcji murowych jest tak różne (wymagania zaostrzone) od przyjętego w stosunku do konstrukcji z betonu. Niezawodność (bezpieczeństwo) konstrukcji murowej oraz z betonu powinna być przecież zapewniona w jednakowym stopniu.

W EN 1926:1999 *Natural stone test methods – Determination of compressive strength* znajdują się jeszcze bardziej dyskusyjne zapisy. Przy obliczaniu wartości średniej x i odchylenia standardowego s explicite podano, że przyjęto rozkład normalny, natomiast przy obliczaniu tzw. oczekiwanej najniższej wartości (w omawianej normie symbol E), czyli kwantyla rzędu 0,05 przy wymaganym poziomie ufności $\gamma = 0{,}75$, jest stosowany dwuparametrowy rozkład logarytmo-normalny. W efekcie wartość kwantyla oblicza się ze wzoru

$$E = \exp\left(\bar{x}_{\ln} - k_s\, s_{\ln}\right) \tag{44}$$

w którym:

$$\bar{x}_{\ln} = \frac{1}{n}\sum_i \ln x_i$$

$$s_{\ln} = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_i \left(\ln x_i - \bar{x}_{\ln}\right)^2} \tag{45}$$

współczynniki zaś k_s według omawianej normy wynoszą:

$n = 3$	$k_s = 3{,}15$
$n = 6$	$k_s = 2{,}34$
$n = 15$	$k_s = 1{,}99$
$n = 30$	$k_s = 1{,}87$
$n = 50$	$k_s = 1{,}81$
$n = \infty$	$k_s = 1{,}64$

Identyczne wzory i współczynniki zastosowano w EN 12372 *Natural stone test methods – Determination of flexural strength under concentrated load.*

Z porównania podanych wartości współczynników k_s z zamieszczonymi w tablicy 8 wynika, że autorzy norm dotyczących kamienia naturalnego przyjęli kryterium zgodności ustalone metodą wnioskowania statystycznego przy zastosowaniu estymacji przedziałowej kwantyla przyjętego rozkładu logarytmo-normalnego wytrzymałości (por. p. 2.2.4). Z podanych w obu normach przykładów obliczeniowych wynika, że kwantyl obliczony w ten sposób różni się zaledwie o około 6% od kwantyla rozkładu normalnego wytrzymałości kamienia. Stąd nasuwa się pytanie o sensowność stosowania tego rodzaju kombinacji rozkładów.

6. Podsumowanie i wnioski

W pracy przeprowadzono analizę normowych kryteriów zgodności stosowanych w budownictwie do badań kontrolnych i diagnostycznych. Uwzględniono trzy możliwe sposoby formułowania tych kryteriów, w których wykorzystuje się metody rachunku prawdopodobieństwa i statystyki matematycznej, wymienione w dokumencie ISO/DIS 12491:1995 [1]:

1) wnioskowanie statystyczne,

2) funkcje (krzywe) operacyjno-charakterystyczne (OC), w tym również z uwzględnieniem autokorelacji,

3) wnioskowanie (prognozowanie) Bayesowskie.

Analizowana w rozdziale 2 metoda wnioskowania statystycznego pozwala na estymację przedziałową występujących w kryteriach zgodności kwantyli określonego rzędu rozkładu statystycznego analizowanego zbioru wielkości. Zaletą metody wnioskowania statystycznego jest explicite zakładany poziom ufności oszacowania kwantyla określonego rzędu na podstawie próby o małej liczności n. W budownictwie wykorzystywane są najczęściej kwantyle dolne rzędu 0,05 – do oszacowania charakterystycznych wytrzymałości oraz górne rzędu 0,95 – do oszacowania charakterystycznych oddziaływań. Według dokumentu ISO/DIS 12491 [1] nie zaleca się przyjmowania poziomu ufności niższego od $\gamma = 0,75$, chociaż w normie ISO [2], w której po raz pierwszy wprowadzono pojęcie wytrzymałości charakterystycznej betonu, wymagano poziomu ufności nie niższego od $\gamma = 0,5$.

Jak pokazano w rozdziale 3, przy ustalaniu kryteriów przyjęcia opartych na funkcjach operacyjno-charakterystycznych (OC) nie ma możliwości uwzględnienia wymaganego poziomu ufności oszacowania wyznaczanych kwantyli. Nie negując więc zasadności rozważań teoretycznych przeprowadzonych przez L. Taerwe [18], trzeba jednoznacznie stwierdzić, że w świetle klasycznej teorii wnioskowania statystycznego przyjmowanie tej drogi ustalania kryterium zgodności może być dyskusyjne, szczególnie z uwagi na znacząco wyższe wartości obliczanych w ten sposób kwantyli rozkładu. W efekcie następuje istotne zmniejszenie ryzyka producenta kosztem znacznego wzrostu ryzyka odbiorcy wyrobu.

W rozdziale 4 wykazano, że przy ustalaniu kryteriów przyjęcia betonu na podstawie wnioskowania Bayesowskiego – podobnie jak w przypadku kryteriów ustalanych na podstawie funkcji OC – również nie ma możliwości formalnego uwzględnienia wymaganego poziomu ufności γ oszacowania kwantyla rozkładu. Jak wynika jednak z analizy porównawczej, kwantyle obliczane w ten sposób – szczególnie w przypadku liczności poniżej $n = 15$ – są zbliżone do otrzymanych w wyniku klasycznego wnioskowania statystycznego, przy zalecanym w normie statystycznej ISO/DIS 12491:1995 [1] poziomie ufności $\gamma = 0,75$.

Na podstawie analizy porównawczej wybranych norm budowlanych przeprowadzonej w rozdziale 5 można stwierdzić, że:

- kryteria zgodności oparte na klasycznym wnioskowaniu statystycznym zostały wykorzystane w PN-B-06250:1988 [3] dotyczącej betonu (przy założeniu rozkładu normalnego wytrzymałości i oszacowaniu kwantyla na poziomie ufności $\gamma = 0,5$) oraz w EN 1926:1999 [21] i EN 12372:1999 [22] dotyczących kamienia budowlanego (w tych ostatnich przy założeniu rozkładu logarytmo-normalnego dwuparametrowego i oszacowaniu kwantyla na poziomie ufności $\gamma = 0,75$);
- kryteria zgodności oparte na funkcjach operacyjno-charakterystycznych (OC) zostały dotychczas wykorzystane tylko w PN-EN 206-1:2002 [4] dotyczącej betonu;
- kryteria zgodności oparte na wnioskowaniu Bayesowskim zostały wykorzystane w EN 1990:2000 (Eurocode 1) [5] dotyczącej podstaw projektowania konstrukcji budowlanych oraz w PN-B-03002:1999 [23] dotyczącej konstrukcji murowych.

Weryfikację powyższych stwierdzeń, jak również szybką identyfikację źródeł oraz ocenę kryteriów zgodności występujących w różnych innych normach umożliwia porównawcza tablica 8. Tablica ta powinna w przyszłości ułatwić ujednolicenie ustaleń normowych przez specjalistów uczestniczących w pracach różnych grup roboczych CEN oraz krajowych NKP (Normalizacyjnych Komisji Problemowych).

Reasumując należy negatywnie ocenić brak spójności i zbytnią dowolność form kryteriów zgodności w zatwierdzonych lub opracowywanych normach krajowych oraz międzynarodowych, w tym EN, i oczekiwać, że w przyszłości nastąpi zharmonizowanie stosowanego w nich podejścia statystycznego.

Bibliografia

[1] ISO/DIS 12491 Statistical Methods for Quality Control of Building Materials and Components

[2] ISO 3893:1977 Concrete ł Classification by compressive strength

[3] PN-B-06250:1988 (d. PN-88/B-06250) Beton zwykły

[4] prEN 206-1:2000 Concrete – Part 1: Specification, performance, production and conformity

[5] EN 1990-1:2000 Eurocode 1: Part 1: Basis of design

[6] Plate E.J.: Statistik und angewandte Wahrscheinlichkeitslehre fur Bauingenieure. Verlag Ernst & Sohn, Berlin 1993

[7] Brunarski L., Cegielski K.: Statystyki t-niecentralne do estymacji wytrzymałości materiałów. Prace ITB-kwartalnik, nr 1 (53), 1985, s. 7–13

[8] Holicky M., Vorliek M.: Fractile estimation and sampling inspection in building. Acta Polytechnica, CVUT Praha, Vol. 32, nr 1, 1992, s. 87–96

[9] Tichý M., Vorliček M.: Zdokonalovani technologie betonu pro zvyšovani jeho jakostii. ČSVTS, Praha 1988, s. 68

[10] PN-ISO 3534-2:1994 Statystyka. Statystyczne sterowanie jakością. Terminologia i symbole

[11] PN-N-01052:1982 Statystyka matematyczna. Badania statystyczne (norma wieloarkuszowa)

[12] CEB/CIB/FIP/RILEM: Recommended principles for the control of quality and the judgement of acceptability of concrete. Material and Structures, Vol. 8, 47, 1975, s. 387–403

[13] Taerwe L.: Aspects of the stochastic nature of concrete strength including compliance control (in Dutch). Doctoral thesis, Univ. Ghent 1985

[14] Mascarenhas Guedes Q., Leite Souza M.O.: Study of an operating characteristic function of the sampling inspection plan of concrete lots. Materials and Structures, Vol. 11, nr 66, 1978, s. 401–406

[15] Mascarenhas Guedes Q., Gopfert L.: Study of the risks related to conformity criteria by CEB for important lots of concrete. Materials and Structures, Vol. 16, nr 94. 1983, s. 269–273

[16] Taerwe L.: Basic concepts for conformity control of concrete.1987, s. 491–500

[17] Taerwe L.: The influence of autocorrelation on OC-lines of compliance criteria for concrete strength. Materials and Structures, Vol. 20, 1987, s. 418-427

[18] Taerwe L.: Evaluation of compound compliance criteria for concrete strength. Materials and Structures, Vol. 21, 1988, s. 13–20

[19] Murzewski J.: Bezpieczeństwo konstrukcji budowlanych. Arkady, Warszawa 1970

[20] Brunarski L.: Metodyka diagnostyki budowlanej. Prace Instytutu Techniki Budowlanej – Kwartalnik, 1–2, 1992, s. 96–105

[21] EN 1926:1999 Natural stone test methods – Determination of compressive strength

[22] EN 12372:1999 Natural stone test methods – Determination of flexural strenght under concentrated load
[23] PN-B-03002:1999 Konstrukcje murowe niezbrojone. Projektowanie i obliczanie
[24] Wzmocnienia konstrukcji mostów przez przyklejanie kompozytowych elementów zewnętrznych. Materiały instruktażowe f-my Sika, Warszawa 2001
[25] Brunarski L.: Ewolucja normowych kryteriów oceny wytrzymałości betonu na ściskanie. Prace Instytut Techniki Budowlanej – Kwartalnik, 1–2, 1990, s. 3–14
[26] Müller H.S., Hilsdorf H.K.: Constitutive relations for structural concrete. CEB Bull. d'Inform. No 217, 1993, s.19–66

CONFORMITY CRITERIA FOR THE CHARACTERISTIC STRENGTH OF BUILDING MATERIALS IN STANDARDS PN-EN-ISO

Summary

The work deals with the bases for establishing the standard conformity criteria by the methods of: a) classic statistical inference, b) Operating-Characteristic Curves, c) the Bayes inference. Established in the PN-EN-ISO conformity criteria for the characteristic strength of some chosen building materials (concrete, brickwork, stone) were detaily analyzed and the consequences of the lack of uniform statistical approach in standards were pointed out.

Praca wpłynęła do Redakcji 23 X 2002