

BADANIA I STUDIA – RESEARCH AND STUDIES

Zofia Laskowska*

ANALIZA TERMO-SPRĘŻYSTO-PLASTYCZNEGO STANU NOŚNOŚCI PRĘTOWYCH KONSTRUKCJI STALOWYCH

Przedstawiono analizę sprężysto-plastycznego stanu nośności prętowych konstrukcji stalowych z uwzględnieniem wpływu temperatury jednorodnej po długości elementów konstrukcji stalowych i niejednorodnej wzdłuż wysokości przekroju poprzecznego tych elementów. Przyjęto sprężysto-idealnie plastyczny model materiału. Omówiono algorytm programu.

1. Wstęp

W pracy podano metodę analizy numerycznej termo-sprężysto-plastycznego stanu nośności płaskich układów prętowych (ram) w celu wyznaczenia ich odporności ogniowej.

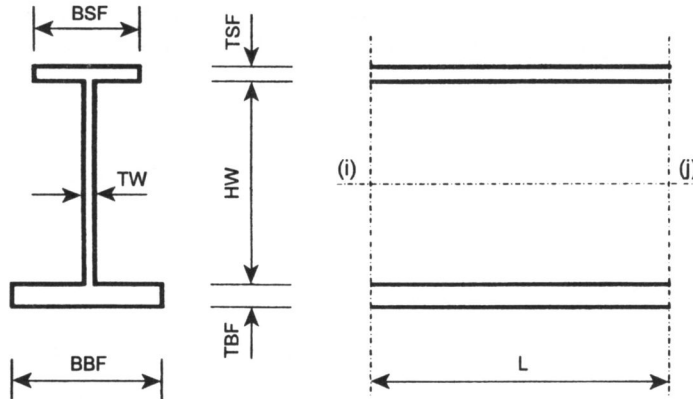
W klasycznym zagadnieniu nośności granicznej rozpatruje się ustrój poddany zwiększającym się obciążeniom statycznym. W przypadku odporności ogniowej obciążenia statyczne pozostają stałe, powstają natomiast dodatkowe siły wywołane obciążeniem termicznym, wyczerpanie nośności następuje zaś na skutek spadku charakterystyk mechanicznych materiału, a co za tym idzie i wartości granicznych uogólnionych sił wewnętrznych.

Zagadnienie polega nie na określeniu wartości obciążenia granicznego, lecz na określeniu granicznego pola temperatury konstrukcji. Pole temperatury konstrukcji jest z kolei zależną od czasu funkcją temperatury otoczenia, co pozwala na określenie czasu do zniszczenia, czyli odporności ogniowej.

2. Założenia

Analizę numeryczną przeprowadzono z wykorzystaniem metody elementów skończonych w wersji tzw. zmiennej sztywności. Za element skończony przyjęto odcinek prostej belki dwuteowej odpowiadającej odległości pomiędzy kolejnymi usztywnieniami środnika (rys.1).

* mgr inż. – st. specjalista w ITB



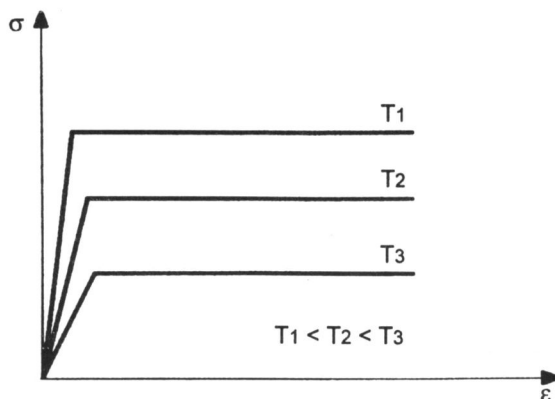
Rys. 1. Element skończony ramy: BSF, BBF – szerokość pasów górnego i dolnego, TSF, TBF – grubość pasów górnego i dolnego, TW, HW – grubość i wysokość środnika, L – długość elementu

Fig 1. Finite element: BSF, BBF – flange width upper and lower, TSF, TBF – flange thickness: upper and lower, TW, HW – thickness and height web, L – element length

Długość elementu można dobrać kierując się wymaganiami dokładności obliczeń, geometrycznymi i mechanicznymi cechami układu, sposobem i miejscem przyłożenia obciążeń.

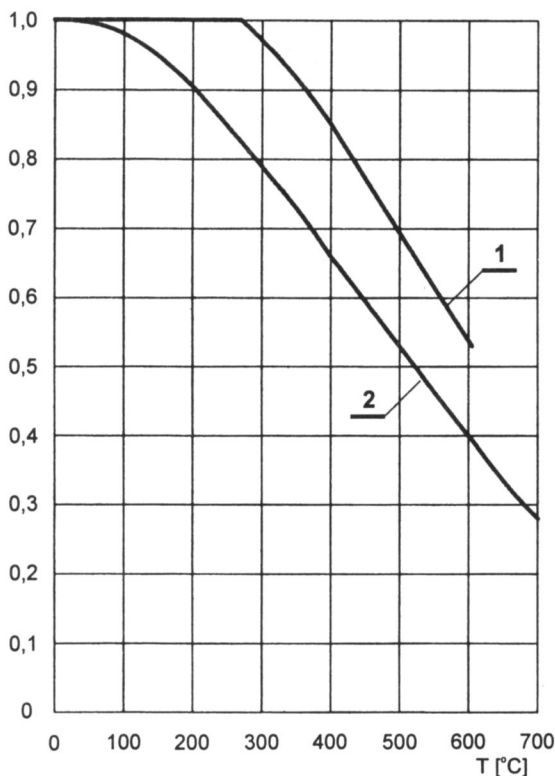
Przyjęto, że modelowe zachowanie się układu elementów zgodne jest z pewnymi założeniami idealizującymi zachowanie się ramy (belki) rzeczywistej. Założenia te zostały wymienione poniżej:

1. Wydzielone elementy są jednorodne i pryzmatyczne – wprowadza to konieczność gęstszego podziału w przypadku belek nie spełniających tych założeń.
2. Przyjęto sprężysto-idealnie plastyczny model materiału. Na rysunku 2 pokazano wykres charakteryzujący materiał.



Rys. 2. Wykres $\sigma - \epsilon$ charakteryzujący materiał
Fig. 2. Relationship $\sigma - \epsilon$

3. Właściwości mechaniczne (moduł sprężystości E i granica plastyczności σ_0 materiału są funkcją temperatury. Charakter zmiany modułu sprężystości E i granicy plastyczności σ_0 w funkcji temperatury dla polskich stali budowlanych przedstawiono na rysunku 3.



Rys. 3. Względna zmiana modułu sprężystości (1) oraz granicy plastyczności (2) stali St3s, 18G2, 18G2A, 18G2AV w funkcji temperatury według pracy [2]
 Fig. 3. Elastic modulus and yield strength as a temperature function for St35, 18G2, 18G2A, 18G2A grade of steel [2]

4. Założono jednorodne pole temperatury wzdłuż długości elementu i niejednorodne wzdłuż wysokości przekroju poprzecznego [1].

5. Obciążenia statyczne przyłożone są wyłącznie w węzłach – w przypadku obciążeń rozłożonych w sposób ciągły należy zastąpić je obciążeniami skupionymi w odpowiednio gęsto wprowadzonych węzłach.

6. Działanie temperatury (obciążenie termiczne) sprowadzono również do węzłów jako obciążenie dodatkowe za pomocą odpowiednio obliczonych sił wewnętrznych.

7. Rozpatrywane zagadnienie ma charakter płaski, tj. wykluczamy deformację z płaszczyzny ramy (belki). Oznacza to, że jedna z płaszczyzn głównych przekrojów pokrywa się z płaszczyzną obciążeń.

8. Utworzenie się uogólnionego przegubu plastycznego w i -tym przekroju ramy (belki) jest warunkowane spełnieniem równania:

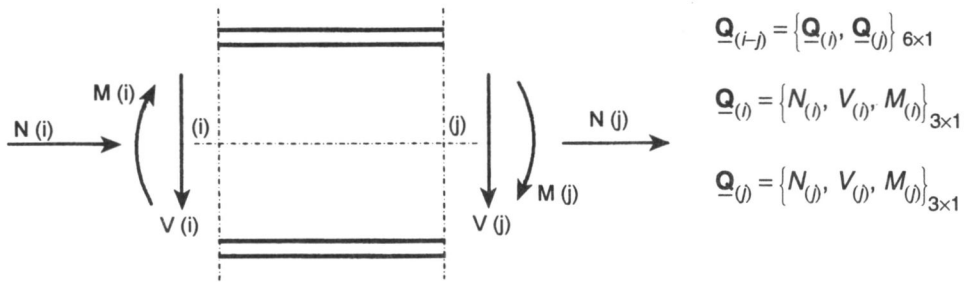
$$F[\underline{Q}_{(i)}, \underline{Q}_0(T)] = 0 \quad (1)$$

gdzie: $\underline{Q}_{(i)}$ – wektor uogólnionych sił wewnętrznych w przekroju powstałych w wyniku działania obciążenia statycznego i temperatury,
 T – temperatura,
 $\underline{Q}_0(T)$ – wektor uogólnionych granicznych sił wewnętrznych w przekroju w temperaturze T .

Siłami wewnętrznymi występującymi jako argumenty w warunku nośności granicznej (1) są (rys.4): siła podłużna \underline{N} , siła poprzeczna \underline{V} i moment zginający \underline{M} , tj.

$$\underline{Q}_{(i)} = \{N_{(i)}, V_{(i)}, M_{(i)}\}_{3 \times 1} \quad (2)$$

Znak $\{ \}$ oznacza wektor kolumnowy.



Rys.4. Siły wewnętrzne w elemencie
 Fig. 4. Internal forces in element

9. Konstrukcja ulega zniszczeniu w wyniku wyczerpania się jej nośności, dochodząc do tego stanu na drodze kolejnych lokalnych uplastycznień. Wykluczamy możliwość zniszczenia kruchej, lokalnych wyboczeń lub globalnej utraty stateczności.

10. Zakładamy, że przemieszczenia są małe.

11. Pomijamy wpływ wszelkich błędów wykonania.

3. Analiza termo-sprężysto-plastycznego stanu nośności

3.1. Analiza stanu termosprężystego

Wyróżniono dwa zasadnicze stany wyężenia elementu skończonego, każdy scharakteryzowany odpowiednimi przyrostowymi równaniami kanonicznymi: stan termosprężysty (p. 3.1) i stan termo-sprężysto-plastyczny (p. 3.4).

W celu wyprowadzenia równania kanonicznego w stanie termosprężystym rozważmy element skończony poddany działaniu sił i polu temperatury.

Przemieszczenie odpowiadające siłom \underline{S}_i oznaczamy przez \underline{r}_i .

Zgodnie z twierdzeniem Castigliano mamy

$$\underline{S}_i = \left(\frac{\partial U}{\partial \underline{r}_i} \right)_{T = \text{const}} \quad (3)$$

gdzie:

$$U = \frac{1}{2} \int_V \underline{e}^T \underline{\sigma} dV \quad (4)$$

Zmieniając indeks i od 1 do n otrzymamy układ n równań wiążących siły \underline{S} z przemieszczeniami \underline{r} , co zapisujemy:

$$\underline{S} = \left(\frac{\partial U}{\partial \underline{r}} \right)_{T = \text{const}} \quad (5)$$

Całkowite odkształcenia są sumą odkształceń sprężystych i termicznych:

$$\underline{e} = \underline{\epsilon} + \underline{e}_T \quad (6)$$

która po wykorzystaniu uogólnionego prawa Hooke'a rozszerzonego o efekty termiczne

$$\underline{\sigma} = \underline{\ddot{e}} \underline{e} + \underline{\ddot{e}} \alpha T \quad (7)$$

przyjmuje postać

$$\underline{e} = \underline{\ddot{e}}^{-1} \underline{\sigma} - \underline{\ddot{e}}^{-1} \underline{\ddot{e}}_T \alpha T \quad (8)$$

gdzie: $\underline{\sigma} = \{\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}, \sigma_{xy}, \sigma_{yz}, \sigma_{zx}\}$,

$\underline{e} = \{e_{xx}, e_{yy}, e_{zz}, e_{xy}, e_{yz}, e_{zx}\}$,

$\underline{\epsilon} = \{\epsilon_{xx}, \epsilon_{yy}, \epsilon_{zz}, \epsilon_{xy}, \epsilon_{yz}, \epsilon_{zx}\}$,

$\underline{e}_T = -\alpha T \underline{\ddot{e}}^{-1} \underline{\ddot{e}}_T = \alpha T \{1, 1, 1, 0, 0, 0\}$

$$\underline{\ddot{e}} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & & & \\ \nu & 1-\nu & \nu & & & \\ \nu & \nu & 1-\nu & & & \\ & & & \frac{1-2\nu}{2} & 0 & 0 \\ & & & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 \\ & & & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \quad [0]$$

$$\underline{\ddot{e}}_T = \frac{E}{(1-2\nu)} \{-1, -1, -1, 0, 0, 0\}$$

α – współczynnik termicznej rozszerzalności liniowej.

Z ostatniego wzoru wynika, że:

$$\ddot{\underline{\mathbf{e}}}_T = -\ddot{\underline{\mathbf{e}}}_T \alpha T \quad (9)$$

Wstawiając wzory (6), (7), (8) i (9) do (4) otrzymujemy ostatecznie:

$$U = \frac{1}{2} \int_V \left(\underline{\mathbf{e}}^T \ddot{\underline{\mathbf{e}}}_T \underline{\mathbf{e}} + 2 \underline{\mathbf{e}}^T \ddot{\underline{\mathbf{e}}}_T \alpha T + \underline{\mathbf{e}}_T^T \ddot{\underline{\mathbf{e}}}_T \underline{\mathbf{e}}_T \right) dV \quad (10)$$

Wprowadzając zależność odkształcenie – przemieszczenie w postaci

$$\underline{\mathbf{e}} = \underline{\mathbf{b}} \underline{\mathbf{r}} \quad (11)$$

gdzie $\underline{\mathbf{b}}$ jest macierzą operatorów różniczkowych.

Wyrażenie (10) na energię można przedstawić następująco:

$$U = \frac{1}{2} \int_V \left(\underline{\mathbf{r}}^T \underline{\mathbf{b}}^T \ddot{\underline{\mathbf{e}}}_T \underline{\mathbf{b}} \underline{\mathbf{r}} \right) dV + \int_V \left(\underline{\mathbf{r}}^T \underline{\mathbf{b}}^T \ddot{\underline{\mathbf{e}}}_T \alpha T \right) dV + \frac{1}{2} \int_V \left(\underline{\mathbf{e}}_T^T \ddot{\underline{\mathbf{e}}}_T \underline{\mathbf{e}}_T \right) dV \quad (12)$$

Stąd

$$\underline{\mathbf{S}} = \left(\frac{\partial U}{\partial \underline{\mathbf{r}}} \right)_{T = \text{const}} = \int_V \left(\underline{\mathbf{b}}^T \ddot{\underline{\mathbf{e}}}_T \underline{\mathbf{b}} \right) dV \underline{\mathbf{r}} + \int_V \left(\underline{\mathbf{b}}^T \ddot{\underline{\mathbf{e}}}_T \alpha T \right) dV \quad (13)$$

Wprowadzając oznaczenia:

$$\underline{\mathbf{k}}^{(s)} = \int_V \left(\underline{\mathbf{b}}^T \ddot{\underline{\mathbf{e}}}_T \underline{\mathbf{b}} \right) dV \quad (14)$$

$$\underline{\mathbf{J}}_T = \int_V \left(\underline{\mathbf{b}}^T \ddot{\underline{\mathbf{e}}}_T \alpha T \right) dV \quad (15)$$

otrzymamy kanoniczne równanie równowagi elementu w stanie termosprężystym:

$$\underline{\mathbf{k}}_{-6 \times 6}^{(s)} \underline{\mathbf{r}}_{-6 \times 1} = \underline{\mathbf{S}}_{-6 \times 1} - \underline{\mathbf{J}}_{-T 6 \times 1} \quad (16)$$

Jeżeli przyjmiemy, że zmiany macierzy $\underline{\mathbf{k}}_{-6 \times 6}^{(s)}$ wzdłuż kroku są pomijalne, równanie powyższe można przedstawić w postaci przyrostowej:

$$\underline{\mathbf{k}}_{-6 \times 6}^{(s)} \Delta \underline{\mathbf{r}}_{-6 \times 1} = \Delta \underline{\mathbf{S}}_{-6 \times 1} - \Delta \underline{\mathbf{J}}_{-T 6 \times 1} \quad (17)$$

Uogólniając rozważmy:

- $\underline{\mathbf{R}}$ – wektor przemieszczeń globalnych,
- $\underline{\mathbf{r}} = \underline{\mathbf{A}} \underline{\mathbf{R}}$ – zależność pomiędzy przemieszczeniami elementu a przemieszczeniami globalnymi, (18)
- $\underline{\mathbf{P}}$ – wektor obciążeń zewnętrznych odpowiadający przemieszczeniom $\underline{\mathbf{R}}$.

Jeżeli przez $\delta \underline{\mathbf{R}}$ oznaczymy wirtualne przemieszczenia, to

$$\delta \underline{\mathbf{r}} = \underline{\mathbf{A}} \delta \underline{\mathbf{R}}$$

Praca sił zewnętrznych to

$$\delta \underline{\mathbf{W}} = \delta \underline{\mathbf{R}}^T \underline{\mathbf{P}}$$

a praca sił wewnętrznych $\delta \underline{\mathbf{r}}^T \underline{\mathbf{S}}$.

Z zasady prac wirtualnych

$$\delta \underline{\mathbf{R}}^T \underline{\mathbf{P}} = \delta \underline{\mathbf{r}}^T \underline{\mathbf{S}} \quad (19)$$

otrzymamy

$$\delta \underline{\mathbf{R}}^T (\underline{\mathbf{P}} - \underline{\mathbf{A}}^T \underline{\mathbf{S}}) = 0$$

a podstawiając wzór (16) do powyższego wzoru, mamy

$$\delta \underline{\mathbf{R}}^T (\underline{\mathbf{P}} - \underline{\mathbf{A}}^T \underline{\mathbf{k}} \underline{\mathbf{A}} \underline{\mathbf{R}} + \underline{\mathbf{A}}^T \underline{\mathbf{J}}) = 0$$

Stąd

$$\underline{\mathbf{A}}^T \underline{\mathbf{k}} \underline{\mathbf{A}} \underline{\mathbf{R}} = \underline{\mathbf{P}} - \underline{\mathbf{A}}^T \underline{\mathbf{J}}$$

i ostatecznie

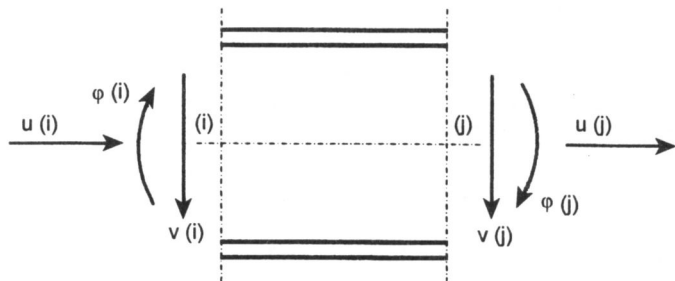
$$\underline{\mathbf{K}} \underline{\mathbf{R}} = \underline{\mathbf{P}} - \underline{\mathbf{A}}^T \underline{\mathbf{J}} \quad (20)$$

Wektory uogólnionych sił wewnętrznych oraz uogólnionych przemieszczeń w przypadku obecnej analizy zdefiniowano na rysunkach 4 i 5.

$$\underline{\mathbf{r}}_{-(i)} = \{ \underline{\mathbf{r}}_{-(i)}, \underline{\mathbf{r}}_{-(j)} \}_{6 \times 1}$$

$$\underline{\mathbf{r}}_{-(i)} = \{ u_{(i)}, v_{(i)}, \varphi_{(i)} \}_{3 \times 1}$$

$$\underline{\mathbf{r}}_{-(j)} = \{ u_{(j)}, v_{(j)}, \varphi_{(j)} \}_{3 \times 1}$$



Rys.5. Uogólnione przemieszczenia w elemencie i-j

Fig. 5. Displacements in element i-j

$$\Delta \underline{\mathbf{S}} = \{ \Delta N_{(i)}, \Delta V_{(i)}, \Delta M_{(i)}, \Delta N_{(j)}, \Delta V_{(j)}, \Delta M_{(j)} \} \quad (21)$$

$$\Delta \underline{\mathbf{J}}_T = \{ \Delta N_{T(i)}, 0, \Delta M_{T(i)}, \Delta N_{T(j)}, 0, \Delta M_{T(j)} \} \quad (22)$$

Jawną postać macierzy $\mathbf{k}_{6 \times 6}^{(s)}$ dla elementu prętowego wyprowadzono w pracy [3]. W przypadku obecnej analizy w macierzy należy uwzględnić zmianę współczynnika sprężystości w funkcji temperatury, tzn.

$$\mathbf{k}_{6 \times 6}^{(s)} = \begin{bmatrix} \frac{AE(T)}{L} & & & & & \\ 0 & \frac{12E(T)I}{L^3} & & & & \\ 0 & \frac{6E(T)I}{L^2} & \frac{4E(T)I}{L} & & & \\ -\frac{AE(T)}{L} & 0 & 0 & \frac{AE(T)I}{L} & & \\ 0 & -\frac{12E(T)I}{L^3} & -\frac{6E(T)I}{L^2} & 0 & \frac{12E(T)I}{L^3} & \\ 0 & \frac{6E(T)I}{L^2} & \frac{2E(T)I}{L} & 0 & -\frac{6E(T)I}{L^3} & \frac{4E(T)I}{L} \end{bmatrix} \quad \text{[symetria]} \quad (23)$$

gdzie A i I oznaczają odpowiednio pole przekroju elementu oraz moment bezwładności względem osi obojętnej.

3.2. Temperatura jednorodna

Pod pojęciem temperatury jednorodnej rozumiemy tu jednorodny rozkład temperatury wzdłuż długości elementu i w przekroju poprzecznym, tzn. zgodnie z przyjętym na rysunku 6 układem osi

$$T^j = T(x, y, z) = \text{const} \quad (24)$$

Dla tak przyjętego obciążenia termicznego macierz sztywności elementu wyznaczamy dla wartości współczynnika $E = E(T)$ (rys. 3). Wartość współczynnika sprężystości w funkcji temperatury wyznaczamy z zależności określonych doświadczalnie.

Zgodnie z przeprowadzonymi badaniami [2] zmienność współczynnika sprężystości w funkcji temperatury dla stali węglowych St3S, St3SX, St3SY i stali niskostopowych 18GZ, 18GZA i 18GZAV przyjmuje się według wzoru

$$E(T) = E_{20} 1,027 \exp \left[\left((963,4 T - 3,34 T^2) 10^{-6} \right) \right] \quad (25)$$

w przedziale temperatur 300 °C – 880 °C oraz

$$E(T) = E_{20} \quad (26)$$

w przedziale do 300 °C, gdzie E_{20} jest wartością współczynnika sprężystości w temperaturze 20 °C.

Wartości przyrostów sił $\{\Delta \underline{J}_T\}$ wyznaczamy z następujących zależności:

$$\Delta N_{T(i)} = \int_A \Delta \sigma_{xx}(T) dA = \int_A E(T) \alpha_T \Delta T dA = E(T) \alpha_T \Delta T \int_A dA = E(T) \alpha_T \Delta T A \quad (27)$$

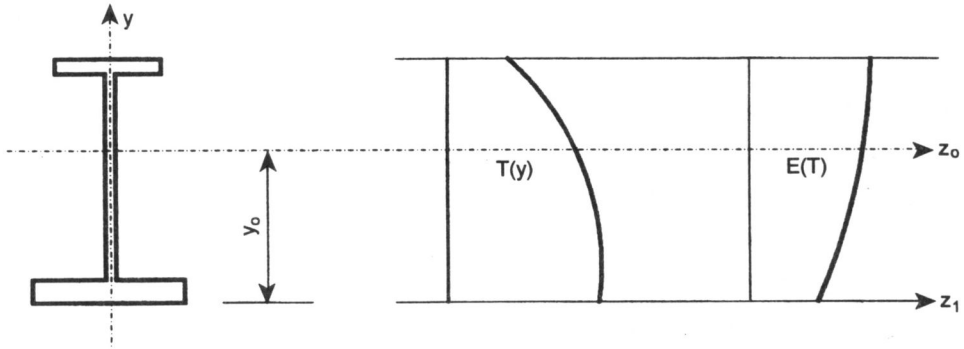
$$\Delta M_{T(t)} = \int_A \Delta \sigma_{xx}(T) y dA = \int_A E(T) \alpha_T \Delta T y dA = E(T) \alpha_T \Delta T \int_A y dA \quad (28)$$

3.3. Temperatura niejednorodna

Zgodnie z założeniami podanymi w p. 2.1 oprócz temperatury jednorodnej w całym elemencie rozpatrzmy niejednorodny rozkład temperatury wzdłuż wysokości przekroju poprzecznego (rys. 6), tzn.

$$T^n = T(x, y, z) = T(y) \quad (29)$$

Dla tak przyjętego rozkładu temperatury współczynnik sprężystości zmienia się również i mamy do czynienia z przekrojem niejednorodnym.



Rys. 6. Charakter zmiany temperatury i modułu sprężystości E wzdłuż wysokości przekroju poprzecznego elementu

Fig. 6. Variation of temperature function and elastic modulus E along the element height

Oś obojętna zostanie przesunięta w kierunku części przekroju o większym E . Dzieliąc myślowo przekrój niejednorodny na warstwy (których wzajemne przesunięcie nie jest możliwe), można zastąpić go w obliczeniach przekrojem jednorodnym o stałym dla całego przekroju współczynniku sprężystości E_{20} , zastępując pola odpowiednich warstw polami poszerzonymi (lub zwężonymi) w kierunku równoległym do osi obojętnej w stosunku

$$n = \frac{E_{iw}}{E_{20}}$$

gdzie: E_{iw} – współczynnik sprężystości materiału i -tej warstwy obliczony dla temperatury średniej w warstwie,

E_{20} – współczynnik sprężystości warstwy w temperaturze 20°C przyjęty jako podstawowy.

Dla tak zmienionego przekroju położenie osi obojętnej wyznaczamy jak dla przypadku $E_i = \text{const}$.

Położenie osi obojętnej y_0 wyznaczamy ze wzoru (rys. 7):

$$y_0 = \frac{S}{A_z} \quad (30)$$

gdzie:

$$S = \sum_{i=1}^{LWR} A_{iz}^w y_0^i \quad (31)$$

$$A_z = \sum_{i=1}^{LWR} n_i^w A_i^w \quad (32)$$

y_0^i – odległość środka ciężkości każdej z warstw od osi z_1 ,

$$n_i^w = \frac{E_i^w (T_i^w)}{E_{20}}$$

gdzie: T_i^w – stała temperatura i -tej warstwy,

E_i^w – moduł sprężystości i -tej warstwy obliczony dla temperatury T_i^w ,

E_{20} – moduł sprężystości w temperaturze 20 °C,

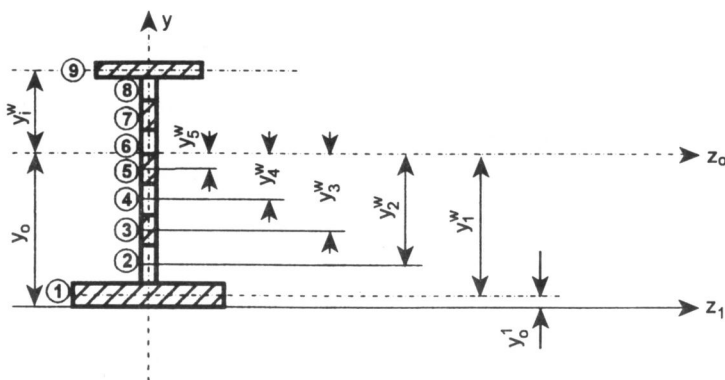
A_i^w – pole i -tej warstwy,

$A_{iz}^w = A_i^w n_i^w$ – zastępcze pole i -tej warstwy,

A_z – pole przekroju zastępczego,

S – moment statyczny pola przekroju zastępczego względem osi z_0 ,

LWR – liczba warstw, na którą podzielono przekrój wzdłuż wysokości.



Rys.7. Wyznaczenie momentu bezwładności i -tej warstwy
Fig. 7. Determination of inertia moment for i layer

Moment bezwładności i -tej warstwy $I_{z_1}^{iw}$ względem osi z_1

$$I_{z_1}^{iw} = I_{z_1'}^{iw} + A_{z_1}^w (y_0^i)^2 \quad (33)$$

przy czym

$$I_{z_1'}^{iw} = \frac{BBF_i^w \frac{E_i^w (T_i^w)}{E_{20}} (TBW_i^w)^3}{12} \quad (34)$$

gdzie: BBF_i^w – szerokość i -tej warstwy,

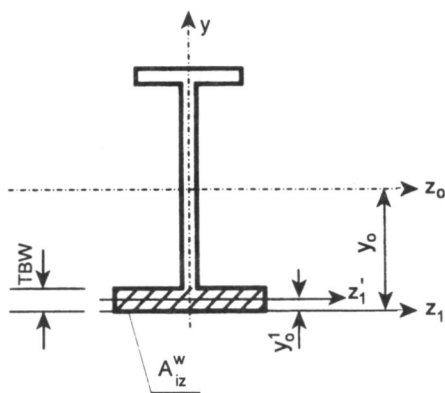
TBW_i^w – wysokość i -tej warstwy.

Moment bezwładności całego przekroju względem osi z_1 :

$$I_{z_1} = \sum_{i=1}^{LWR} \left[I_{z_1'}^{iw} + A_{iz}^w (y_0^i)^2 \right] \quad (35)$$

Moment bezwładności całego przekroju względem osi z_0 :

$$I_{z_0} = I_{z_1} - A_z (y_0)^2 \quad (36)$$



Rys. 8. Wielkości charakterystyczne przy wyznaczaniu sił $\Delta N_{T(l)}$ i $\Delta M_{T(l)}$
 Fig. 8. Determination of forces $\Delta N_{T(l)}$ and $\Delta M_{T(l)}$

W przypadku niejednorodnej temperatury wzdłuż wysokości przekroju poprzecznego macierz sztywności $\underline{k}^{(s)}$ określoną wzorem (23) wyznaczamy dla $E(T) = E_{20}$, $A = A_z$ zgodnie ze wzorem (32) oraz $I_z = I_{z_0}$ zgodnie ze wzorem (36).

Wartość sił $\{\Delta \underline{J}_T\}$ wyznaczamy analogicznie jak z wzorów (27) i (28), tzn.:

$$\begin{aligned} \Delta N_{T(t)} &= \int_A \Delta \sigma_{xx}(T) dA = \int_A E[T(y)] \alpha_T \Delta T(y) dA = \int_A E[T(y)] \alpha_T A^T(y) BBF(y) dy = \\ &= \sum_{i=1}^{LWR} E(T_i^w) \alpha_T \Delta T_i^w BBF_i^w TBW_i^w \end{aligned} \quad (37)$$

$$\begin{aligned} \Delta M_{T(t)} &= \int_A \Delta \sigma_{Txx} y dA = \int_A E[T(y)] \alpha_T \Delta T(y) y dA = \int_A E[T(y)] \alpha_T \Delta T(y) BBF(y) dy = \\ &= \sum_{i=1}^{LWR} E(T_i^w) \alpha_T \Delta T_i^w BBF_i^w y_i^w TBW_i^w \end{aligned} \quad (38)$$

3.3. Warunek plastyczności

Analizując nośność graniczną ram płaskich za pomocą termo-sprężysto-plastycznego modelu materiału, musimy znać położenia tzw. przegubów plastycznych. Są to miejsca, w których plastyczność jest osiągnięta w całym przekroju poprzecznym i może w tych miejscach następować nieograniczone płynięcie.

W pierwszej, testowej wersji realizowanego programu numerycznego przyjęto warunek stanu granicznego (1) w k -tym przekroju przywęzłowym w postaci

$$n_{(k)}^2 + v_{(k)}^2 + m_{(k)} - 1 = 0 \quad (39)$$

a więc w takiej, jaką niekiedy przyjmuje się dla pełnych przekrojów prostokątnych.

We wzorze tym

$$n_{(k)} = \frac{N_{(k)}}{N_0(T)}, \quad v_{(k)} = \frac{V_{(k)}}{V_0(T)}, \quad m_{(k)} = \frac{M_{(k)}}{M_0(T)} \quad (40)$$

zaś $N_0(T)$, $V_0(T)$, $M_0(T)$ oznaczają wielkości graniczne w temperaturze T siły podłużnej N , siły tnącej V oraz momentu zginającego M i są liczone dla przekrojów dwuteowych symetrycznych według następujących wzorów:

- dla temperatury jednorodnej w przekroju

$$N_0(T) = [2Bt + (H - 2t)g] \sigma_0(T)$$

$$V_0(T) = (H - 2t) g \tau_0(T)$$

$$M_0(T) = \left[Bt(H - t) + g \left(\frac{H}{2} - t \right)^2 \right] \sigma_0(T) \quad (41)$$

gdzie: H – wysokość dwuteownika,
 g – grubość środnika,
 B – szerokość pótek,
 t – grubość pótek.

- dla temperatury niejednorodnej wzdłuż wysokości przekroju poprzecznego (29)

$$\begin{aligned} N_0(T) &= \int_A \sigma_0 [T(y)] dA \\ V_0(T) &= \int_{A_{sr}} \tau_0 [T(y)] dA_{sr} \\ M_0(T) &= \int_A \sigma_0 [T(y)] y dA \end{aligned} \quad (42)$$

gdzie: A – pole dwuteownika,
 A_{sr} – pole środnika.

W programie całkowanie we wzorach (42) wykonuje się numerycznie.

3.5. Analiza stanu termo-sprężysto-plastycznego

W stanie tym zachowanie elementu charakteryzowane jest równaniem

$$\underline{\mathbf{k}}(T)_{6 \times 6}^{(s-p)} \Delta \underline{\mathbf{r}}_{6 \times 1} = \Delta \underline{\mathbf{Q}}_{6 \times 1}$$

gdzie $\underline{\mathbf{k}}(T)_{6 \times 6}^{(s-p)}$ jest jedną z trzech różnych macierzy sztywności sprężysto-plastycznej elementu (przyjmowanych zależnie od miejsc pojawienia się stref plastycznych) uwzględniających zmianę modułu sprężystości E oraz granicy plastyczności σ_0 z temperaturą (rys. 3).

Uplastycznienie elementu skończonego jest równoznaczne ze spełnieniem równania (1) w k -tym przekroju przywęzłowym tego elementu. Wielkość deformacji plastycznych określamy za pomocą parametru skalarnego μ_k (45), $k = 1, 2$.

Jeżeli element znajduje się w stanie sprężystym, możemy zapisać:

$$\underline{\mathbf{Q}} = \begin{Bmatrix} \underline{\mathbf{Q}}_i \\ \underline{\mathbf{Q}}_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{ii} & k_{ij} \\ k_{ji} & k_{jj} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underline{\mathbf{r}}_i \\ \underline{\mathbf{r}}_j \end{Bmatrix} \quad (43)$$

gdzie k_{ij} oznaczają podmacierze o wymiarze 3×3 macierzy $\underline{\mathbf{k}}_{6 \times 6}^{(s)}$ (23).

Całkowity przyrost uogólnionych przemieszczeń $\Delta \underline{\mathbf{r}}$ składa się z trzech części: przyrostu sprężystego $\Delta \underline{\mathbf{r}}^s$, przyrostu termicznego $\Delta \underline{\mathbf{r}}^t$ oraz przyrostu plastycznego $\Delta \underline{\mathbf{r}}^p$, tj.

$$\Delta \underline{\mathbf{r}} = \Delta \underline{\mathbf{r}}^s + \Delta \underline{\mathbf{r}}^t + \Delta \underline{\mathbf{r}}^p = \Delta \underline{\mathbf{r}}^{st} + \Delta \underline{\mathbf{r}}^p \quad (44)$$

gdzie $\Delta \underline{\mathbf{r}}^{st} = \Delta \underline{\mathbf{r}}^s + \Delta \underline{\mathbf{r}}^t$.

Plastyczny przyrost uogólnionych przemieszczeń można zgodnie z przyjętym stowarzyszonym prawem plastycznego płynięcia wyrazić wzorem

$$\Delta \underline{\mathbf{r}}^p = \begin{Bmatrix} \Delta \underline{\mathbf{r}}_{(i)}^p \\ \Delta \underline{\mathbf{r}}_{(j)}^p \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_i & 0 \\ 0 & \mu_j \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \left(\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \underline{\mathbf{Q}}} \right)_i \\ \left(\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \underline{\mathbf{Q}}} \right)_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_i & 0 \\ 0 & \mu_j \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Phi_i \\ \Phi_j \end{Bmatrix} \quad (45)$$

Jeżeli przekrój przywęzłowy i lub j elementu jest sprężysty, to odpowiednio $\mu_i = 0$ lub $\mu_j = 0$. Zależność pomiędzy przyrostem sił wewnętrznych i przyrostami przemieszczeń można wyrazić jako

$$\Delta \underline{\mathbf{Q}} = \begin{Bmatrix} \Delta \underline{\mathbf{Q}}_i \\ \Delta \underline{\mathbf{Q}}_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{ij} & k_{jj} \\ k_{ji} & k_{jj} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \underline{\mathbf{r}}_{-i}^{st} \\ \Delta \underline{\mathbf{r}}_{-j}^{st} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{ij} & k_{jj} \\ k_{ji} & k_{jj} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \underline{\mathbf{r}}_{-i} - \Delta \underline{\mathbf{r}}_{-i}^p \\ \Delta \underline{\mathbf{r}}_{-j} - \Delta \underline{\mathbf{r}}_{-j}^p \end{Bmatrix} \quad (46)$$

Podstawiając równanie (45) do równania (46) otrzymamy

$$\Delta \underline{\mathbf{Q}} = \begin{bmatrix} k_{ij} & k_{jj} \\ k_{ji} & k_{jj} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \underline{\mathbf{r}}_{-i} - \mu_i \Phi_i \\ \Delta \underline{\mathbf{r}}_{-j} - \mu_j \Phi_j \end{Bmatrix} \quad (47)$$

Zgodnie z równaniem (45) wektor przyrostu odkształceń plastycznych jest prostopadły do powierzchni płynięcia. Zakładając, że rzut przyrostu wektora sił uogólnionych na kierunek prostopadły do powierzchni płynięcia jest równy przyrostowi wektora uogólnionych odkształceń plastycznych pomnożonemu przez moduł h (będący pewnym zastępczym modułem wzmocnienia plastycznego), otrzymamy

$$\left(\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \underline{\mathbf{Q}}} \right)_i \left(\Delta \underline{\mathbf{Q}}_i - h_i \Delta \underline{\mathbf{r}}_{-i}^p \right) = 0 \quad (48a)$$

$$\left(\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \underline{\mathbf{Q}}} \right)_j \left(\Delta \underline{\mathbf{Q}}_j - h_j \Delta \underline{\mathbf{r}}_{-j}^p \right) = 0 \quad (48b)$$

gdzie i, j oznaczają lewy lub prawy koniec elementu.

Wstawiając wzór (45) do równań (48a,b) otrzymamy

$$\left(\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \underline{\mathbf{Q}}} \right)_i \left[\Delta \underline{\mathbf{Q}}_i - h_i \mu_i \left(\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \underline{\mathbf{Q}}} \right)_i \right] = 0 \quad (49a)$$

$$\left(\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \underline{\mathbf{Q}}} \right)_j \left[\Delta \underline{\mathbf{Q}}_j - h_j \mu_j \left(\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \underline{\mathbf{Q}}} \right)_j \right] = 0 \quad (49b)$$

Rozwiązując równania (49a,b) względem μ_i, μ_j , otrzymamy

$$\mu_i = \frac{\left(\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \underline{\mathbf{Q}}}\right)_i \Delta \underline{\mathbf{Q}}_i}{h_i \left(\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \underline{\mathbf{Q}}}\right)_i \left(\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \underline{\mathbf{Q}}}\right)_i} \quad (50a)$$

$$\mu_j = \frac{\left(\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \underline{\mathbf{Q}}}\right)_j \Delta \underline{\mathbf{Q}}_j}{h_j \left(\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \underline{\mathbf{Q}}}\right)_j \left(\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \underline{\mathbf{Q}}}\right)_j} \quad (50b)$$

Równania (47) i (50) określają zależność pomiędzy μ_k i $\Delta \underline{\mathbf{r}}$.

Wstawiamy równanie (47) do (50), rozpatrując trzy przypadki:

1. Przekrój (i) jest uplastyczniony, zaś przekrój (j) jest sprężysty; $\mu_i \neq 0$, $\mu_j = 0$. Wówczas mamy

$$\Delta \underline{\mathbf{Q}} = \begin{Bmatrix} \Delta \underline{\mathbf{Q}}_i \\ \Delta \underline{\mathbf{Q}}_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{ii} & k_{ij} \\ k_{ji} & k_{jj} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \underline{\mathbf{r}}_i - \mu_i \Phi_i \\ \Delta \underline{\mathbf{r}}_j \end{Bmatrix}$$

$$\mu_i = \frac{\Phi_i^T \begin{bmatrix} k_{ii} & k_{ij} \\ k_{ji} & k_{jj} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \underline{\mathbf{r}}_i \\ \Delta \underline{\mathbf{r}}_j \end{Bmatrix} - \Phi_i^T k_{ii} \mu_i \Phi_i}{\Phi_i^T h_i \Phi_i}$$

$$\mu_i \Phi_i^T h_i \Phi_i = \Phi_i^T \begin{bmatrix} k_{ii} & k_{ij} \\ k_{ji} & k_{jj} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \underline{\mathbf{r}}_i \\ \Delta \underline{\mathbf{r}}_j \end{Bmatrix} - \Phi_i^T k_{ii} \mu_i \Phi_i$$

i ostatecznie

$$\mu_i = \frac{\Phi_i^T \begin{bmatrix} k_{ii} & k_{ij} \\ k_{ji} & k_{jj} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \underline{\mathbf{r}}_i \\ \Delta \underline{\mathbf{r}}_j \end{Bmatrix}}{\Phi_i^T h_i \Phi_i + \Phi_i^T k_{ii} \Phi_i} \quad (51)$$

2. Przekrój (i) jest sprężysty, zaś przekrój (j) jest uplastyczniony; $\mu_i = 0$, $\mu_j \neq 0$. Wówczas mamy

$$\mu_j = \frac{\Phi_j^T \begin{bmatrix} k_{ji} & k_{jj} \\ k_{ii} & k_{ij} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \underline{\mathbf{r}}_i \\ \Delta \underline{\mathbf{r}}_j \end{Bmatrix}}{\Phi_j^T h_j \Phi_j + \Phi_j^T k_{jj} \Phi_j} \quad (52)$$

3. Obydwa przekroje przywęzłowe są uplastycznione; $\mu_i \neq 0$, $\mu_j \neq 0$. W tym przypadku mamy

$$\Delta \underline{\mathbf{Q}}_i = \begin{bmatrix} k_{ii} & k_{ij} \\ k_{ji} & k_{jj} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \underline{\mathbf{r}}_i \\ \Delta \underline{\mathbf{r}}_j \end{Bmatrix} - k_{ii} \mu_i \Phi_i - k_{ij} \mu_j \Phi_j$$

$$\Delta \underline{Q}_j = \begin{bmatrix} k_{ji} & k_{jj} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \underline{r}_i \\ \Delta \underline{r}_j \end{Bmatrix} - k_{ji} \mu_i \Phi_i - k_{jj} \mu_j \Phi_j \quad (53)$$

Wstawiając równania (53) do równań (50) otrzymamy

$$\begin{aligned} \Phi_i^T \begin{bmatrix} k_{ii} & k_{ij} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \underline{r}_i \\ \Delta \underline{r}_j \end{Bmatrix} - \Phi_i^T k_{ii} \mu_i \Phi_i - \Phi_i^T k_{ij} \mu_j \Phi_j &= \mu_i \Phi_i^T h_i \Phi_i \\ \Phi_j^T \begin{bmatrix} k_{ji} & k_{jj} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \underline{r}_i \\ \Delta \underline{r}_j \end{Bmatrix} - \Phi_j^T k_{ji} \mu_i \Phi_i - \Phi_j^T k_{jj} \mu_j \Phi_j &= \mu_j \Phi_j^T h_j \Phi_j \end{aligned}$$

i ostatecznie

$$\begin{bmatrix} \Phi_i^T k_{ii} & \Phi_i^T k_{ij} \\ \Phi_j^T k_{ji} & \Phi_j^T k_{jj} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \underline{r}_i \\ \Delta \underline{r}_j \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \Phi_i^T k_{ii} \mu_i \Phi_i + \mu_i \Phi_i^T h_i \Phi_i + \Phi_i^T k_{ij} \mu_j \Phi_j \\ \Phi_j^T k_{ji} \mu_i \Phi_i + \mu_j \Phi_j^T h_j \Phi_j + \Phi_j^T k_{jj} \mu_j \Phi_j \end{Bmatrix} \quad (54)$$

Powyższy układ równań można rozwiązać ze względu na μ_i i μ_j za pomocą wzorów Cramera. Wyznacznik główny to

$$\begin{aligned} W &= \begin{vmatrix} \Phi_i^T k_{ii} \Phi_i + \Phi_i^T h_i \Phi_i & \Phi_i^T k_{ij} \Phi_j \\ \Phi_j^T k_{ji} \Phi_i & \Phi_j^T k_{jj} \Phi_j + \Phi_j^T h_j \Phi_j \end{vmatrix} = \\ &= \left(\Phi_i^T k_{ii} \Phi_i + \Phi_i^T h_i \Phi_i \right) \left(\Phi_j^T k_{jj} \Phi_j + \Phi_j^T h_j \Phi_j \right) - \left(\Phi_i^T k_{ij} \Phi_j \right)^2 \end{aligned} \quad (55)$$

W rozwinięciu wyznacznika (55) wykorzystano zmianę wskaźników

$$\Phi_i^T k_{ij} \Phi_j = \Phi_j^T k_{ji} \Phi_i$$

Korzystając ze wzorów

$$\mu_i = \frac{W_{\mu_i}}{W}, \quad \mu_j = \frac{W_{\mu_j}}{W} \quad (56)$$

w których

$$\begin{aligned} W_{\mu_i} &= \begin{vmatrix} \Phi_i^T \begin{bmatrix} k_{ii} & k_{ij} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \underline{r}_i \\ \Delta \underline{r}_j \end{Bmatrix} & \Phi_i^T k_{ij} \Phi_j \\ \Phi_j^T \begin{bmatrix} k_{ji} & k_{jj} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \underline{r}_i \\ \Delta \underline{r}_j \end{Bmatrix} & \Phi_j^T k_{jj} \Phi_j + \Phi_j^T h_j \Phi_j \end{vmatrix} \\ W_{\mu_j} &= \begin{vmatrix} \Phi_i^T k_{ii} \Phi_i + \Phi_i^T h_i \Phi_i & \Phi_i^T \begin{bmatrix} k_{ii} & k_{ij} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \underline{r}_i \\ \Delta \underline{r}_j \end{Bmatrix} \\ \Phi_j^T k_{ji} \Phi_i & \Phi_j^T \begin{bmatrix} k_{ji} & k_{jj} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \underline{r}_i \\ \Delta \underline{r}_j \end{Bmatrix} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

ostatecznie otrzymujemy

$$\mu_1 = \frac{\Phi_i^T \begin{bmatrix} k_{ii} & k_{ij} \\ k_{ji} & k_{jj} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \underline{r}_i \\ \Delta \underline{r}_j \end{Bmatrix} \left(\Phi_j^T k_{jj} \Phi_j + \Phi_j^T h_j \Phi_j \right) - \Phi_j^T \begin{bmatrix} k_{ji} & k_{jj} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \underline{r}_i \\ \Delta \underline{r}_j \end{Bmatrix} \left(\Phi_i^T k_{ij} \Phi_i \right)}{W} \quad (57a)$$

$$\mu_j = \frac{\left(\Phi_i^T k_{ii} \Phi_i + \Phi_i^T h_i \Phi_i \right) \left(\Phi_j^T \begin{bmatrix} k_{ji} & k_{jj} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \underline{r}_i \\ \Delta \underline{r}_j \end{Bmatrix} \right) - \left(\Phi_i^T \begin{bmatrix} k_{ii} & k_{ij} \\ k_{ji} & k_{jj} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \underline{r}_i \\ \Delta \underline{r}_j \end{Bmatrix} \right) \left(\Phi_j^T k_{jj} \Phi_j \right)}{W} \quad (57b)$$

Wstawiając kolejno μ_k do równań (47) otrzymujemy termo-sprężysto-plastyczne macierze sztywności elementu prętowego dla wyróżnionych trzech sposobów jego uplastycznienia:

1. $\mu_i \neq 0, \mu_j = 0$

$$\begin{aligned} \Delta \underline{Q} &= \begin{bmatrix} k_{ii} & k_{ij} \\ k_{ji} & k_{jj} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \underline{r}_i - \mu_i \Phi_i \\ \Delta \underline{r}_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{ii} & k_{ij} \\ k_{ji} & k_{jj} \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{l} \Delta \underline{r}_i - \frac{\Phi_i^T \begin{bmatrix} k_{ii} & k_{ij} \\ k_{ji} & k_{jj} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \underline{r}_i \\ \Delta \underline{r}_j \end{Bmatrix}}{\Phi_i^T h_i \Phi_i + \Phi_i^T k_{ii} \Phi_i} \Phi_i \\ \Delta \underline{r}_j \end{array} \right\} = \\ &= \begin{bmatrix} k_{ii} - \frac{k_{ii} \Phi_i \Phi_i^T k_{ii}}{C_{h_i} + C_i} & k_{ij} - \frac{k_{ij} \Phi_i \Phi_i^T k_{ij}}{C_{h_i} + C_i} \\ k_{ji} - \frac{k_{ji} \Phi_i \Phi_i^T k_{ji}}{C_{h_i} + C_i} & k_{jj} - \frac{k_{jj} \Phi_i \Phi_i^T k_{jj}}{C_{h_i} + C_i} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \Delta \underline{r}_i \\ \Delta \underline{r}_j \end{pmatrix} = \underline{k}^{p_i} \Delta \underline{r} \end{aligned} \quad (58)$$

gdzie: $C_{h_i} = \Phi_i^T h_i \Phi_i, \quad C_i = \Phi_i^T k_{ii} \Phi_i$

2. $\mu_i = 0, \mu_j \neq 0$

$$\begin{aligned} \Delta \underline{Q} &= \begin{bmatrix} k_{ii} & k_{ij} \\ k_{ji} & k_{jj} \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{l} \Delta \underline{r}_i \\ \Delta \underline{r}_j - \frac{\Phi_j^T \begin{bmatrix} k_{ji} & k_{jj} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \underline{r}_i \\ \Delta \underline{r}_j \end{Bmatrix}}{\Phi_j^T h_j \Phi_j + \Phi_j^T k_{jj} \Phi_j} \Phi_j \end{array} \right\} = \\ &= \begin{bmatrix} k_{ii} - \frac{k_{ij} \Phi_j \Phi_j^T k_{ij}}{C_{h_j} + C_j} & k_{ij} - \frac{k_{ij} \Phi_j \Phi_j^T k_{ij}}{C_{h_j} + C_j} \\ k_{ji} - \frac{k_{ji} \Phi_j \Phi_j^T k_{ji}}{C_{h_j} + C_j} & k_{jj} - \frac{k_{jj} \Phi_j \Phi_j^T k_{jj}}{C_{h_j} + C_j} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \Delta \underline{r}_i \\ \Delta \underline{r}_j \end{pmatrix} = \underline{k}^{p_j} \Delta \underline{r} \end{aligned} \quad (59)$$

gdzie: $C_{h_j} = \Phi_j^T h_j \Phi_j, \quad C_j = \Phi_j^T k_{jj} \Phi_j$

$3^0 \mu_i \neq 0, \mu_j \neq 0$

$$\Delta \underline{\mathbf{Q}} = \begin{bmatrix} k_{ii} & k_{ij} \\ k_{ji} & k_{jj} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \underline{\mathbf{r}}_i \\ \Delta \underline{\mathbf{r}}_j \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} k_{ii} & k_{ij} \\ k_{ji} & k_{jj} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mu_i \Phi_i \\ \mu_j \Phi_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{ii}^p & k_{ij}^p \\ k_{ji}^p & k_{jj}^p \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \underline{\mathbf{r}}_i \\ \Delta \underline{\mathbf{r}}_j \end{Bmatrix} = \underline{\mathbf{k}}^p \Delta \underline{\mathbf{r}} \quad (60)$$

gdzie:

$$k_{ii}^p = k_{ii} - \frac{1}{W} \left\{ \left(k_{ii} \Phi_i \Phi_i^T k_{ii} \right) \left(\Phi_j^T k_{jj} \Phi_j + \Phi_j^T h_j \Phi_j \right) - \left(k_{ii} \Phi_i \Phi_j^T k_{ij} \right) \left(\Phi_i^T k_{ij} \Phi_j \right) + \right. \\ \left. + \left(k_{ij} \Phi_j \Phi_j^T k_{jj} \right) \left(\Phi_i^T k_{ii} \Phi_i + \Phi_i^T h_i \Phi_i \right) - \left(k_{ij} \Phi_j \Phi_i^T k_{ji} \right) \left(\Phi_j^T k_{ij} \Phi_i \right) \right\} \quad (61a)$$

$$k_{ij}^p = k_{ij} - \frac{1}{W} \left\{ \left(k_{ii} \Phi_i \Phi_i^T k_{ii} \right) \left(\Phi_j^T k_{jj} \Phi_j + \Phi_j^T h_j \Phi_j \right) - \left(k_{ii} \Phi_i \Phi_j^T k_{ij} \right) \left(k_{ii} \Phi_i^T k_{ij} \Phi_j \right) + \right. \\ \left. + \left(k_{ij} \Phi_j \Phi_j^T k_{jj} \right) \left(\Phi_i^T k_{ii} \Phi_i + \Phi_i^T h_i \Phi_i \right) - \left(k_{ij} \Phi_j \Phi_i^T k_{ji} \right) \left(\Phi_j^T k_{ij} \Phi_i \right) \right\} \quad (61b)$$

$$k_{ji}^p = k_{ji} - \frac{1}{W} \left\{ \left(k_{ii} \Phi_i \Phi_i^T k_{ii} \right) \left(\Phi_j^T k_{jj} \Phi_j + \Phi_j^T h_j \Phi_j \right) - \left(k_{ii} \Phi_i \Phi_j^T k_{ij} \right) \left(\Phi_i^T k_{ij} \Phi_j \right) + \right. \\ \left. + \left(k_{ij} \Phi_j \Phi_j^T k_{jj} \right) \left(\Phi_i^T k_{ii} \Phi_i + \Phi_i^T h_i \Phi_i \right) - \left(k_{ij} \Phi_j \Phi_i^T k_{ji} \right) \left(\Phi_j^T k_{ij} \Phi_i \right) \right\} \quad (61c)$$

$$k_{jj}^p = k_{jj} - \frac{1}{W} \left\{ \left(k_{ii} \Phi_i \Phi_i^T k_{ii} \right) \left(\Phi_j^T k_{jj} \Phi_j + \Phi_j^T h_j \Phi_j \right) - \left(k_{ii} \Phi_j \Phi_j^T k_{ij} \right) \left(\Phi_i^T k_{ij} \Phi_j \right) + \right. \\ \left. + \left(k_{ij} \Phi_j \Phi_j^T k_{jj} \right) \left(\Phi_i^T k_{ii} \Phi_i + \Phi_i^T h_i \Phi_i \right) - \left(k_{ij} \Phi_j \Phi_i^T k_{ji} \right) \left(\Phi_j^T k_{ij} \Phi_i \right) \right\} \quad (61d)$$

$$W = \left(C_{h_i} + C_i \right) \left(C_{h_j} + C_j \right) - \left(\Phi_i^T k_{ij} \Phi_j \right)^2 \quad (62)$$

Wyprowadzone powyżej wyrażenia na macierze sztywności termo-sprężysto-plastycznego stanu pozwalają bezpośrednio obliczyć odpowiednie współczynniki tych macierzy po uprzednim wyznaczeniu h_i i h_j .

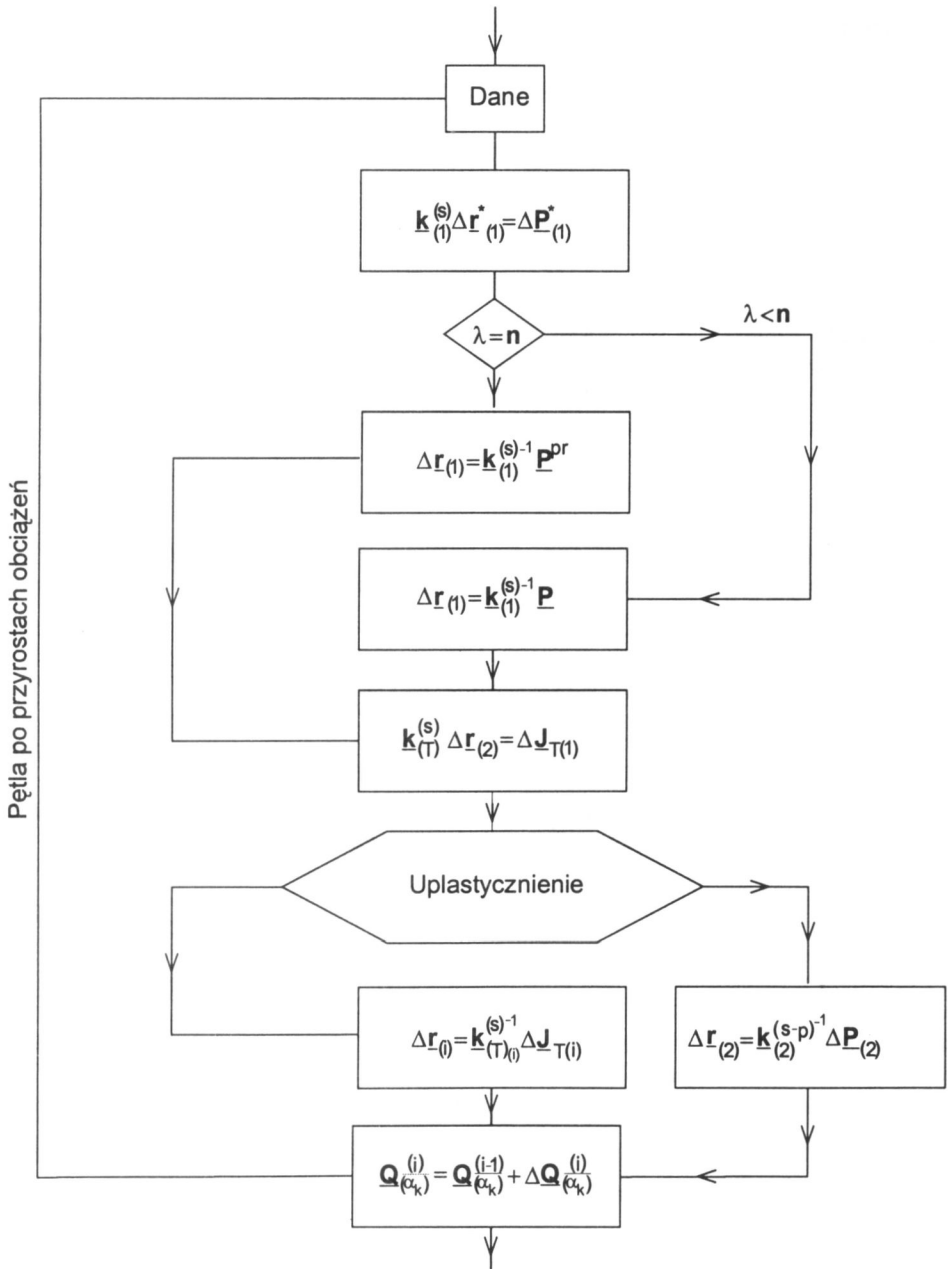
4. Algorytm obliczeń

Na podstawie podanej w rozdziale 3. teorii opracowano algorytm obliczeń, który przedstawiono na rysunku 9.

Jak wynika z rysunku 9, po wczytaniu danych rozwiązujemy liniowy układ równań postaci:

$$\underline{\mathbf{k}}_{(1)}^{(s)} \Delta \underline{\mathbf{r}}_{(1)} = \Delta \underline{\mathbf{P}}_{(1)}^* \quad (63)$$

gdzie $\Delta \underline{\mathbf{P}}_{(1)}^* = \frac{1}{n} \underline{\mathbf{P}}^{Pr}$ jest n -tą częścią obciążenia projektowego.



Rys. 9. Algorytm obliczeń
Fig. 9. Algorithm of the program

Następnie dokonujemy przeskalowania (za pomocą mnożnika λ) otrzymanego rozwiązania.

- W przypadku $\lambda > n$ przyjmujemy $\lambda = n$ i otrzymujemy rozwiązanie

$$\Delta \underline{r}_{(1)} = \underline{k}_{(1)}^{(s)-1} \underline{P}^{Pr} \quad (64)$$

- W przypadku $\lambda < n$ otrzymujemy rozwiązanie

$$\Delta \underline{r}_{(1)} = \underline{k}_{(1)}^{(s)-1} \underline{P} \quad (65)$$

zapewniające znalezienie się punktu w przestrzeni uogólnionych sił wewnętrznych na powierzchni granicznej w co najmniej jednym przekroju poprzecznym belek ramy.

W przypadku $\lambda = n$ przechodzimy do analizy termosprężystej. W tym celu zadajemy niewielki przyrost obciążenia termicznego $\Delta \underline{J}_{T(1)}$ i rozwiązujemy układ równań:

$$\underline{k}_{(1)}^{(s)}(T) \cdot \Delta \underline{r}_{(2)} = \Delta \underline{J}_{T(1)} \quad (66)$$

Procedurę powtarzamy, sprawdzając dla każdego przyrostu obciążenia termicznego warunek stanu granicznego. W przypadku uplastycznień modyfikujemy macierz $\underline{k}_{(T)}^{(s)}$ przy każdym przyroście obciążenia termicznego przez zastąpienie macierzy termosprężystych uplastycznionych elementów odpowiednimi macierzami termo-sprężysto-plastycznymi. Dla i -tego przyrostu obciążenia otrzymujemy rozwiązanie

$$\Delta \underline{r}_{(i)} = \underline{k}_{(1)}^{(s)-1}(T) \Delta \underline{J}_{T(1)} \quad (67)$$

W przypadku $\lambda < n$ przechodzimy do analizy sprężysto-plastycznej. Dla zadanego przyrostu obciążenia $\Delta \underline{P}_{(2)}$ otrzymujemy rozwiązanie sprężysto-plastyczne

$$\Delta \underline{r}_{(2)} = \underline{k}_{(2)}^{(s-p)-1} \Delta \underline{P}_{(2)} \quad (68)$$

Procedurę powtarzamy do momentu gdy $\sum_i \Delta \underline{P}_{(1)} = \underline{P}^{Pr}$, po czym przechodzimy do

analizy termo-sprężysto-plastycznej i otrzymujemy dla i -tego przyrostu obciążenia termicznego rozwiązanie zgodne z równaniem (67).

Dla i -tego przyrostu przemieszczenia $\Delta \underline{r}_{(1)}$ wyznaczamy i -ty przyrost uogólnionych sił wewnętrznych $\underline{Q}_{(\alpha k)}^{(i)}$ w przekroju przywęzłowym k -tego elementu α , przy czym globalną wartość uogólnionych sił wewnętrznych obliczamy jako sumę

$$\underline{Q}_{(\alpha k)}^{(i)} = \underline{Q}_{(\alpha k)}^{(i-1)} + \Delta \underline{Q}_{(\alpha k)}^{(i)} \quad (69)$$

Obliczenia kończymy, gdy wskazana przez użytkownika jedna ze składowych wektora przemieszczenia \underline{r} uzyska założoną wartość, względnie rama przekształci się w mechanizm.

5. Uwaga

Na podstawie algorytmu przedstawionego w p. 4 został opracowany program TASGRAM do analizy termo-sprężysto-plastycznego stanu nośności płaskich układów prętowych (ram) o przekrojach dwuteowych. Program ten jest oparty na programie ASGRAM [4] wykorzystującym system liniowej statyki konstrukcji WAT-KM [5].

Modyfikacje istniejącego w programie ASGRAM systemu analizy polegały na:

- zmianie analizy przyrostowej umożliwiającej analizę zachowania się ram dla stałego obciążenia statycznego (wywołującego w ramie stan sprężysty bądź sprężysto-plastyczny) i zmieniającego się obciążenia termicznego,
- wprowadzeniu odpowiednio zmodyfikowanych elementowych macierzy uwzględniających zmianę modułu sprężystości i granicy plastyczności w funkcji temperatury,
- stworzeniu możliwości dodatkowych obliczeń związanych z wyznaczaniem położenia osi obojętnej przekroju dwuteowego z niejednorodnym rozkładem temperatury wzdłuż jego przekroju, a także wyznaczaniem wielkości granicznych uogólnionych sił wewnętrznych z uwzględnieniem położenia osi obojętnej oraz sprawdzaniem warunku stanu granicznego z uwzględnieniem temperatury.

Bibliografia

- [1] Twardowska Z.: Określanie pól temperatury programem DOTT. *Prace Instytutu Techniki Budowlanej – Kwartalnik*, 1(53), 1985
- [2] Kosiorek M.: Charakterystyki mechaniczne stali budowlanych w podwyższonych temperaturach. Materiały VI Międzynarodowej Konferencji Naukowo-Technicznej „Konstrukcje metalowe”, Katowice 1979
- [3] Przemieniecki J. S.: *Theory of Matrix Structural Analysis*. Pergamon Press, New York 1972
- [4] Kleiber M., Sosnowski W.: Analiza ram sprężysto-plastycznych w systemie WAT-KM. *Prace IPPT*, 5, 1982
- [5] Szmelter J., Dacko M., Dobrociński S., Wieczorek M.: *Programy metody elementów skończonych*. Arkady, Warszawa 1973

THERMO-ELASTO-PLASTIC ANALYSIS OF STEEL STRUCTURES

Summary

The paper presents analysis of elasto-plastic state of loadbearing capacity of steel construction with uniform temperature distribution along the length and nonuniform temperature distribution across the height of element section. Elasto-ideally plastic model of material is considered. Program algorithm is discussed.

Praca wpłynęła do Redakcji 19 III 2002