

BADANIA I STUDIA – RESEARCH AND STUDIES

Jan Pawlikowski*

ANALIZA PROBABILISTYCZNA ZAPASU BEZPIECZEŃSTWA KONSTRUKCJI W PRZYPADKU DZIAŁANIA DWÓCH SIŁ WEWNĘTRZNYCH

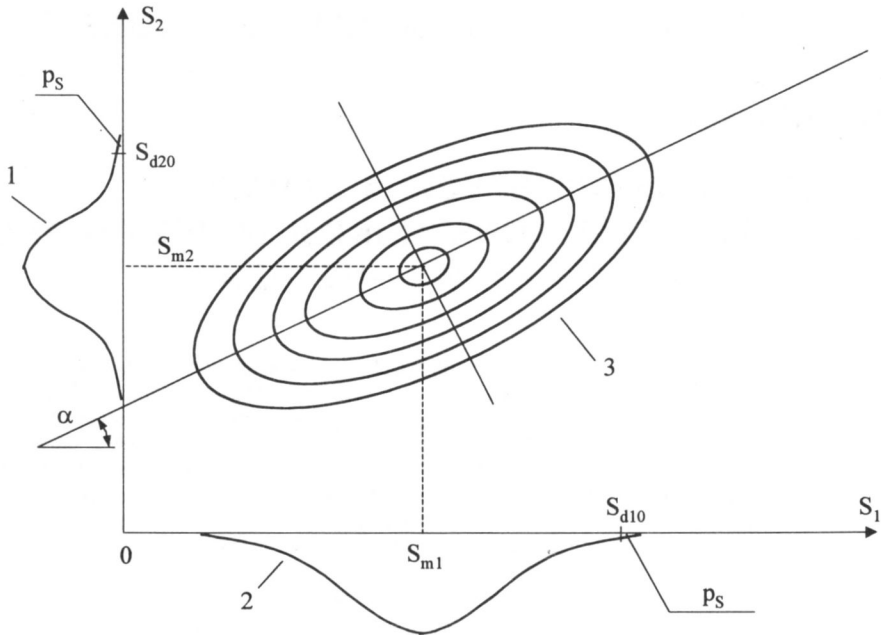
W artykule przedstawiono wyniki analizy probabilistycznej wpływu korelacji pomiędzy dwoma siłami wewnętrznymi (momentem S_1 i siłą podłużną S_2) na miarę zapasu bezpieczeństwa w stosunku do miary akceptowalnej w przypadku występowania tylko jednej obliczeniowej siły wewnętrznej S . Wyniki analizy ujawniły dodatkowe zapasy bezpieczeństwa związane z określaniem wartości obliczeniowych tych sił przy założeniu ich przekroczenia z prawdopodobieństwem akceptowalnym w przypadku przekroczenia tylko jednej siły wewnętrznej. Przedstawione przykłady obliczeń wskazują, że redukcja obliczeniowych wartości tych sił w stosunku do wartości brzegowych wyznaczonych przy $p_s = 0,001$ może wynosić do 20%. Możliwość taka może być wykorzystana praktycznie przy projektowaniu nowych konstrukcji lub przy ocenie stanu konstrukcji istniejących według metod probabilistycznych przy założeniu akceptowanego w normach podziału łącznego zapasu bezpieczeństwa na dwie części składowe przypisane nośności i siłom wewnętrznym.

1. Sformułowanie problemu

Przy weryfikacji stanu granicznego nośności metodami probabilistycznymi według ISO i CEN [1], [2] oraz zgodnie z pracami wielu autorów [3–8] przyjęto założenie, że łączny zapas bezpieczeństwa może być podzielony na dwie części przypisane odpowiednio nośności i siłom wewnętrznym. Podział taki pozwala na uściślenie metody obliczeń według częściowych współczynników bezpieczeństwa (I stopnia) oraz na stopniowe wprowadzenie dokładniejszych metod wymiarowania probabilistycznego (II i III stopnia) [4], [6], [8–10]. W efekcie jednolita miara tego zapasu wyrażona prawdopodobieństwem zniszczenia p_f może być określona za pomocą dwóch miar odpowiednio wyrażonych przez prawdopodobieństwo nieprzekroczenia nośności obliczeniowej $p_R (R \leq R_d)$ i przekroczenia obliczeniowej siły wewnętrznej $p_S (S \geq S_d)$. Założenie takie jest ścisłe w przypadku pełnej niezależności (lub niewielkiej korelacji) nośności R i sił wewnętrznych S (wtedy prawdopodobieństwo zniszczenia $p_f = p_S p_R$) lub w przypadku kiedy efekt oddziaływań jest „jednowymiarowy”, tj. kiedy jest wyrażony przez jedną dominującą siłę wewnętrzną (S_1). Jednak w przypadku gdy efekt ten jest „wielowymiarowy”, tj. kiedy jest wyrażony przez

* dr hab. inż. – prof. ITB i PW

co najmniej dwie siły wewnętrzne (np. w postaci siły normalnej S_1 i jednego momentu zginającego S_2) od kilku oddziaływań (w tym od obciążeń stałych i zmiennych), pomiędzy tymi siłami zachodzą zależności korelacyjne mające wpływ na wyniki obliczeń probabilistycznych.



Rys. 1. Funkcja gęstości normalnego rozkładu prawdopodobieństwa dwuwymiarowej zmiennej losowej $f(S_1, S_2)$
 1 – rozkład brzegowy $f(S_1)$, 2 – rozkład brzegowy $f(S_2)$, 3 – $f(S_1, S_2) = \text{const}$.

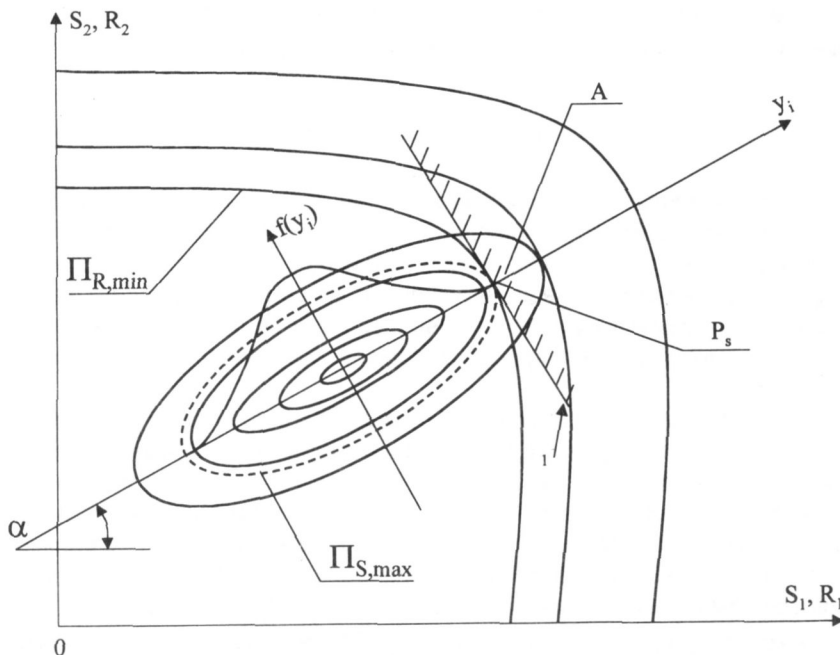
Interpretację probabilistyczną przypadku występowania dwóch sił wewnętrznych ilustruje rozkład dwuwymiarowy (rys. 1) o funkcji gęstości $f(S_1, S_2)$ [3], [7], [8]. Rozkładami brzegowymi tego rozkładu są dwa „wyidealizowane” (ekwiwalentne) rozkłady jednowymiarowe $f(S_1)$ i $f(S_2)$. Linie elips ilustrują przebieg eliptycznych warstwic funkcji gęstości prawdopodobieństwa dwuwymiarowej zmiennej losowej $f(S_1, S_2) = \text{const}$ z osiami elips obróconymi w stosunku do układu współrzędnych S_1 i S_2 o kąt α zależny od wartości współczynnika korelacji ρ_{S_1, S_2} . Przy $\alpha = 0$ współczynnik korelacji $\rho_{S_1, S_2} = 0$ i kierunki osi elipsy pokrywają się z kierunkami osi współrzędnych S_1 i S_2 , a przy $\alpha > 0$ współczynnik korelacji $\rho_{S_1, S_2} > 0$. W przypadku kiedy $\alpha < 0$ dłuższa oś elipsy na rysunku 1 będzie skierowana do osi współrzędnej S_1 . Wartości brzegowe obliczeniowych sił wewnętrznych S_{d10} i S_{d20} , odpowiadające przypadkowi występowania tylko jednej siły wewnętrznej, są kwantylami rzędu p_S rozkładów brzegowych o funkcjach gęstości prawdopodobieństw odpowiednio $f(S_1)$ i $f(S_2)$.

Interpretację graficzną stanów bezpiecznych i niebezpiecznych konstrukcji w analizowanym przypadku dwóch sił wewnętrznych przedstawia wykres interakcji sił wewnętrznych i nośności na rysunku 2. Interakcja sił wewnętrznych S_1 i S_2 jest wyrażona za

pomocą dwuwymiarowego rozkładu o gęstości prawdopodobieństwa $f(S_1, S_2)$, a interakcja nośności R_1 i R_2 (składowych sił uogólnionych, np. siły normalnej i momentu) za pomocą krzywych interakcji przypisanych stałym prawdopodobieństwom nieprzekroczenia wartości obliczeniowej pary R_1 i R_2 . Bezpieczeństwo konstrukcji jest zachowane, jeśli para sił (obliczeniowych) S_{d1} , S_{d2} , na ogół mniejszych od wartości brzegowych S_{d10} i S_{d20} , znajduje się w obszarze ograniczonym linią interakcji $\Pi_{R, \min}$ wyznaczoną przy założeniu stałego prawdopodobieństwa nieprzekroczenia niośności obliczeniowej p_R (rys. 2). Element konstrukcji może być poddany parom sił wewnętrznych S_{1d} , S_{2d} o różnych wartościach. Jeśli wartości te znajdują się na lewo od krzywej interakcji $\Pi_{R, \min}$ przypisanej stałemu akceptowalnemu prawdopodobieństwu $p_R = \text{const.}$, wówczas stan graniczny konstrukcji nie jest przekroczony z prawdopodobieństwem równym co najwyżej p_R [7], [8]. Wartości S_{1d} , S_{2d} usytuowane wzdłuż linii interakcji $\Pi_{S, \max}$ stanowią zbiór punktów geometrycznych, dla których

$$f(S_1, S_2) dA = p(y_i \geq y_{id}) = p_S$$

naniesionych na rysunku 2 linią $\Pi_{S, \max}$. Warunek bezpieczeństwa jest spełniony, jeśli linie $\Pi_{R, \min}$ i $\Pi_{S, \max}$ nie przecinają się, zatem linia interakcji $\Pi_{R, \min}$ rozgranicza dwa stany konstrukcji: bezpieczny i niebezpieczny. Przy wyznaczaniu zbiorów punktów Π_S i Π_R można się posłużyć rozkładami $f(y_i)$ interpretowanymi jako rzuty łącznego rozkładu $f(S_1, S_2)$ na osie y_i ze wspólnym punktem przecięcia, na przykład w punkcie wartości średnich [7], [8]. Linie warstwicy $f(S_1, S_2)$ nie pokrywają się z liniami Π_S .



Rys. 2. Interpretacja stanów bezpiecznych i niebezpiecznych
 1 – linia ograniczająca obszar całkowania A, $\Pi_{S, \max}$ – zbiór wartości par obliczeniowych sił wewnętrznych S_{d1} i S_{d2} przyporządkowanych prawdopodobieństwu przekroczenia p_S

Analiza jednowymiarowego efektu kilku oddziaływań była przedmiotem artykułów [12], [13]. Wykazano tam, że przy założeniu rozkładów oddziaływań jako ekstremalnych I typu [14] oraz liniowej transformacji oddziaływań w siły wewnętrzne rozkład jednowymiarowej (jednej) siły wewnętrznej jest rozkładem Pearsona III typu (rys. 3), którego trzy parametry, tj. wartość średnią S_m , odchylenie standardowe σ_S (lub współczynnik zmienności V_S) i współczynnik skośności a_S mogą być wyznaczone według wzorów wyprowadzonych metodą momentów [6], [7], [13]. Wykazano ponadto, że akceptowalną miarą zapasu bezpieczeństwa jest prawdopodobieństwo przekroczenia obliczeniowej siły wewnętrznej S_d równe

$$p_S = p(S \geq S_d) = 0,001$$

Wartość $p_S = p(S \geq S_d) = 0,001$ stanowi dobre oszacowanie wartości obliczeniowych sił wewnętrznych wyznaczanych na podstawie rozkładów brzegowych S_{d10} , S_{d20} oraz S_{d1N} , S_{d2N} określanych według zasad normowych przy założeniu wartości częściowych współczynników bezpieczeństwa $\gamma_G = 1,15$, $\gamma_Q = \gamma_W = 1,4$ oraz współczynników jednoczesności $\Psi_0 = 0,6$ dla obciążenia wiatrem i $\Psi_0 = 0,7$ dla obciążeń użytkowych przyjętych w załączniku do projektu polskiej wersji Eurokodu 1 [12] ($S_{d10} \approx S_{d1N}$, $S_{d2N} \approx S_{d20}$).

Przyjmując prawdopodobieństwo $p_S = p(S \geq S_d) = \text{const.}$ jako kryterium optymalizacyjne, wzór na obliczeniową siłę wewnętrzną można wyrazić w postaci:

$$S_d = S_m (1 + \beta_S V_S) \quad (1)$$

gdzie V_S jest współczynnikiem zmienności rozkładu zmiennej losowej S .

Wskaźnik niezawodności β_S (rys. 3) jest określony za pomocą wzoru:

$$\beta_S = \beta_S(a_S) = \frac{(S_d - S_m)}{\sigma_S} \quad (2)$$

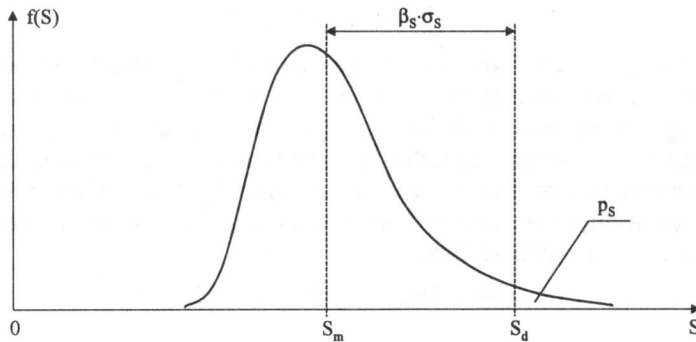
w którym wartość odchylenia standardowego σ_S odnosi się do odchylenia standardowego siły wewnętrznej o rozkładzie Pearsona III typu, zatem ze współczynnikiem skośności a_S . Wartości $\beta_S(a_S)$ przyporządkowane stałym wartościom p_S mogą być wyznaczone według wykresu przedstawionego na rysunku 4. Do celów związanych z analitycznym wyznaczeniem obliczeniowych sił wewnętrznych S_1 i S_2 można przyjąć, że rozkłady brzegowe Pearsona III typu mogą być zastąpione ekwiwalentnymi rozkładami normalnymi (vide p. 2).

Wzór (2) stanowi pewne odstępstwo od klasycznego (normowego) podejścia przy obliczaniu sił wewnętrznych, pozwalające na nieuwzględnianie w obliczeniach częściowych współczynników bezpieczeństwa i współczynników jednoczesności. Wpływ tych współczynników wyraża miara zapasu bezpieczeństwa w postaci wskaźnika bezpieczeństwa.

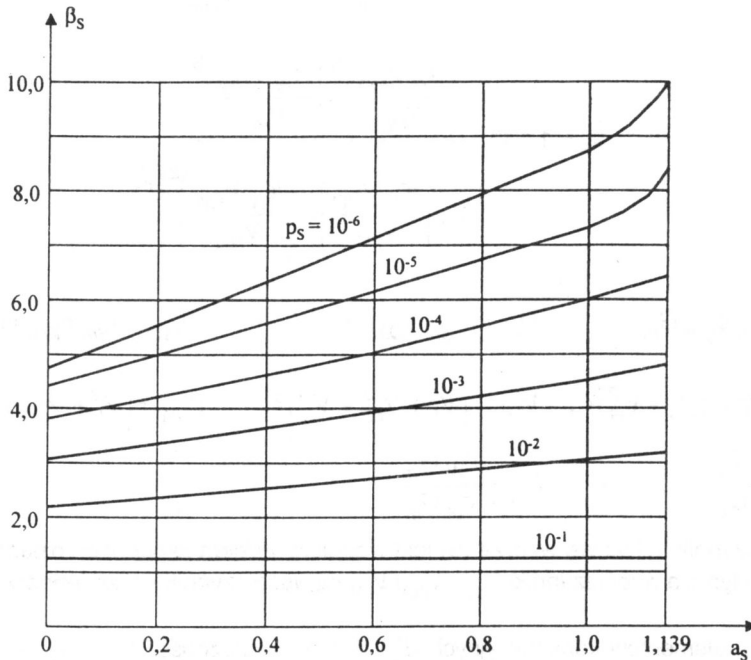
Celem artykułu jest ustalenie, w jakim stopniu zależności korelacyjne pomiędzy parą sił S_1 i S_2 wpływają na miarę zapasu bezpieczeństwa w porównaniu do miary stosowanej w przypadku tylko jednej siły wewnętrznej $p_S = p(S_1 \geq S_{d10}) = p(S_2 \geq S_{d20})$.

Założenie, że $p_S = p(S_1 \geq S_{d10}) = p(S_2 \geq S_{d20})$ oznacza, że na konstrukcję niezależnie działa siła $S_1 \geq S_{d10}$ lub $S_2 \geq S_{d20}$ z prawdopodobieństwem przekroczenia p_S . W przypadku kiedy siły te działają równocześnie, wartościom sił obliczeniowych S_{d1} i S_{d2} odpowiadają prawdopodobieństwa $p_{S1} = p(S_1 \geq S_{d1})$ oraz $p_{S2} = p(S_2 \geq S_{d2})$, które mogą przybierać różne

wartości dla tego samego prawdopodobieństwa p_S przekroczenia pary sił S_{d1} i S_{d2} w zależności od ich usytuowania wzdłuż linii $\Pi_{S_{\max}}$ na rysunku 2. Należy zatem przyjąć kryterium optymalizacyjne, pozwalające na wybór optymalnej wartości prawdopodobieństwa przekroczenia obliczeniowych sił wewnętrznych S_{d1} i S_{d2} przy weryfikacji stanu granicznego według zasad normowych. Można przyjąć, że takim kryterium jest minimalne prawdopodobieństwo przewyższenia co najmniej jednego z kwantyli S_{d1} , S_{d2} , (to znaczy, że przewyższenie może wystąpić w najmniejszej liczbie przypadków – vide p. 3).



Rys. 3. Funkcja gęstości rozkładu prawdopodobieństwa jednowymiarowej zmiennej losowej $f(S)$



Rys. 4. Zależność $\beta_S(a_S)$ przy $p_S = \text{const.}$

2. Rozwiązanie zadania

Do obliczenia prawdopodobieństwa p_S i przyporządkowanych mu wartości obliczeniowych sił wewnętrznych S_{d1} i S_{d2} konieczna jest znajomość typu i parametrów brzegowych rozkładów zmiennych losowych S_1 i S_2 (rys. 1, 2 i 3). Wzory na wartości parametrów tych rozkładów mają postać identyczną jak w przypadku jednej siły wewnętrznej [3], [7], [8], [12]. W najczęściej spotykanym przypadku występowania trzech obciążeń efekt oddziaływań można przedstawić za pomocą wzoru

$$S = I_S (c_G + c_Q Q + c_W W) \quad (3)$$

w którym wartości c , z odpowiednimi indeksami, są współczynnikami wpływu do transformacji obciążeń w siły wewnętrzne, a G , Q i W zmiennymi losowymi obciążeniami od ciężaru własnego, obciążenia użytkowego, obciążenia wiatrem itd., a I_S jest zmienną losową wyrażającą niedokładność modelu obliczeniowego. Przy założeniu, że zmienne G , Q i W są opisane za pomocą rozkładów normalnych (I_S , c , G) i ekstremalnych I typu (Q , W) aproksymowanych rozkładem Pearsona III typu [12], wzory na pierwsze trzy parametry rozkładu S przyjmują postać:

$$\begin{aligned} S_m &= H_{Gm} (1 + K_Q + K_W) \\ \sigma_S &= H_{Gm} V_{HG} \left[1 + \left(\frac{K_Q V_{HQ}}{V_{HG}} \right)^2 + \left(\frac{K_W V_{HW}}{V_{HG}} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \\ a_S &= 1,139 \frac{\left(\frac{K_Q V_{HQ}}{V_{HG}} \right)^3 + \left(\frac{K_W V_{HW}}{V_{HG}} \right)^3}{\left[1 + \left(\frac{K_Q V_{HQ}}{V_{HG}} \right)^2 + \left(\frac{K_W V_{HW}}{V_{HG}} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}} \end{aligned} \quad (4)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} H_{Gm} &= I_{Sm} c_{Gm} G_m, & H_{Qm} &= I_{Sm} c_{Qm} Q_m, & H_{Wm} &= I_{Sm} c_{Wm} W_m, \\ V_{HG} &= \left(V_I^2 + V_{cG}^2 + V_G^2 \right)^{\frac{1}{2}}, & V_{HQ} &= \left(V_I^2 + V_{cQ}^2 + V_Q^2 \right)^{\frac{1}{2}}, & V_{HW} &= \left(V_I^2 + V_{cW}^2 + V_W^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \\ K_Q &= \frac{c_Q Q_m}{c_G G_m}, & K_W &= \frac{c_W W_m}{c_G G_m} \end{aligned}$$

Współczynnik 1,139 we wzorze (5) jest współczynnikiem skośności rozkładu ekstremalnego I typu, a współczynniki V_{cG} , V_{cQ} i V_{cW} są współczynnikami zmienności rozkładu

sztywności elementów konstrukcyjnych ($E_c J$) według zależności $V_c = \left(V_{Ec}^2 + V_J^2 \right)^{\frac{1}{2}}$ [6], [12]. Zwykle przyjmuje się $I_{Sm} = 1,0$.

Wartości współczynników K_Q i K_W mają swoją interpretację fizyczną. Wyrażają one wpływ obciążeń zmiennych użytkowych (Q) i od wiatru (W) na wielkość sił wewnętrznych w stosunku do siły wewnętrznej spowodowanej obciążeniem stałym (G). W ten sposób współczynniki te określają, które z obciążeń działających na konstrukcję jest obciążeniem dominującym. W przypadku konstrukcji o dużym ciężarze własnym wartości K_Q i K_W są niewielkie (w porównaniu z jednością), a w przypadku konstrukcji lekkich – odpowiednio większe.

Wartości prawdopodobieństw p_S można obliczyć poprzez całkowanie funkcji gęstości $f(S)$ w granicach od $S_d + \infty$ (rys. 3) lub określać za pomocą wykresu podanego na rysunku 4, ilustrującego zależność między wartością wskaźnika bezpieczeństwa β_S i współczynnikiem skośności rozkładu a_S przypisanym stałemu prawdopodobieństwu p_S . Wartości skrajne krzywych $\beta_S(a_S)$ odpowiadają rozkładowi normalnemu ($a_S = 0$) i rozkładowi ekstremalnemu I stopnia ($a_S = 1,139$). Pozostałe wartości zostały podane według pracy [7] dla rozkładu Pearsona III typu. Stałe prawdopodobieństwo przekroczenia siły wewnętrznej jest zapewnione, jeśli $\beta_S(a_S)$ jest wyznaczane według krzywych dla $p_S = 0,001$, które można aproksymować prostą w postaci:

$$\beta_S = \beta(p_S = 0,001) = 3,09(1 + 0,47 a_S) \quad (5)$$

dobrze opisującą zależność $\beta_S = \beta(p_S = 0,001)$.

W przypadku dwóch sił wewnętrznych, na przykład siły normalnej i momentu zginającego, wartości tych sił określają wzory:

$$S_1 = I_S(c_{11} X_1 + c_{12} X_2 + c_{13} X_3 + \dots) \quad (6a)$$

$$S_2 = I_S(c_{21} X_1 + c_{22} X_2 + c_{23} X_3 + \dots) \quad (6b)$$

których rozkłady brzegowe $f(S_1)$ i $f(S_2)$ są, podobnie jak poprzednio, rozkładami Pearsona III typu, z tym jednak, że pomiędzy nimi – jako funkcjami tych samych zmiennych losowych oddziaływań $X_{1,2,3}$ – zachodzi zależność probabilistyczna wyrażona wartością współczynnika korelacji ρ_{S_1, S_2} .

Dokładne obliczanie wartości prawdopodobieństw p_S wymaga zastosowania metod symulacyjnych Monte Carlo lub wielowymiarowego całkowania [4], [5], [8], [9], [11]. Istnieje jednak możliwość uzyskania przybliżonego rozwiązania analitycznego przy założeniu ekwiwalentnych normalnych rozkładów $f_E(S_1)$ i $f_E(S_2)$. Spośród kilku sposobów określania parametrów rozkładu ekwiwalentnego [3], [10], [11] można przyjąć sposób polegający na zgodności $f(S_1)$ i $f(S_2)$ oraz $f_E(S_1)$ i $f_E(S_2)$ w dwóch punktach przypisanych zadanym prawdopodobieństwom, na przykład $p(S \geq S_m) = 0,5$ i $p(S \geq S_d) = 0,001$, czyli w obszarze wartości średnich i obliczeniowych (rys. 5). W takim przypadku, jeśli parametry rozkładów brzegowych rozkładu Pearsona III typu według wzoru (4) wynoszą odpowiednio S_{m1} , σ_{S1} , a_{S1} oraz S_{m2} , σ_{S2} , a_{S2} , wartości średnie rozkładów ekwiwalentnych, zgodnie z rysunkiem 5, pozostaną bez zmian ($S_{m1} = S_{m1E}$, $S_{m2} = S_{m2E}$), a odchylenia standardowe określają wzory:

$$\sigma_{ES1} = (1 + 0,47 a_{S1}) \sigma_{S1} \quad (7a)$$

$$\sigma_{ES2} = (1 + 0,47 a_{S2}) \sigma_{S2} \quad (7b)$$

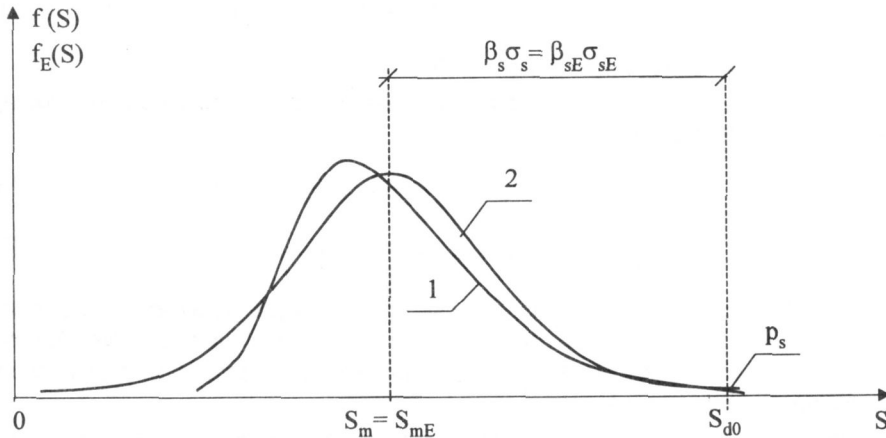
Współczynniki w nawiasach wzoru (7a) i (7b) wyrażają zwiększenie odchylenia standardowego ekwiwalentnego rozkładu normalnego w punkcie obliczeniowym S_{d1} , S_{d2} przypisanym przyjętemu prawdopodobieństwu przekroczenia wartości obliczeniowej $p_S = 0,001$.

Aproksymacja w obszarze wartości obliczeniowej zapewnia większą dokładność obliczeń, gdyż w tym przedziale zgodność odpowiednio $f(S_1)$ i $f_E(S_1)$ oraz $f(S_2)$ i $f_E(S_2)$ jest najlepsza [3], [10], [11].

Z porównania wzorów (3) i (6) wynika, że w przypadku posługiwania się wartością ekwiwalentnego odchylenia standardowego wartość „ekwiwalentnego” wskaźnika bezpieczeństwa

$$\beta_{SE} = \beta(p_S = \text{const.}) = \frac{S_d - S_m}{\sigma_{SE}} \quad (8)$$

przy $p_S = 0,001$ wynosi 3,09. Wartości β_S i β_{SE} , jakkolwiek ilościowo różne, są przypisane tym samym wartościom przekroczenia obliczeniowych sił wewnętrznych S_d .



Rys. 5. Aproksymacja rozkładu Pearsona III typu (1) za pomocą ekwiwalentnego rozkładu normalnego (2) przy zgodności w dwóch punktach przypisanych prawdopodobieństwom p ($S \geq S_m$) = 0,5 i p ($S \geq S_d$) = 0,001:

- 1 – rozkład Pearsona III typu (z parametrami S_m, σ_S, a_S),
- 2 – ekwiwalentny rozkład normalny (z parametrami $S_m, \sigma_{SE} = (1 + 0,47 a_S) \sigma_S$

W przypadku gdy rozkłady brzegowe $f(S_1)$ i $f(S_2)$ są rozkładami normalnymi (ekwiwalentnymi), dwuwymiarowy rozkład efektów oddziaływań S_1 (momentu zginającego) i S_2 (siły normalnej) [3] przyjmie postać:

$$f(S_1, S_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_{S1}\sigma_{S2}} \exp\left[\frac{-\lambda^2}{2(1-\rho_{S1,S2}^2)}\right] \quad (9)$$

gdzie:
$$\lambda^2 = \frac{(S_1 - S_{m1})^2}{\sigma_{S1}^2} - \frac{2\rho_{S1,S2}(S_1 - S_{m1})(S_2 - S_{m2})}{\sigma_{S1}\sigma_{S2}} + \frac{(S_2 - S_{m2})^2}{\sigma_{S2}^2}$$

$$S_{m1} = c_{11} X_{m1} + c_{12} X_{m2} + c_{13} X_{m3}$$

$$S_{m2} = c_{21} X_{m1} + c_{22} X_{m2} + c_{23} X_{m3}$$

$$\sigma_{S1} = \left(c_{11}^2 \sigma_{X1}^2 + c_{12}^2 \sigma_{X2}^2 + c_{13}^2 \sigma_{X\#}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\sigma_{S2} = \left(c_{21}^2 \sigma_{X1}^2 + c_{22}^2 \sigma_{X2}^2 + c_{23}^2 \sigma_{X\#}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

oraz

$$\rho_{S1,S2} = \frac{c_{11} c_{21} \sigma_{X1}^2 + c_{12} c_{22} \sigma_{X2}^2 + c_{13} c_{23} \sigma_{X\#}^2}{\sigma_{S1} \sigma_{S2}} \quad (10)$$

W przypadku większej liczby oddziaływań, do mianownika wzoru na $\rho_{S1,S2}$ należy podstawić wyrażenie na kowariancję ($COV_{S1,S2}$) zmiennych losowych S_1 i S_2 [3], [15], [16].

Wzory (10) i (11) odnoszą się do wartości odchyłeń standardowych przypisanych rozkładom oddziaływań bez aproksymacji w ekwiwalentne rozkłady normalne. Jednak w przypadku kiedy współczynniki a_{Si} zgodnie z wzorem (4) są większe od zera, w dalszych obliczeniach sił wewnętrznych – jak zostanie to wykazane w p. 3 – można się posługiwać ekwiwalentnymi rozkładami normalnymi.

Obliczanie prawdopodobieństw p_S można przeprowadzić za pomocą wzorów wyprowadzonych na podstawie transformacji zmiennych zależnych (skorelowanych) S_1 i S_2 w zmienne niezależne (nieskorelowane) y_1 i y_2 [3], [15]. Transformacja polega na obrocie rozkładu $f(S_1, S_2)$ wokół wartości średnich S_{1m} , S_{2m} (rys. 6) za pomocą zależności:

$$y_1 = S_{10} \cos \alpha + S_{20} \sin \alpha \quad (11a)$$

$$y_2 = -S_{10} \sin \alpha + S_{20} \cos \alpha \quad (11b)$$

w której S_{10} i S_{20} są odpowiednio przyrostami S_1 i S_2 w stosunku do wartości średnich S_{m1} , S_{m2} .

Wartości odchyłeń standardowych zmiennych y_1 i y_2 można określić za pomocą wzorów:

$$\sigma_{y1} = \left(\sigma_{S1}^2 \cos^2 \alpha + \sigma_{S2}^2 \sin^2 \alpha + 2 \rho_{S1,S2} \sigma_{S1} \sigma_{S2} \sin \alpha \cos \alpha \right)^{\frac{1}{2}} \quad (12a)$$

$$\sigma_{y2} = \left(\sigma_{S1}^2 \sin^2 \alpha + \sigma_{S2}^2 \cos^2 \alpha - 2 \rho_{S1,S2} \sigma_{S1} \sigma_{S2} \sin \alpha \cos \alpha \right)^{\frac{1}{2}} \quad (12b)$$

Warunek niezależności zmiennych y_1 , y_2 jest spełniony, jeśli wartość kowariancji $COV_{y1,y2}$ jest równa zeru. W takim przypadku kąt obrotu osi elipsy y_1 , y_2 określi wzór:

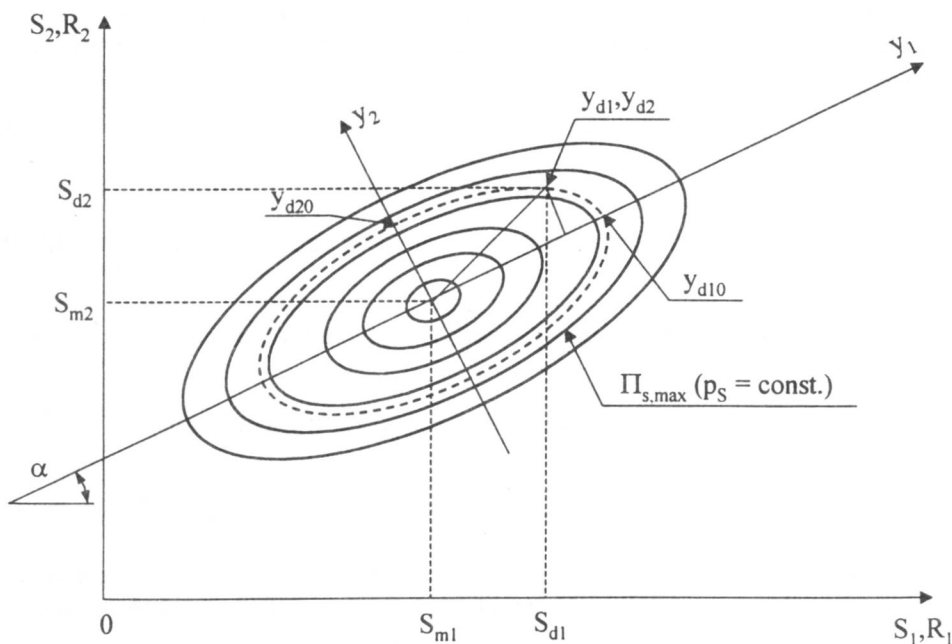
$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \rho_{S1,S2} \sigma_{S1} \sigma_{S2}}{\sigma_{S1}^2 - \sigma_{S2}^2} \quad (13)$$

W ten sposób rozkład dwóch zależnych zmiennych losowych $f(S_1, S_2)$ został przekształcony w rozkłady dwóch niezależnych zmiennych losowych y_1, y_2 o takim samym układzie warstwic $f(y_1, y_2)$ jak $f(S_1, S_2)$. W takiej sytuacji prawdopodobieństwa przekroczenia obliczeniowych wartości par sił wewnętrznych S_{d1} i S_{d2} znajdujących się na osiach y_1 i y_2 można obliczać tak, jak dla rozkładu normalnego przy odchyleniach standardowych σ_{y1} i σ_{y2} . Rozkłady $f(y_1)$ i $f(y_2)$ są rozkładami „skumulowanymi”, wyrażającymi maksymalne prawdopodobieństwo przekroczenia wartości p ($y_1 \geq y_{d1}$) lub p ($y_2 \geq y_{d2}$) odpowiednio wzdłuż osi y_1 lub y_2 . Decydujący jest rozkład wzdłuż dłuższej osi elipsy y_1 . Wtedy zachodzi zależność:

$$p(y_1 \geq y_{d10}) = p_S$$

Wartości y_{d1} i y_{d2} (rys. 6) wyznaczają wartości par obliczeniowych sił wewnętrznych S_{d1} i S_{d2} . Wartości brzegowe y_{d10} i y_{d20} są przyporządkowane prawdopodobieństwu $p(y_1 \geq y_{d1}) = 0,001$ i w przypadku rozkładu normalnego y_1 i y_2 wynoszą odpowiednio $3,09 \sigma_{y1}$ i $3,09 \sigma_{y2}$. Wybór wartości y_{d1}, y_{d2} zależy od przyjętego kryterium optymalizacyjnego.

Wartości $\alpha \left(\frac{\sigma_{S2}}{\sigma_{S1}}, \rho_{S1, S2} \right)$ dla dodatnich i ujemnych współczynników $\rho_{S1, S2}$ podano w tabelicy 1. Wartość kąta α określa, która z sił wewnętrznych decyduje o usytuowaniu dłuższej osi elipsy y_1 przy $\sigma_1 > \sigma_2$ i w jakim stopniu wartości S_{d1} i S_{d2} przewyższają wartości średnie (rys. 6). Najwyższe przewyższenie nastąpi przy $\alpha = 45^\circ$.



Rys. 6. Zasada transformacji rozkładu zmiennych zależnych S_1, S_2 w dwa rozkłady niezależnych zmiennych losowych y_1, y_2

Tablica 1. Wartości liczbowe kątów α w zależności od stosunku $\frac{\sigma_{S2}}{\sigma_{S1}}$ oraz współczynnika $\rho_{S1,S2}$ (przy ujemnych $\rho_{S1,S2}$ wartości kątów α są ujemne)

$\rho_{S1,S2}$	$\sigma_{S2} / \sigma_{S1}$			
	0,25	0,50	0,75	1,00
0	0°	0°	0°	0°
0,25	3,78°	9,22°	20,30°	45,00°
0,50	7,47°	16,85°	29,87°	45,00°
0,75	10,90°	22,50°	34,37°	45,00°
1,00	14,04°	26,56°	36,87°	45,00°

Wartości odchyień standardowych σ_{y1} i σ_{y2} określonych wzorami (13a) i (13b) wygodnie jest wyznaczyć jako funkcję ilorazu $\frac{\sigma_{S2}}{\sigma_{S1}}$. Przy założeniu $\sigma_{S2} \leq \sigma_{S1}$, w wyniku przekształcenia wzorów (12), otrzymuje się:

$$\eta_1 = \frac{\sigma_{y1}}{\sigma_{S1}} = \left[\cos^2 \alpha + \left(\frac{\sigma_{S2}}{\sigma_{S1}} \right)^2 \sin^2 \alpha + 2 \rho_{S1,S2} \sigma_{S1} \sigma_{S2} \sin \alpha \cos \alpha \right]^{\frac{1}{2}} \quad (14a)$$

$$\eta_2 = \frac{\sigma_{y2}}{\sigma_{S1}} = \left[\sin^2 \alpha + \left(\frac{\sigma_{S2}}{\sigma_{S1}} \right)^2 \cos^2 \alpha - 2 \rho_{S1,S2} \sigma_{S1} \sigma_{S2} \sin \alpha \cos \alpha \right]^{\frac{1}{2}} \quad (14b)$$

Wartość stosunku $\frac{\sigma_{S2}}{\sigma_{S1}}$ we wzorach (14) można interpretować jako

$$\frac{V_2 S_{m2}}{V_{S1} S_{m1}}$$

gdzie V_{S1} i V_{S2} są współczynnikami zmienności zmiennych losowych S_1 i S_2 .

Wielkości współczynników η_1 , η_2 (tablica 2 i 3) wskazują, że wartości odchyień standardowych zmiennej σ_{y1} przy współczynnikach $\rho_{S1,S2} > 0$ są co najmniej równe lub większe od odchylenia standardowego rozkładu brzegowego σ_{S1} , a w skrajnym przypadku większe o ponad 40%.

Wartości odchyień standardowych zmiennej y_2 przy $\frac{\sigma_{S2}}{\sigma_{S1}} \leq 1,0$ są liczbowo znacznie

mniejsze. Przy wartości współczynnika korelacji $\rho_{S1,S2} < 0,25$ i stosunku $\frac{\sigma_{S2}}{\sigma_{S1}} < 0,5$ wpływ współczynników η_1 , η_2 na wynik obliczeń jest nieznaczący. W związku z tym można przyjąć $\sigma_{y1} \approx \sigma_{S1}$. Należy zauważyć, że wartości odchyień standardowych σ_{y2} zmiennej

y_2 w przypadku $\rho_{S_1, S_2} = 0$ są równe zero. Oznacza to, że przy pełnej niezależności S_1 i S_2 transformacja rozkładu $f(y_1, y_2)$ dotyczy tylko kierunku osi y_1 (dłuższej osi elipsy).

W przypadku zmiennych losowych nieskorelowanych S_1, S_2 , zatem zgodnie z postanowieniami aktualnych norm, $\rho_{S_1, S_2} = 0$, w związku z czym $\eta_{1,2} = 1,0$.

Tablica 2. Wartości liczbowe współczynników $\eta_1 \left(\pm \rho_{S_1, S_2}, \frac{\sigma_{S_2}}{\sigma_{S_1}} \right); \eta_1 = \frac{\sigma_{y1}}{\sigma_{S_1}}$

ρ_{S_1, S_2}	$\sigma_{S_2} / \sigma_{S_1}$			
	0,25	0,50	0,75	1,00
0	1,000	1,000	1,000	1,000
0,25	1,014	1,029	1,054	1,118
0,50	1,055	1,102	1,150	1,225
0,75	1,116	1,192	1,249	1,323
1,00	1,145	1,270	1,343	1,414

Tablica 3. Wartości liczbowe współczynników $\eta_2 \left(\pm \rho_{S_1, S_2}, \frac{\sigma_{S_2}}{\sigma_{S_1}} \right); \eta_2 = \frac{\sigma_{y2}}{\sigma_{S_1}}$

ρ_{S_1, S_2}	$\sigma_{S_2} / \sigma_{S_1}$			
	0,25	0,50	0,75	1,00
0	0,250	0,500	0,750	1,000
0,25	0,241	0,479	0,702	0,866
0,50	0,215	0,417	0,589	0,707
0,75	0,162	0,308	0,422	0,500
1,00	0	0	0	0

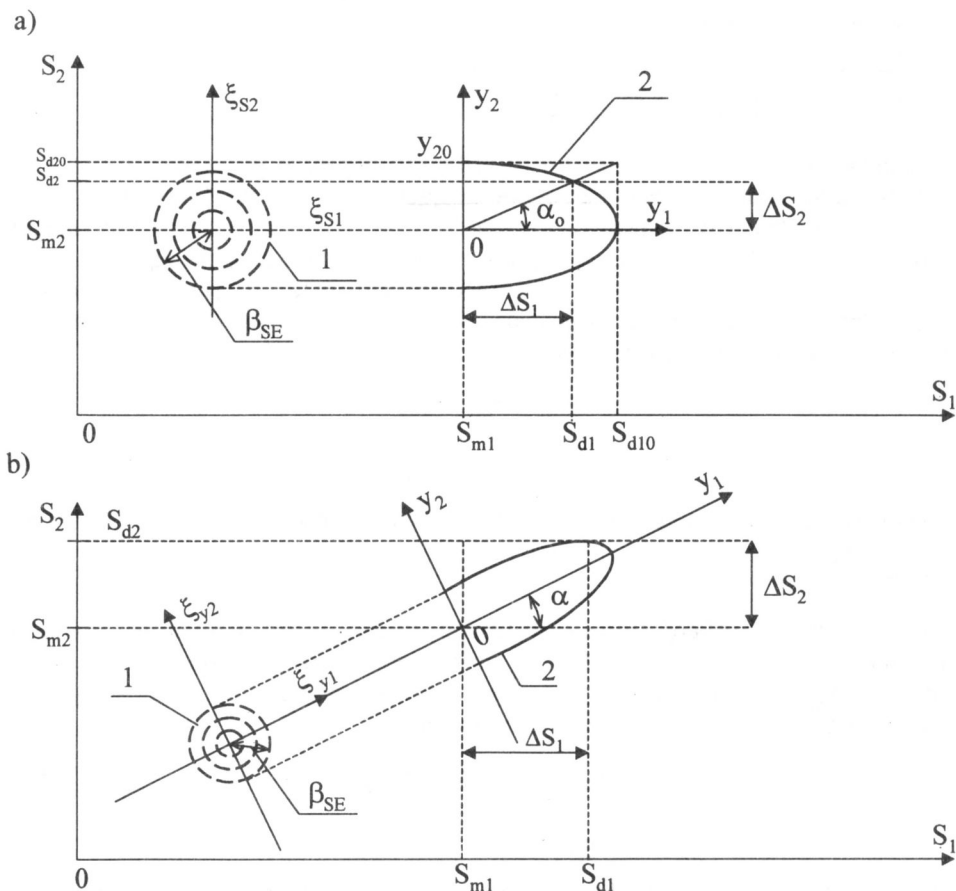
3. Obliczanie wartości S_{d1} i S_{d2}

Do obliczania wartości S_{d1} i S_{d2} przypisanych założonemu prawdopodobieństwu $p_S = 0,001$ wygodnie jest posłużyć się unormowanymi rozkładami zmiennych $S_1 - S_{m1}$ i $S_2 - S_{m2}$ oraz y_1 i y_2 (tj. o wartościach średnich równych zero i odchyleniach standardowych równych jedności), przy założeniu układu współrzędnych unormowanych:

$$\xi_{S1} = \frac{S_1 - S_{m1}}{\sigma_{S1E}} \quad \xi_{S2} = \frac{S_2 - S_{m2}}{\sigma_{S2E}} \quad \xi_{y1} = \frac{y_1}{\sigma_{y1E}} \quad \xi_{y2} = \frac{y_2}{\sigma_{y2E}}$$

Ilustrację graficzną takich rozkładów przedstawia rysunek 7. Średnice obwodów kół są równe ekwiwalentnym wskaźnikom bezpieczeństwa β_{SE} . Rozkłady unormowane można wykorzystać do wyznaczenia wykresu par obliczeniowych sił wewnętrznych

spełniających warunek $p_s = \text{const}$. Wykres tych sił wyznacza się poprzez „rzutowanie” punktów z rozkładu unormowanego przypisanych stałym β_{SE} na osie współrzędnych S_1 , S_2 lub y_1, y_2 . W przypadku kiedy $\frac{\sigma_{S_2 E}}{\sigma_{S_1 E}} < 1,0$, wartości współrzędnych ξ_{S_1} lub y_1 należy zwiększyć w stosunku $\frac{\sigma_{S_1 E}}{\sigma_{S_2 E}}$ lub $\frac{\sigma_{y_1 E}}{\sigma_{y_2 E}}$. Wartości $\xi_{2,1}$ lub $\xi_{1,2}$ można interpretować jako wskaźniki bezpieczeństwa przypisane różnym prawdopodobieństwom p_{S_1} i p_{S_2} .



Rys. 7. Przykładowe wykresy przebiegu sił wewnętrznych S_{d1} , S_{d2} przy $\frac{\sigma_{S_2 E}}{\sigma_{S_1 E}} = 0,5$ i $p_S = 0,001$:

a – przypadek zmiennych niezależnych $p_{S_1, S_2} = 0$, b – przypadek zmiennych zależnych $p_{S_1, S_2} = 0,75$;
 1 – pomocnicze rozkłady unormowane $f(\xi_{S_1}, \xi_{S_2})$ oraz $f(\xi_{y_1}, \xi_{y_2})$, 2 – wykres do wyznaczenia pary sił wewnętrznych S_{d1} , S_{d2} przy $p_S = 0,001$

Zależność między $\xi_{S1} = \frac{S_1 - S_{m1}}{\sigma_{S1E}}$ i $\xi_{S2} = \frac{S_2 - S_{m2}}{\sigma_{S2E}}$ oraz $\xi_{y1} = \frac{y_1}{\sigma_{y1E}}$ i $\xi_{y2} = \frac{y_2}{\sigma_{y2E}}$

wyznacza się z równania koła $\xi_{y1}^2 + \xi_{y2}^2 = \beta_{SE}^2$. Wyniki obliczeń dla $\beta_{SE} = 3,09$ ($p_S = 0,001$) podano w tabelicy 4. Na uwagę zasługuje wyróżniona wartość $\xi_{y1} = \xi_{y2} = 2,185$ przypisana równym prawdopodobieństwu $p_{S1} = p_{S2}$, dla których prawdopodobieństwo przekroczenia co najmniej jednej z pary obliczeniowych sił wewnętrznych jest najmniejsze.

Tabela 4. Zależność między $\xi_{S1} = \frac{S_1 - S_{m1}}{\sigma_{S1E}}$ i $\xi_{S2} = \frac{S_2 - S_{m2}}{\sigma_{S2E}}$; $\beta_{SE} = 3,09$ ($p_S = 0,001$)

ξ_{y1}	0	1,00	2,00	2,185	2,50	3,00	3,09
ξ_{y2}	3,09	2,92	2,35	2,185	2,07	0,74	0

Współrzędne y_{d1} i y_{d2} oznaczają wartości obliczeniowe pary sił wewnętrznych S_{d1} i S_{d2} , zaznaczone na rysunku 7 liniami „2”, odpowiadające prawdopodobieństwu przekroczenia $p_S = 0,001$. Do celów związanych z weryfikacją stanu granicznego nośności według założeń normowych miarodajna jest jedna z par sił S_{d1} i S_{d2} spełniająca warunek optymalizacyjny polegający na tym, że prawdopodobieństwo przekroczenia co najmniej jednej z pary tych sił jest najmniejsze. Zgodnie z rysunkiem 7 wzory na obliczeniowe siły wewnętrzne przybiorą postać:

$$S_{d1} = S_{m1} + \Delta S_1 \quad (15a)$$

$$S_{d2} = S_{m2} + \Delta S_2 \quad (15b)$$

Przyrosty ΔS_1 i ΔS_2 są zależne od wartości współczynnika korelacji $\rho_{S1,S2}$ oraz od stosunku $\frac{\sigma_{S2E}}{\sigma_{S1E}}$.

W przypadku weryfikacji stanu granicznego według zasad normowych, wartości obliczeniowych sił wewnętrznych S_{d1} , S_{d2} można utożsamiać z wartościami $S_{d10} = S_{d10}$ oraz $S_{d20} = S_{d20}$ wyznaczanych na podstawie rozkładów brzegowych. Wartości tych sił przy założeniu $p_S = 0,001$ można obliczyć z wzorów:

$$S_{d10} = S_{m1} + 3,09 \sigma_{S1E} \quad (16a)$$

$$S_{d20} = S_{m2} + 3,09 \sigma_{S2E} \quad (16b)$$

Jak wynika z rysunku 7a, punkty S_{d10} , S_{d20} znajdują się na prostej nachylonej do osi współrzędnych pod kątem α^0 spełniającym zależność:

$$\operatorname{tg} \alpha_0 = \frac{\Delta S_{20}}{\Delta S_{10}} = \frac{\sigma_{S2E}}{\sigma_{S1E}}$$

co oznacza, że w obliczeniach normowych przyjmowana jest pewna (umowna) wartość współczynnika korelacji zmiennych losowych S_1 i S_2 . Uwzględniając zależność (11) otrzymuje się:

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \rho_{S_1, S_2} \sigma_{S_1}}{\sigma_{S_2}} = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha_0}{1 - \left(\frac{\sigma_{S_2}}{\sigma_{S_1}}\right)^2} \quad (17)$$

W przypadku kiedy $\operatorname{tg} \alpha_0 = \frac{\Delta_{S_{20}}}{\Delta_{S_{10}}} = \frac{\sigma_{S_2}}{\sigma_{S_1}}$ oraz $\alpha = \alpha_0$, wartość współczynnika $\rho_{S_1, S_2} = 1,0$.

Wynika stąd istotny wniosek, że wartości S_{d10} oraz S_{d20} odpowiadają przypadkowi pełnej zależności zmiennych losowych S_1 i S_2 , w związku z czym przy $\rho_{S_1, S_2} < 1,0$ stanowią górne oszacowanie wartości S_{d1} i S_{d2} .

W przypadku nieskorelowanych zmiennych losowych S_1 i S_2 , kiedy współczynnik korelacji $\rho_{S_1, S_2} = 0$, warunek optymalizacyjny przyjmie postać:

$$p_{1,2} = p_{S_1} + p_{S_2} - p_{S_1} p_{S_2}$$

skąd $p_{1,2}$ osiąga wartość minimalną przy $p_{S_1} = p_{S_2}$ [8]. Zgodnie z tabelicą 4, $\xi_{y1} = \xi_{y2} = 2,185$, w związku z czym:

$$\Delta S_1 = 2,185 \sigma_{S_1 E} \quad (18a)$$

$$\Delta S_2 = 2,185 \sigma_{S_2 E} \quad (18b)$$

Zależność $p_{S_1} = p_{S_2}$ oznacza zatem, że przy niezależnych S_1 i S_2 wartości par obliczeniowych sił wewnętrznych S_1 i S_2 mogą być mniejsze niż w przypadku działania tylko jednej siły wewnętrznej. W takim przypadku wzory na stosunki sił wewnętrznych

$\frac{S_{d2}}{S_{d10}}$ i $\frac{S_{d2}}{S_{d20}}$ przybiorą postać:

$$\eta_{S_1} = \frac{S_{d1}}{S_{d10}} = \frac{S_{m1} + 2,185 \sigma_{S_1 E}}{S_{m1} + 3,09 \sigma_{S_1 E}} = \frac{1 + 2,185 V_{S_1 E}}{1 + 3,09 V_{S_1 E}} \quad (19a)$$

$$\eta_{S_2} = \frac{S_{d1}}{S_{d20}} = \frac{S_{m2} + 2,185 \sigma_{S_2 E}}{S_{m2} + 3,09 \sigma_{S_2 E}} = \frac{1 + 2,185 V_{S_2 E}}{1 + 3,09 V_{S_2 E}} \quad (19b)$$

Stopień redukcji sił wewnętrznych rośnie wraz ze wzrostem wartości współczynników zmienności ich rozkładów V_S . Przy $V = 0,10$ otrzymuje się $\eta_S = 0,93$, jeśli $V_S = 0,20$, to $\eta_S = 0,89$, a jeśli $V_S = 0,70$, to $\eta_S = 0,80$. Należy podkreślić, że wartości obliczeniowych sił wewnętrznych według wzorów (15a) i (15b) są wartościami wybranymi spośród zbioru przypisanego $p_S = 0,001$, przy założeniu że prawdopodobieństwo przekroczenia co najmniej jednej z pary sił S_{d1} , S_{d2} jest najmniejsze. Należy także podkreślić, że wartości

S_{d10} , S_{d20} obliczane przy stałym prawdopodobieństwie p_S nie zawsze są dokładnie równe wartościom S_{d1N} i S_{d2N} obliczonym według zasad normowych (przy wykorzystaniu częściowych współczynników bezpieczeństwa i współczynników jednoczesności obciążeń), jakkolwiek przy $p_S = \text{const.}$ powinna zachodzić zależność $S_{d10} \approx S_{d1N}$ oraz $S_{d20} \approx S_{d2N}$.

W przypadku kiedy współczynnik korelacji $\rho_{S1,S2} > 0$, para sił na krzywej „2” (rys. 7b) może być wyznaczona na podstawie wzoru spełniającego warunki brzegowe, zgodnie z którymi $\xi_{y1} = \xi_{y2} = 2,185$ przy $\rho_{S1,S2} = 0$ oraz $\xi_{y1} = \xi_{y2} < 3,09$ przy $1,0 \geq \rho_{S1,S2} > 0$, w związku z czym wzory na parę sił obliczeniowych S_{d1} , S_{d2} przyjmują postać:

$$\xi_{y1} = \xi_{y2} = 2,185 + 0,905 \rho_{S1,S2} \quad (20)$$

a wzory na przyrosty tych sił w stosunku do wartości średnich:

$$\Delta S_1 = (2,185 + 0,905 \rho_{S1,S2}) (\sigma_{y1E} \cos \alpha - \sigma_{y2E} \sin \alpha) \quad (21a)$$

$$\Delta S_2 = (2,185 + 0,905 \rho_{S1,S2}) (\sigma_{y2E} \sin \alpha + \sigma_{y1E} \cos \alpha) \quad (21b)$$

Z wzorów (21) wynika, że przy wartościach współczynnika korelacji $\rho_{S1,S2} > 0$ i przy $p_S = \text{const.}$ możliwości redukcji pary sił wewnętrznych są mniejsze niż w przypadku $\rho_{S1,S2} = 0$. W skrajnym przypadku, jeżeli $\rho_{S1,S2} = 1,0$, wartości stosunków $\eta_{S1} = \frac{S_{d1}}{S_{d10}}$

lub $\eta_{S2} = \frac{S_{d2}}{S_{d20}}$ są równe lub bliskie jedności.

Tablica 5. Zestawienie wartości $\eta_1 \cos \alpha$ dla różnych $\rho_{S1,S2}$ oraz stosunków $\frac{\sigma_{S2}}{\sigma_{S1}} < 1,0$

$\rho_{S1,S2}$	$\sigma_{S2E} / \sigma_{S1E}$			
	0,25	0,50	0,75	1,00
0	1,000	1,000	1,000	1,000
0,25	1,000	1,000	1,001	0,790
0,50	1,000	1,020	0,980	0,866
0,75	1,000	1,010	0,990	0,935
1,00	1,000	1,000	1,000	1,000

Wzory (21) można przekształcić do postaci zależnej od wartości odchyień standardowych σ_{S1E} lub σ_{S2E} . Wyniki obliczeń numerycznych (tablica 5) wskazują, że wartości $\eta_1 \cos \alpha = \frac{\sigma_{y1E}}{\sigma_{S1E}}$ są praktycznie równe jedności. Oznacza to, że z dobrą dokładnością można przyjąć – zalecaną również w pracy [3] – zależność:

$$\sigma_{S1E} \approx \sigma_{y1} \cos \alpha \quad (22)$$

Wynikająca z takiego założenia niedokładność obliczeń przy małych α jest zupełnie nieistotna. Jedyne w przypadku α bliskim 45° przy wartościach ρ_{S_1, S_2} różnych od zera i jedności różnice są nieco większe, przy czym wyniki obliczeń są z reguły po stronie bezpiecznej (tablica 5).

4. Analiza wyników obliczeń

Uwzględnienie w obliczeniach pewnej redukcji sił wewnętrznych może mieć znaczenie w przypadkach, kiedy odchylenia standardowe σ_{S_1} i σ_{S_2} znacznie się różnią, lub kiedy współczynnik korelacji ρ_{S_1, S_2} jest niewielki, na przykład rzędu poniżej 0,5. Warunkiem takiej redukcji jest jednak określenie wartości tych odchyłek oraz współczynnika korelacji, a zatem przeprowadzenie analizy probabilistycznej sił wewnętrznych według wzorów (10).

Przy weryfikacji stanu granicznego nośności – zamiast posługiwania się zasadami normowymi wyznaczania sił wewnętrznych z uwzględnieniem częściowych współczynników bezpieczeństwa i współczynników jednoczesności – można bezpośrednio przyjmować wartości par sił wewnętrznych zgodnie z wzorami (15a) i (15b). Projekt Eurokodu EN 1990 [1] pozwala na takie uściślenia obliczeń. Innym, bardziej dokładnym podejściem jest analiza probabilistyczna z uwzględnieniem rozkładu nośności. W takim przypadku możliwe są dwa podejścia:

- pierwsze polega na weryfikacji stanu bezpiecznego poprzez wykazanie, że para obliczeniowych sił wewnętrznych S_{d1} i S_{d2} nie przekracza krzywej interakcji przy $p_R = \text{const.}$ (rys. 2);

- drugie zakłada analizę równania stanu granicznego, podobnie jak w przypadku jednej (jednowymiarowej) siły wewnętrznej, tj. $Z = R - S \geq 0$, z tym że odniesionego do rozkładu skumulowanego tej siły wzdłuż dłuższej osi elipsy S_{Y1} (lub wzdłuż dowolnego kierunku) i rozkładu nośności R_{Y1} rzutowanego na tę oś (rys. 8), w postaci:

$$Z_1 = S_{Y1} - R_{Y1} \geq 0 \quad (23)$$

przy założeniu prawdopodobieństwa zniszczenia $p_f = p(S_{Y1} - R_{Y1} \geq 0)$. Zasady określania rozkładów zmiennej losowej R_{Y1} można znaleźć w pracach [3], [7], [8].

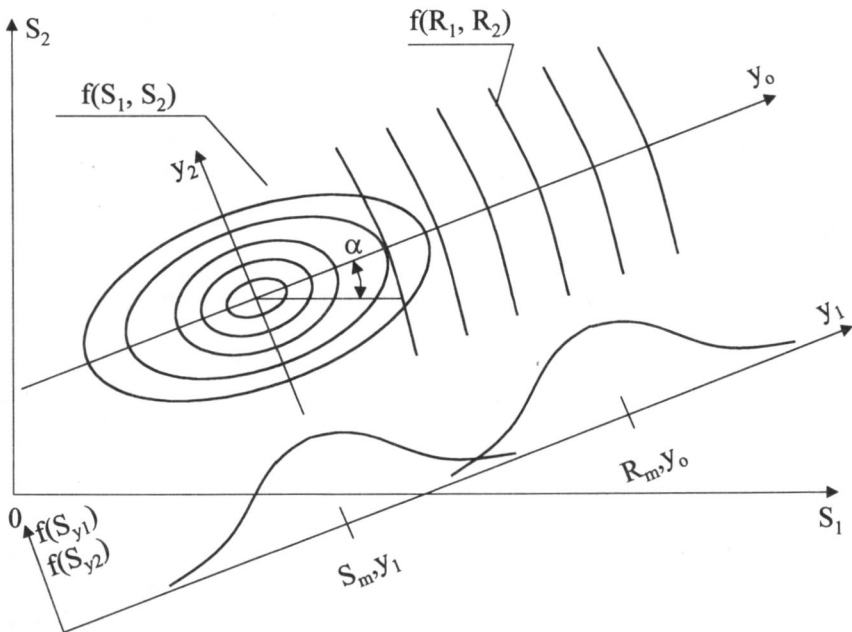
Wartości współczynników korelacji ρ_{S_1, S_2} , jakich można oczekiwać w praktyce, mogą się mieścić w szerokim przedziale od -1 do 1 . Wyniki obliczeń wartości ρ_{S_1, S_2} według wzoru (10) zależą od wartości i znaków współczynników wpływu c_{ij} oraz od odchyłek standardowych wejściowych i łącznych zmiennych losowych σ_{X_i} i σ_{X_j} oraz σ_{S_2} i σ_{S_1}). Można jednak dla dwóch obciążeń G i Q rozważyć przypadki graniczne na podstawie wzoru (10), który po przekształceniach dla dwóch obciążeń przyjmuje postać:

$$\rho_{S_1, S_2} = \frac{1 + A_1 A_2 \left(\frac{\sigma_{S_2}}{\sigma_{S_1}} \right)^2}{\left\{ \left[1 + A_1^2 \left(\frac{\sigma_{S_2}}{\sigma_{S_1}} \right)^2 \right] \left[1 + A_2^2 \left(\frac{\sigma_{S_2}}{\sigma_{S_1}} \right)^2 \right] \right\}^{\frac{1}{2}}} \quad (24)$$

gdzie:

$A_1 = \frac{c_{12}}{c_{11}}$ jest stosunkiem współczynników wpływu wyrażającym stosunek siły wewnętrznej od obciążenia zmiennego $S_1(Q)$ do siły wewnętrznej od obciążenia stałego $S_1(G)$,

$A_2 = \frac{c_{22}}{c_{21}}$ jest stosunkiem współczynników wpływu wyrażającym stosunek siły wewnętrznej od obciążenia zmiennego $S_2(Q)$ do siły wewnętrznej od obciążenia stałego $S_2(G)$.



Rys. 8. Ilustracja analizy probabilistycznej w przypadku posługiwania się skumulowanym rozkładem sił wewnętrznych S_{y1} i rozkładem nośności R_{y1} „rzutowanym” na kierunek dłuższej osi elipsy

Wartości współczynników korelacji $\rho_{S1,S2}$ w przypadkach granicznych można szacować następująco:

a) $A_1 = A_2$, tj. kiedy współczynniki wpływu c_{ij} są do siebie proporcjonalne; wtedy $\rho_{S1,S2} = 1,0$;

b) $A_1 = 0$, tj. kiedy obciążenie zmienne Q nie wpływa na wartość siły wewnętrznej S_1 , a $A_2 \neq 0$ oznacza, że Q ma wpływ na S_2

$$\rho_{S1,S2} = \frac{1}{\left[1 + \left(\frac{\sigma_{S2}}{\sigma_{S1}} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}} \quad (25)$$

i wtedy przy $A_2 = 0,333$ (stosunek siły wewnętrznej od obciążeń użytkowych do siły wewnętrznej od obciążeń stałych charakterystyczny dla obudownictwa mieszkaniowego i użyteczności publicznej) uzyskuje się:

$$\text{przy } \frac{\sigma_{S2}}{\sigma_{S1}} = 0 \quad - \quad \rho_{S1,S2} = 1,000$$

$$\text{przy } \frac{\sigma_{S2}}{\sigma_{S1}} = 0,5 \quad - \quad \rho_{S1,S2} = 0,996$$

$$\text{przy } \frac{\sigma_{S2}}{\sigma_{S1}} = 1,0 \quad - \quad \rho_{S1,S2} = 0,900;$$

c) $A_2 = 0$, tj. kiedy obciążenie zmienne Q nie wpływa na wartość siły wewnętrznej S_2 , a $A_1 \neq 0$, co oznacza, że Q ma wpływ na S_1 ; wartości $\rho_{S1,S2}$ będą identyczne jak wyżej;

d) współczynniki wpływu c_{12} lub c_{22} przyjmą wartości na przemian ujemne; wtedy wzór (26) będzie miał postać:

$$\rho_{S1,S2} = \frac{1 - A_1 A_2 \left(\frac{\sigma_{S2}}{\sigma_{S1}} \right)^2}{\left\{ \left[1 + A_1^2 \left(\frac{\sigma_{S2}}{\sigma_{S1}} \right)^2 \right] \left[1 + A_2^2 \left(\frac{\sigma_{S2}}{\sigma_{S1}} \right)^2 \right] \right\}^{\frac{1}{2}}} \quad (26)$$

skąd po podstawieniu $A_1 = A_2 = 0,5$ i $\frac{\sigma_{S2}}{\sigma_{S1}} = 0,5$ otrzymuje się wartość $\rho_{S1,S2} = 0,75$,

a po podstawieniu $A_1 = A_2 = 1,0$ (większy wpływ obciążeń zmiennych) i $\frac{\sigma_{S2}}{\sigma_{S1}} = 0,5$ otrzymuje się wartość $\rho_{S1,S2} = 0,48$;

e) wartości stosunków odchylen standardowych $\frac{\sigma_{S2E}}{\sigma_{S1E}}$ są bliskie jedności; wartość kąta α wynosi 45° , w związku z czym $\rho_{S1,S2}$ wynosi 1,0;

f) wartości stosunków odchylen standardowych $\frac{\sigma_{S1E}}{\sigma_{S1E}}$ są bliskie zeru; wartość kąta α jest bliska 0° , w związku z czym $\rho_{S1,S2}$ wynosi 0.

Podobny wynik uzyskuje się w przypadku uwzględnienia wpływu trzech obciążeń (G , Q i W).

W przypadku kiedy siły wewnętrzne S_1 i S_2 są od siebie niezależne, $\rho_{S1,S2} = 0$. Jest tak na przykład w przypadku ścian usztywniających w budynkach wysokich, w których moment zginający (S_2) zależy tylko od obciążenia wiatrem, a siła normalna (S_1) – od obciążeń stałych i użytkowych (G i Q).

5. Przykłady zastosowań

A. Przykład budynku szkieletowego poddanego obciążeniu stałemu G , użytkowemu Q i od wiatru W

Wyniki obliczeń sił wewnętrznych budynku szkieletowego (rys. 9) zamieszczone w pracy [2] pozwalają na wyrażenie ich wartości za pomocą następujących równań:

- w przekroju utwierdzenia słupa środkowego lewego (mniej ściskanego)

$$S_1 = N_d = 42,4 G + 36 Q - 29 W$$

$$S_2 = M_d = 0,19 G - 0,475 Q + 20 W$$

- w przekroju utwierdzenia słupa środkowego prawego (bardziej ściskanego)

$$S_1 = N_g = 42,4 G + 36 Q + 29 W$$

$$S_2 = M_g = -0,19 G - 0,475 Q + 20 W$$

Wartości obciążeń właściwych dla budownictwa mieszkaniowego wynoszą:

- obciążenie stałe (od ścian i stropów) o rozkładzie normalnym z wartością średnią $g_m = 6 \text{ kN/m}^2$ i współczynnikiem zmienności $V_g = 0,05$ (obciążenie charakterystyczne $g_k = 6,0 \text{ kN/m}^2$, obciążenie obliczeniowe $g_d = 6 \cdot 1,15 = 6,9 \text{ kN/m}^2$),

- obciążenie użytkowe o rozkładzie ekstremalnym I stopnia normalnym z wartością średnią $g_m = 1,00 \text{ kN/m}^2$, współczynnikiem zmienności $V_g = 0,40$ oraz współczynnikiem skośności $a_s = 1,139$, (obciążenie charakterystyczne $q_k = 1,5 \text{ kN/m}^2$, obciążenie obliczeniowe $q_d = 1,5 \cdot 1,4 = 2,1 \text{ kN/m}^2$),

- obciążenie wiatrem o rozkładzie ekstremalnym I stopnia z wartością średnią $w_m = 0,25 \text{ kN/m}$, współczynnikiem zmienności $V_w = 0,3$ oraz współczynnikiem skośności $a_w = 1,139$

(obciążenie charakterystyczne $w_k = \frac{0,25}{1 + 2,6 V_q} = 0,445 \text{ kN/m}^2$, obciążenie obliczeniowe

$$w_d = 0,445 \cdot 1,4 = 0,63 \text{ kN/m}),$$

Wartości obciążeń G , Q i W średnich, charakterystycznych i obliczeniowych przy rozstawie ram $6,0 \text{ m}$ wyniosą:

$$G_m = 6 \cdot 6 = 36 \text{ kN/m}, \quad G_k = 36 \text{ kN/m}, \quad G_d = 1,15 \cdot 36 = 41,4 \text{ kN/m}$$

$$Q_m = 6 \cdot 1 = 6 \text{ kN/m}, \quad Q_k = 9 \text{ kN/m}, \quad Q_d = 1,4 \cdot 6 = 9 \text{ kN/m},$$

$$W_m = 0,25 \cdot 6 = 1,5 \text{ kN/m}, \quad W_d = 1,5 (1 + 2,6 \cdot 0,30) = 2,67 \text{ kN/m},$$

$$W_m = 2,67 \cdot 1,4 = 3,738 \text{ kN/m}$$

Z wzorów (4) otrzymuje się:

$$H_{Gm} = I_{Sm} c_{Gm} G_m = 1,0 \cdot 42,4 \cdot 36 = 1526,4 \text{ kN}$$

$$H_{Qm} = I_{Sm} c_{Qm} Q_m = 1,0 \cdot 36 \cdot 6,0 = 216 \text{ kN}$$

$$H_{Wm} = I_{Sm} c_{Wm} W_m = -29 \cdot 1,5 = 43,5 \text{ kN}$$

$$V_{HG} = \left(0,045^2 + 0,075^2 + 0,05^2\right)^{\frac{1}{2}} = 0,101$$

$$V_{HQ} = \left(0,045^2 + 0,075^2 + 0,4^2\right)^{\frac{1}{2}} = 0,409$$

$$V_{HW} = \left(0,045^2 + 0,075^2 + 0,3^2\right)^{\frac{1}{2}} = 0,312$$

oraz następujące wartości parametrów rozkładu sił normalnych w przekroju utwierdzenia prawego słupa ramy:

$$S_{m1} = 1526,4 \cdot 1 + \frac{216}{1526,4} + \frac{43,5}{1526,4} = 1786,65 \text{ kN}$$

$$s_{S1} = 1526,4 \cdot 0,101 \left[1 + \left(\frac{216}{1526,4}\right)^2 \left(\frac{0,409}{0,101}\right)^2 + \left(\frac{43,5}{1526,4}\right)^2 \left(\frac{0,312}{0,101}\right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} = 179,35 \text{ kNm}$$

$$a_{S1} = 1,139 \frac{\left(\frac{216}{1526,4}\right)^2 \left(\frac{0,409}{0,101}\right)^3 + \left(\frac{43,5}{1526,4}\right)^2 \left(\frac{0,312}{0,101}\right)^3}{\left[1 + \left(\frac{216}{1526,4}\right)^2 \left(\frac{0,409}{0,101}\right)^2 + \left(\frac{43,5}{1526,4}\right)^2 \left(\frac{0,312}{0,101}\right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}} = 0,139$$

W przypadku momentów w przekroju utwierdzenia prawego słupa ramy z wzorów (4) otrzymuje się:

$$H_{Gm} = I_{Sm} c_{Gm} G_m = -1,0 \cdot 0,19 \cdot 36 = -6,84 \text{ kNm}$$

$$H_{Qm} = I_{Sm} c_{Qm} Q_m = -1,0 \cdot 0,475 \cdot 6,0 = -2,85 \text{ kNm}$$

$$H_{Wm} = I_{Sm} c_{Wm} W_m = -20 \cdot 1,5 = -30 \text{ kNm}$$

oraz następujące wartości parametrów rozkładu:

$$S_{m2} = 6,84 - 1 - \frac{2,85}{6,84} + \frac{30}{6,84} = 6,84 (-1 - 0,417 + 4,386) = 19,24 \text{ kNm}$$

$$s_{S2} = 6,84 \cdot 0,101 \left[1 + \left(\frac{2,85}{6,84}\right)^2 + \left(\frac{-30}{6,84}\right)^2 \left(\frac{0,409}{0,101}\right)^2 \left(\frac{0,312}{0,101}\right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} = 9,59 \text{ kNm}$$

$$a_{S2} = 1,139 \frac{\left(\frac{-2,85}{6,84}\right)^3 \left(\frac{0,409}{0,101}\right)^3 + \left(\frac{30}{6,84}\right)^3 \left(\frac{0,312}{0,101}\right)^3}{\left[1 + \left(\frac{2,85}{6,84}\right)^2 \left(\frac{0,409}{0,101}\right)^2 + \left(\frac{30}{6,84}\right)^2 \left(\frac{0,312}{0,101}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}} = 0,921$$

Wartości ekwiwalentnych odchyień standardowych według wzorów (7) wyniosą:

$$\sigma_{S1E} = (1 + 0,47 \cdot 0,139) 179,74 = 191,48 \text{ kN}$$

$$\sigma_{S2E} = (1 + 0,47 \cdot 0,921) 9,59 = 13,74 \text{ kNm}$$

a ich stosunek $\frac{\sigma_{S2E}}{\sigma_{S1E}} = 0,072$.

Wartość współczynnika korelacji $\rho_{S1,S2}$ z wzoru (10) wyniesie:

$$\rho_{S1,S2} = \frac{-42,4 \cdot 0,19 (0,101 \cdot 36)^2 - 36 \cdot 0,475 (0,409 \cdot 6)^2 + 29 \cdot 20 (0,312 \cdot 1,5)^2}{179,23 \cdot 9,59} = 0,062$$

skąd $\text{tg } 2\alpha = \frac{2 \cdot 0,062 \cdot 179,35 \cdot 9,59}{179,35^2 - 9,59^2} = 0,0068$ wartość kąta $\alpha = 0,20^\circ$ ($\cos \alpha \approx 1,0$).

Wartości obliczeniowych sił wewnętrznych według wzoru (18) wyniosą:

$$S_{d1} = 1786,65 + 2,185 \cdot 191,48 = 2205,03 \text{ kN}$$

$$S_{d2} = 19,24 + 2,185 \cdot 13,74 = 49,26 \text{ kNm}$$

a wartości obliczeniowych sił wewnętrznych według założeń normowych przy wartości częściowych współczynników bezpieczeństwa $\gamma_G = 1,15$, $\gamma_Q = \gamma_W = 1,4$ oraz współczynnika jednoczesności $\psi_{0Q} = 0,7$:

$$S_{d1N} = 42,4 \cdot 41,4 + 36 \cdot 12,6 + 29 \cdot 0,7 \cdot 3,738 = 2304,84 \text{ kN}$$

$$S_{d2N} = -0,19 \cdot 41,4 - 0,475 \cdot 0,7 \cdot 9 + 20 \cdot 3,738 = 63,90 \text{ kNm}$$

Wartości brzegowe sił wewnętrznych według wzorów (16) S_{d10} i S_{d20} wynoszą:

$$S_{d10} = 1786,65 + 3,09 \cdot 191,48 = 2372,32 \text{ kN}$$

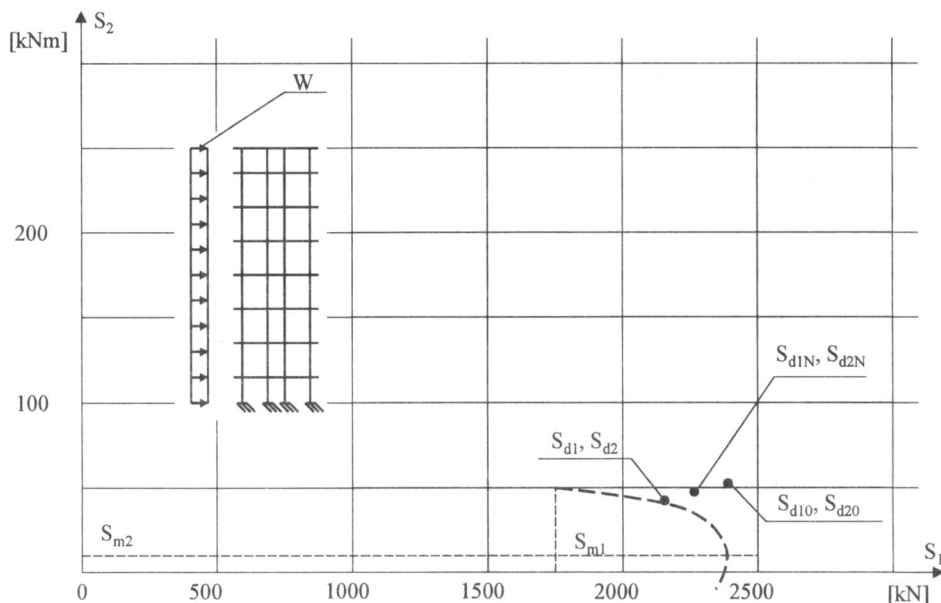
$$S_{d20} = 19,24 + 3,09 \cdot 13,74 = 61,70 \text{ kNm}$$

Wyniki obliczeń zostały zilustrowane na rysunku 9. Wartość siły normalnej S_{d1} w stosunku do S_{d1N} różni się nieznacznie (4%). Znaczna jest jednak redukcja momentu zginającego S_{d2} w stosunku do wartości normowej S_{d1N} osiągająca rząd 23%. Tak znaczna redukcja momentu S_{d20} wynika ze stosunkowo małej wartości współczynnika korelacji $\rho_{S1,S2} = -0,062$

oraz niskiego stosunku $\frac{\sigma_{S2E}}{\sigma_{S1E}} = 0,072$, a także z dużej wartości odchylenia standardowego

σ_{S2E} w stosunku do wartości średniej ($V = \frac{13,74}{19,24} = 0,714$). Wartości sił brzegowych S_{d10} i S_{d20} różnią się nieznacznie od wartości normowych S_{d10} i S_{d20} .

Analiza zależności (26) dla słupa mniej ściskanego prowadzi do podobnych wyników. Różnice odnoszą się tylko do wartości średnich. Wartości odchyłeń standardowych i współczynników korelacji (przy przemiennej znakach współczynników wpływu) pozostaną bez zmian.



Rys. 9. Schemat statyczny konstrukcji oraz wyniki obliczeń sił wewnętrznych

B. Przykład pełnej ściany usztywniającej budynku wysokiego 20-kondygnacyjnego poddanej obciążeniu stałemu G , użytkowemu Q i od wiatru W

Na pełną ścianę usztywniającą w budynku wysokim (rys. 10) na poziomie każdej kondygnacji przy rozpiętości stropów 7,2 m działa:

- obciążenie stałe (od ścian i stropów) o rozkładzie normalnym z wartością średnią $G_m = 80 \text{ kN/m}$ i współczynnikiem zmienności $V_g = 0,05$ (obciążenie charakterystyczne $G_k = 80 \text{ kN/m}$, obciążenie obliczeniowe $G_d = 80 \cdot 1,15 = 92 \text{ kN/m}$),
- obciążenie użytkowe o rozkładzie ekstremalnym I stopnia z wartością średnią $Q_m = 1,0 \cdot 7,2 = 7,2 \text{ kN/m}$, współczynnikiem zmienności $V_q = 0,4$ oraz współczynnikiem skośności $a_q = 1,139$ (obciążenie charakterystyczne $Q_k = 1,5 \cdot 7,2 = 10,8 \text{ kN/m}$, obciążenie obliczeniowe $Q_d = 1,4 \cdot 10,8 = 15,12 \text{ kN/m}$),

- obciążenie poziome wiatrem o rozkładzie ekstremalnym I stopnia z wartością średnią $W_m = \frac{0,7 \cdot 7,2}{1 + 2,6 \cdot 0,3} = 2,83 \text{ kN/m}$, współczynnika zmienności $V_w = 0,3$ oraz współczynnika skośności $a_w = 1,139$ (obciążenie charakterystyczne $W_k = 0,7 \cdot 7,2 = 5,04 \text{ kN/m}$, obciążenie obliczeniowe $W_d = 1,4 \cdot 5,04 = 7,056 \text{ kN/m}$); obciążenie to zostało ustalone w wyniku rozdziału wypadkowej sił poziomych proporcjonalnie do sztywności ścian usztywniających.

Wartości obciążeń G , Q i W obciążeń średnich, charakterystycznych i obliczeniowych wyniosą:

$$\begin{aligned} G_m &= 80 \text{ N/m}, & G_k &= 80 \text{ kN/m}, & G_d &= 1,15 \cdot 806 = 92 \text{ kN/m}, \\ Q_m &= 1 \cdot 7,2 = 7,2 \text{ kN/m}, & Q_k &= 1,5 \cdot 7,2 = 10,8 \text{ kN/m}, & Q_d &= 1,4 \cdot 10,8 = 15,12 \text{ kN/m}, \\ W_m &= 10 \text{ kN/m}, & W_m &= (1 + 2,6 \cdot 0,3) 10 = 17,8 \text{ kN/m}, & W_m &= 17,8 \cdot 1,4 = 24,92 \text{ kN/m}. \end{aligned}$$

Wartości współczynników w przekroju utwierdzenia ściany o szerokości 15,0 i wysokości 20 kondygnacji:

$$c_{GS1} = 15 \cdot 20 = 300 \text{ m}^{-1}, \quad c_{QS1} = 15 \cdot 20 = 300 \text{ m}^{-1}, \quad c_{WS2} = \frac{H^2}{2} = \frac{64^2}{2} = 2048 \text{ m}^{-1}$$

skąd równania (6) na wartości sił wewnętrznych w przekroju utwierdzenia ściany przybiorą postać:

$$S_1 = 2048 W$$

$$S_2 = 300 G + 300 Q$$

Przy takich danych wejściowych z wzorów (4) otrzymuje się:

$$H_{Gm} = I_{Sm} c_{Gm} G_m = 1,0 \cdot 300 \cdot 80 = 24000 \text{ kN}$$

$$H_{Qm} = I_{Sm} c_{Qm} Q_m = 1,0 \cdot 300 \cdot 7,2 = 2160 \text{ kN}$$

$$H_{Wm} = I_{Sm} c_{Wm} W_m = 1,0 \cdot 2048 \cdot 10 = 20480 \text{ kN}$$

$$V_{HG} = \left(0,045^2 + 0,075^2 + 0,05^2 \right)^{\frac{1}{2}} = 0,101$$

$$V_{HQ} = \left(0,045^2 + 0,075^2 + 0,4^2 \right)^{\frac{1}{2}} = 0,409$$

$$V_{HW} = \left(0,045^2 + 0,075^2 + 0,3^2 \right)^{\frac{1}{2}} = 0,312$$

Parametry rozkładu siły normalnej $S_{m2} = M$ i momentu $S_{m1} = N$ wyniosą:

$$S_{m1} = 2048 \cdot 10 = 20480 \text{ kNm}$$

$$\sigma_{S1} = 20480 \cdot 0,312 = 6389,76 \text{ kNm}$$

$$a_{S1} = 1,139$$

$$S_{m2} = 24000 \cdot 1 + \frac{7,20}{80} = 26160 \text{ kN}$$

$$\sigma_{S2} = 1,24000 \cdot 0,101 \left[1 + \left(\frac{2160}{24000} \right)^2 \left(\frac{0,409}{0,101} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} = 2579,97 \text{ kN}$$

$$a_{S2} = \frac{1,139 \left(\frac{2160}{24000} \right)^3 \left(\frac{0,409}{0,101} \right)^3}{\left[1 + \left(\frac{2160}{24000} \right)^2 \left(\frac{0,409}{0,101} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}} = 0,056$$

Wartości ekwiwalentnych odchyłeń standardowych według wzorów (7) wynoszą:

$$\sigma_{S1E} = (1 + 0,47 \cdot 1,139) 6389,76 = 9810,39 \text{ kNm}$$

$$\sigma_{S2E} = (1 + 0,47 \cdot 0,056) \cdot 2579,97 = 2647,87 \text{ kN}$$

a stosunek $\frac{\sigma_{S1E}}{\sigma_{S2E}} = 0,270$.

Współczynnik korelacji $\rho_{S1,S2} = 0$, w związku z czym wartości obliczeniowych sił wewnętrznych według wzorów (15) i (18) wynoszą:

$$S_{d1} = 20480 + 2,185 \cdot 9810,39 = 41915,70 \text{ kNm}$$

$$S_{d2} = 26160 + 2,185 \cdot 2647,87 = 31945,60 \text{ kN}$$

a wartości obliczeniowych sił wewnętrznych według założeń normowych przy wartości częściowych współczynników bezpieczeństwa $\gamma_G = 1,15$, $\gamma_Q = \gamma_W = 1,4$ oraz współczynnika jednoczesności $\psi_{0Q} = 0,7$:

$$S_{d1N} = 2048 \cdot 24,92 = 51036,16 \text{ kNm}$$

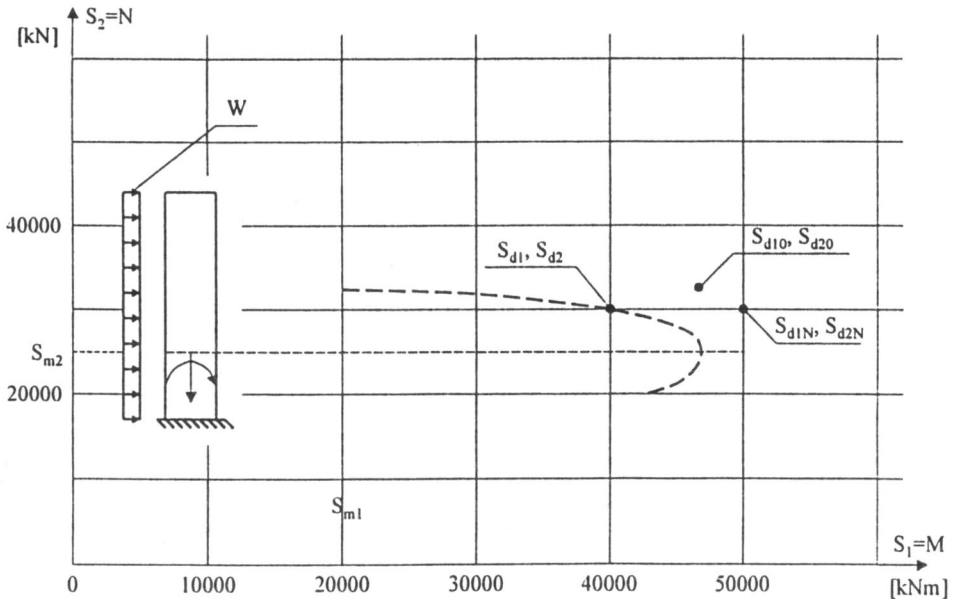
$$S_{d2N} = 300 \cdot 92 + 300 \cdot 15,12 = 32136 \text{ kN}$$

Wartości brzegowe sił wewnętrznych według wzorów (16) S_{d10} i S_{d20} wynoszą:

$$S_{d10} = 20480 + 3,09 \cdot 9810,39 = 50794,10 \text{ kNm}$$

$$S_{d20} = 26160 + 3,09 \cdot 2647,87 = 3434,19 \text{ kN}$$

Wyniki obliczeń zostały zilustrowane na rysunku 10. W analizowanym przypadku wartości obliczeniowych sił podłużnych S_{d2} przy założeniu $p_S = 0,001$ są praktycznie równe S_{d2N} , a wartości obliczeniowych momentów S_{d1} o 18% mniejsze niż S_{d1N} według założeń normowych. Tak znaczne zmniejszenie wartości obliczeniowych momentów zginających sił wewnętrznych w przekroju utwierdzenia wynika z dużego wpływu znacznej wartości odchylenia standardowego oraz współczynnika skośności rozkładu momentu zginającego. Wartości sił brzegowych S_{d10} i S_{d20} różnią się nieznacznie od wartości normowych S_{d10} i S_{d20} .



Rys. 10. Schemat statyczny konstrukcji oraz wyniki obliczeń sił wewnętrznych

C. Przykład ściany usztywniającej z jednym szeregiem otworów w budynku 12-kondygnacyjnym poddanej obciążeniu stałemu G , użytkowemu Q i od wiatru W

Na ścianę usztywniającą z jednym szeregiem otworów (rys. 11) na poziomie każdej kondygnacji przy rozpiętości stropów 7,2 m działa:

- obciążenie stałe (od ścian i stropów) o rozkładzie normalnym z wartością średnią $G_m = 40$ kN/m i współczynnikiem zmienności $V_g = 0,05$ (obciążenie charakterystyczne $G_k = 40$ kN/m, obciążenie obliczeniowe $G_d = 40 \cdot 1,15 = 46$ kN/m);
- obciążenie użytkowe o rozkładzie ekstremalnym I stopnia z wartością średnią $Q_m = 1,0 \cdot 7,2 = 7,2$ kN/m, współczynnikiem zmienności $V_q = 0,4$ oraz współczynnikiem skośności $a_q = 1,139$ (obciążenie charakterystyczne $Q_k = 1,5 \cdot 7,2 = 10,8$ kN/m, obciążenie obliczeniowe $Q_d = 1,4 \cdot 10,8 = 15,12$ kN/m);
- obciążenie poziome wiatrem o rozkładzie ekstremalnym I stopnia z wartością średnią $W_m = \frac{0,7 \cdot 7,2}{1 + 2,6 \cdot 0,3} = 2,83$ kN/m, współczynnikiem zmienności $V_w = 0,3$ oraz współczynnikiem skośności $a_w = 1,139$ (obciążenie charakterystyczne $W_k = 0,7 \cdot 7,2 = 5,04$ kN/m, obciążenie obliczeniowe $W_d = 1,4 \cdot 5,04 = 7,056$ kN/m); obciążenie to zostało ustalone w wyniku rozdziału wypadkowej sił poziomych proporcjonalnie do sztywności ścian usztywniających.

Wartości obciążeń G , Q i W obciążeń średnich, charakterystycznych i obliczeniowych wyniosą:

$$G_m = 40 \text{ kN/m}, \quad Q_m = 1 \cdot 7,2 \cdot \frac{1}{2} = 3,6 \text{ kN/m}, \quad W_m = 1 \text{ kN/m}$$

$$G_k = 40 \text{ kN/m}, \quad Q_k = 1,5 \cdot 7,2 \cdot \frac{1}{2} = 5,4 \text{ kN/m}, \quad W_m = (1 + 2,6 \cdot 0,3) \cdot 1,0 = 1,78 \text{ kN/m}$$

$$G_d = 1,15 \cdot 40 = 46 \text{ kN/m}, \quad Q_d = 1,4 \cdot 5,4 = 7,56 \text{ kN/m}, \quad W_m = 1,78 \cdot 1,4 = 2,492 \text{ kN/m}$$

Wartości współczynników wpływu dla sił w przekroju utwierdzenia pasma ściany o szerokości 33,75 m i wysokości 33,6 m wynoszą:

$$c_{GS1} = 45 \text{ m}^{-1}$$

$$c_{QS1} = 45 \text{ m}^{-1}$$

$$c_{WS2} = \frac{H^2}{2} - 50 \left(3,60 + \frac{3,75}{2} \right) \approx 290 \text{ m}^2$$

gdzie współczynnik „50” wyraża jednostkową siłę w pasmie ściany (kN/kNm^{-1}) od jednostkowego obciążenia wiatrem (według metody R. Rosmana), a wartość $3,60 + \frac{3,75}{2}$ osiowy rozstaw pasm w metrach (rys. 11). Przy takich założeniach równania określające wartości sił wewnętrznych w przekroju utwierdzenia pasma ściany przybiorą postać:

$$S_1 = 45 G + 45 Q + 50 W$$

$$S_2 = 290 W$$

Z wzorów (4) otrzymuje się:

$$H_{Gm1} = I_{Sm} c_{Gm} G_m = 1,0 \cdot 45 \cdot 40 = 1800 \text{ kN}$$

$$H_{Qm1} = I_{Sm} c_{Qm} Q_m = 1,0 \cdot 45 \cdot 3,6 = 162 \text{ kN}$$

$$H_{Wm1} = I_{Sm} c_{Wm} W_m = 1,0 \cdot 50 \cdot 1,0 = 50 \text{ kN}$$

$$H_{Wm2} = I_{Sm} c_{Wm} W_m = 1,0 \cdot 290 \cdot 1,0 = 290 \text{ kN}$$

$$V_{HG} = \left(0,045^2 + 0,075^2 + 0,05^2 \right)^{\frac{1}{2}} = 0,101$$

$$V_{HQ} = \left(0,045^2 + 0,075^2 + 0,04^2 \right)^{\frac{1}{2}} = 0,409$$

$$V_{HW} = \left(0,045^2 + 0,075^2 + 0,3^2 \right)^{\frac{1}{2}} = 0,312$$

oraz następujące parametry rozkładu siły normalnej $S_1 = N_m$ i momentu $S_2 = M_m$:

$$S_{m1} = 1800 \left(1 + \frac{162}{1800} + \frac{50}{1800} \right) = 2012 \text{ kN}$$

$$\sigma_{S1} = 1800 \cdot 0,101 \left[1 + \left(\frac{162}{1800} \right)^2 \left(\frac{0,409}{0,101} \right)^2 + \left(\frac{50}{1800} \right)^2 \left(\frac{0,312}{0,101} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} = 193,85 \text{ kN}$$

$$a_{S1} = \frac{1,139 \left(\frac{2160}{24000} \right)^3 \left(\frac{0,409}{0,101} \right)^3}{\left[1 + \left(\frac{2160}{24000} \right)^2 \left(\frac{0,312}{0,101} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}} = 0,049$$

$$S_{m2} = 290 \cdot 1,0 = 290 \text{ kNm}$$

$$\sigma_{S2} = 290 \cdot 0,312 = 90,48 \text{ kNm}$$

$$a_{S1} = 1,139$$

Wartości ekwiwalentnych odchyień standardowych według wzorów (7) wyniosą:

$$\sigma_{S1E} = (1 + 0,478 \cdot 0,049) \cdot 193,85 = 198,21 \text{ kN}$$

$$\sigma_{S2E} = (1 + 0,47 \cdot 1,139) 90,48 = 138,92 \text{ kNm}$$

a stosunek $\frac{\sigma_{S1E}}{\sigma_{S1E}} = 0,700$.

Współczynnik korelacji według wzoru (10) wynosi:

$$\rho_{S1,S2} = \frac{50 \cdot 290 (0,312 \cdot 1,0)^2}{193,85 \cdot 90,48} = 0,080$$

$$\text{skąd } \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \cdot 0,080127 \cdot 193,85 \cdot 90,48}{193,85^2 - 90,48^2} = 0,095, \text{ a wartość kąta } \alpha = 2,73^\circ \cos \alpha = 0,999 \approx 1,00).$$

Wartości obliczeniowych sił wewnętrznych według wzorów (15) i (18) wyniosą:

$$S_{d1} = 2012 + 2,185 \cdot 198,31 = 2445,31 \text{ kN}$$

$$S_{d2} = 290 + 2,185 \cdot 205,45 = 593,54 \text{ kNm}$$

a wartości obliczeniowych sił wewnętrznych według założeń normowych przy wartości częściowych współczynników bezpieczeństwa $\gamma_G = 1,15$, $\gamma_Q = \gamma_W = 1,4$ oraz współczynnika jednoczesności $\psi_{0Q} = 0,7$:

$$S_{d1N} = 45 \cdot 46 + 45 \cdot 7,56 + 50 \cdot 0,7 \cdot 2,49 = 2499,35 \text{ kN}$$

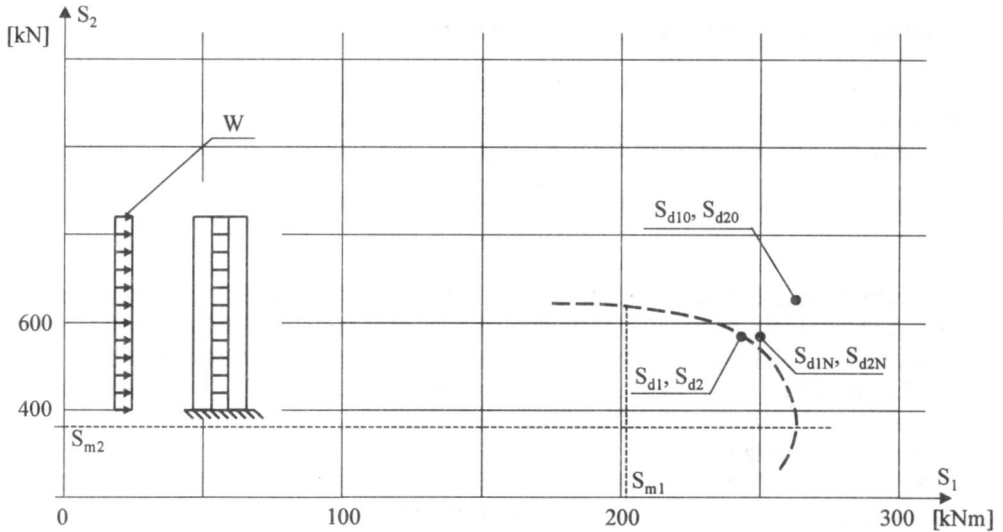
$$S_{d2N} = 290 \cdot 2,49 = 722,1 \text{ kNm}$$

Wartości brzegowe sił wewnętrznych według wzorów (16) S_{d10} i S_{d20} wynoszą:

$$S_{d10} = 2012 + 3,09 \cdot 198,31 = 2624,78 \text{ kN}$$

$$S_{d20} = 290 + 3,09 \cdot 138,92 = 719,26 \text{ kNm}$$

Wyniki obliczeń zostały zilustrowane na rysunku 11. Zgodność wartości normalnej S_{d1} w stosunku do S_{d1N} jest bardzo dobra (2%). Różnica w wartości momentu zginającego S_{d2} w stosunku do wartości normowej S_{d2N} jest większa (17%). Wartości brzegowe S_{d10} i S_{d20} wykazują akceptowalną zgodność z wartościami S_{d1N} i S_{d2N} .



Rys. 11. Schemat statyczny konstrukcji oraz wyniki obliczeń sił wewnętrznych

6. Podsumowanie

Przedstawione wyniki analizy probabilistycznej wpływu korelacji dwóch sił wewnętrznych ujawniają pewne dodatkowe zapasy bezpieczeństwa związane z określaniem obliczeniowych wartości tych sił w porównaniu z ich wartościami wyznaczonymi przy założeniu stałego prawdopodobieństwa przekroczenia w przypadku działania tylko jednej siły wewnętrznej $p_S = p(S \geq S_d)$. Wyznaczanie obliczeniowych wartości sił wewnętrznych przy konwencjonalnym (normowym) założeniu stałego prawdopodobieństwa przekroczenia dwóch sił wewnętrznych $p_S = p(S_1 \geq S_{d10}) = p(S_2 \geq S_{d20}) = 0,001$ na podstawie znajomości parametrów rozkładów brzegowych sił wewnętrznych S_1 i S_2 prowadzi zatem do oszacowań bezpiecznych.

Jako obiektywną miarę zapasu bezpieczeństwa w przypadku przekroczenia wartości dwóch obliczeniowych sił wewnętrznych S_{d1} i S_{d2} można przyjąć prawdopodobieństwo p_S przekroczenia jednej obliczeniowej siły wewnętrznej. Założenie takie pozwala na określenie nieograniczonego zbioru obliczeniowych sił wewnętrznych S_{d1} i S_{d2} . Wartości pary obliczeniowych sił wewnętrznych mogą być wyznaczone przy dodatkowym założeniu optymalizacyjnym, że prawdopodobieństwo przekroczenia poszczególnych wartości S_{d1} i S_{d2} będzie minimalne, tj. że ich przekroczenie wystąpi w najmniejszej liczbie przypadków. Warunek taki spełnia równość prawdopodobieństw $p_{S1} = p(S_1 \geq S_{d1})$ i $p_{S2} = p(S_2 \geq S_{d2})$. Odpowiednie wartości obliczeniowych sił wewnętrznych S_{d1} i S_{d2} można uzyskać z prostych wzorów (15) przy wykorzystaniu przekształcenia rozkładu dwuwymiarowego $f(S_1, S_2)$ w rozkłady unormowane $f(\zeta_{S1}, \zeta_{S2})$.

Podstawowymi parametrami decydującymi o wartościach obliczeniowych sił wewnętrznych wyznaczanych przy założeniu $p(S_1 \geq S_{d1}) = p(S_2 \geq S_{d2}) = \text{const.}$ są współczynniki

korelacji ρ_{S_1, S_2} oraz stosunki odchyłeń standardowych rozkładów brzegowych $\frac{\sigma_{S_2}}{\sigma_{S_1}}$. Przy

założeniu $\sigma_{S_2} < \sigma_{S_1}$ wartości sił obliczeniowych można wyznaczać według wzorów (5) i (21). Redukcja sił wewnętrznych S_{d1} , S_{d2} w stosunku do wartości brzegowych S_{d10} , S_{d20} może wynieść do 20%. Największe różnice występują w przypadku małych współczynników

korelacji ρ_{S_1, S_2} , małych stosunków $\frac{\sigma_{S_2}}{\sigma_{S_1}}$ i dużych współczynników zmienności V_S , kiedy

kąty α nachylenia elips są niewielkie.

Przytoczone przykłady obliczeń słupów konstrukcji ramowych i ścian usztywniających potwierdzają możliwość stosunkowo znacznej redukcji obliczeniowych sił wewnętrznych (do około 20%). Na uwagę zasługuje dobra zgodność wartości S_{d1} i S_{d2} według wzorów (15) i według założeń normowych S_{d1N} , S_{d2N} , co wskazuje na poprawność obliczeń wartości prawdopodobieństwa $p_S = 0,001$ przyjmowanego jako kryterium optymalizacyjne.

Wykazana możliwość redukcji sił wewnętrznych może być uwzględniana przy weryfikacji stanu granicznego nośności konstrukcji. Kolejnym etapem uściślenia obliczeń może być porównanie wykresów interakcji sił wewnętrznych i nośności przy założeniu stałych prawdopodobieństw przekroczenia obliczeniowych sił wewnętrznych i nośności p_S i p_R (rys. 2). Bezpieczeństwo konstrukcji jest wtedy zachowane, jeśli para sił S_{1d} , S_{2d} znajduje się w obszarze ograniczonym interakcją przy założeniu stałego prawdopodobieństwa nieprzekroczenia nośności obliczeniowej p_R .

Ścisłą weryfikację bezpieczeństwa konstrukcji można uzyskać na podstawie probabilistycznej analizy równania stanu granicznego sformułowanego jak dla jednej siły wewnętrznej i nośności, z tym że z rozkładami odniesionymi do kierunku dłuższej osi elipsy y_1 (rys. 8).

Jednym z istotnych praktycznych efektów przedstawionego sposobu wyznaczania sił wewnętrznych jest możliwość wyrównania zapasu bezpieczeństwa zarówno konstrukcji z dominującym obciążeniem stałym, jak i konstrukcji z dominującym obciążeniem zmiennym, bez potrzeby posługiwania się na ogół przybliżonymi normowymi współczynnikami jednoczesności.

Przedstawione wzory na wartości sił obliczeniowych S_{d1} i S_{d2} zostały wyprowadzone przy założeniu liniowej transformacji oddziaływań w siły wewnętrzne oraz aproksymacji rozkładu Pearsona III stopnia za pomocą rozkładu normalnego o „ekwiwalentnej” wartości odchylenia standardowego. Aproksymacja została przeprowadzona przy założeniu zgodności obu rozkładów dla wartości średnich ($p_S = 0,5$) oraz obliczeniowych ($p_S = 0,001$). Podejście takie jest podejściem przybliżonym, niemniej powszechnie zalecanym w literaturze oraz w normach ISO i CEN. Przy założeniu, że rozkłady sił wewnętrznych S_1 i S_2 nie są ekwiwalentnymi rozkładami normalnymi, analityczne rozwiązanie zadania nie byłoby możliwe. W takich przypadkach należałoby zastosować metody numeryczne całkowania wielowymiarowego lub metody symulacyjne. Wyniki uzyskane przy uproszczonym założeniu można uznać za ścisłe w obszarze wartości skrajnych (maksymalnych), zatem decydujących przy wymiarowaniu konstrukcji. W pozostałych przypadkach

założenie, że dwuwymiarowa funkcja gęstości prawdopodobieństwa $f(S_1, S_2)$ odpowiada rozkładowi normalnemu prowadzi do oszacowań bezpiecznych.

W przypadku założenia o nieliniowej transformacji oddziaływań w siły wewnętrzne można oczekiwać, że współczynniki korelacji (w wyniku zmniejszania się wartości współczynników wpływu na skutek np. uplastycznienia) ulegną zmniejszeniu [3], w związku z czym przedstawione rozwiązanie stanowi bezpieczne oszacowanie obliczeniowych sił wewnętrznych.

Przedstawione rozwiązanie problemu ma praktyczne znaczenie tylko w przypadku projektowania konstrukcji z zastosowaniem metod probabilistycznych, przy założeniu akceptowanego w normach podziału łącznego zapasu bezpieczeństwa na dwie części składowe, przypisane odpowiednio siłom wewnętrznym i nośności. Takie podejście pozwala na projektowanie konstrukcji z bardziej wyrównanym przedziałem prawdopodobieństwa zniszczenia niż według metod normowych, operujących częściowymi współczynnikami bezpieczeństwa. W bardziej zaawansowanych metodach projektowania probabilistycznego, kiedy poszczególne niezależne zmienne losowe występują w jednym równaniu typu $Z = g(S, R) \geq 0$, wpływ korelacji wszystkich poszczególnych zmiennych nie wymaga oddzielnej analizy.

Bibliografia

- [1] Draft prEN 1990 Eurocode: Basis of Design CEN/TC250 February 2000
- [2] Kobiak J., Stachurski W.: Konstrukcje żelbetowe. Arkady, Warszawa 1990
- [3] Ferry-Borges J., Castanheta M.: Structural Safety, LNEC, Lisbon 1971
- [4] Melchers R. E.: Structural Reliability. Analysis and Prediction, John Wiley and Sons, New York – Chichester – Brisbane – Toronto 1987
- [5] Murzewski J.: Niezawodność konstrukcji inżynierskich, Arkady, Warszawa 1987
- [6] Pawlikowski J.: Zastosowanie metod probabilistycznych II stopnia w normach projektowania, w tomie Zastosowanie probabilistyki w nowoczesnych normach konstrukcji i obciążeń. PAN, Warszawa – Łódź 1987
- [7] Tichy M., Vorlíček M.: Statistical Theory of Concrete Structures, Prague Publishing House of Czechoslovak Academy of Science, 1972
- [8] Tichy M.: Applied Methods of Structural Reliability. Kluwer Academic Publishers, 1993
- [9] Marek P., Gustar M., Anagnos T.: Simulation-Based Reliability Assessment for Structural Engineers, CRC Press, Boca Raton – New York – London – Tokyo 1996
- [10] Rackwitz R., Fiessler B.: Structural Reliability under Combined Random Load Frequencies, Computers and Structures, Vol. 9, 1978
- [11] Rationalization of Safety and Serviceability Factors in Structural Codes
- [12] Pawlikowski J.: Analiza probabilistyczna normowych zapasów bezpieczeństwa przyjmowanych z uwagi na obciążenia stałe i zmienne, *Prace Instytutu Techniki Budowlanej – Kwartalnik*, 4 (112), 1999
- [13] Pawlikowski J.: Analysis of Standard Safety Margins in case of One-Component Permanent and Variable Actions Effect, Proceedings of International Conference on Design and Assessment of Building Structures, Czech Technical University, Prague, September 1996

- [14] Basic Notes on Actions, CEB Bulletin No 112, July 1976
- [15] Plate Erich J.: Statistik und angewandte Wahrscheinlichkeit für Bauingenieure, Ernst and Sons, Berlin 1993
- [16] Fisch M.: Statystyka matematyczna i rachunek prawdopodobieństwa. PWN, Warszawa 1967

PROBABILISTIC ANALYSIS OF STRUCTURAL SAFETY IN CASE OF TWO LOAD EFFECTS

Summary

This work deals with results of probabilistic analysis of the influence of correlation between two load effects bending (moment S_1 and longitudinal force S_2) on the measure of safety margin comparing with measure acceptable in case of one load effect S . The marginal distributions $f(S_1)$ and $f(S_2)$ have been adopted as three parameters Pearson type III distributions, assuming linear transformation of actions into action effects. These distributions have been replaced by equivalent normal distributions obtained through approximation at mean ($p_S = 0,5$) and design ($p_S = 0,001$) values of load effects. The linear transformation of loads into load effects has been adopted, assuming normal distribution of permanent actions and Gumbel's distribution of two variable imposed and wind actions. The results of probabilistic analysis of the influence of two load effects correlation shown additional safety margins assumed in determination of design values of these load effects for the same probability of their exceedence as in case of one design load effect. The presented examples of calculation indicated that reduction of design values of these load effects may amount up to 20%. The practical advantage of this possibility may take place in design of new structures and in assessment of existing structures using probabilistic methods, assuming division of total safety margin into two parts assigned to the resistance and the load effect.

Praca wpłynęła do Redakcji 22 VIII 2000