

BADANIA I STUDIA – RESEARCH AND STUDIES

Jan Kubicki\*

## UGIĘCIE BELEK ŻELBETOWYCH OBLICZONE WEDŁUG PN-84/B-03264 I EUROKODU 2.1 W KONFRONTACJI Z WYNIKAMI BADAŃ DOŚWIADCZALNYCH

W artykule dokonano oceny założeń przyjętych w metodach obliczania ugięć zginanych elementów żelbetowych według PN-84/B-03264 i Eurokodu 2.1 oraz wskazano, w jakim stopniu różne założenia przyjęte w obu metodach wpływają na obliczone wartości ugięć. Określono także zgodność wyników badań doświadczalnych ugięć belek żelbetowych z wartościami ugięć obliczonych z zastosowaniem obu metod. Artykuł stanowi rozszerzoną wersję referatu przedstawionego na XLV Konferencji Naukowej KRYNICA '99.

### 1. Wstęp

W znowelizowanej PN-B-03264:1999 [1] zastąpiono przyjętą w PN-84/B-03264 metodę obliczania ugięć zginanych elementów żelbetowych – nową metodą, opartą na ogólnych założeniach obliczeniowych przedstawionych w załączniku 4 do Eurokodu 2.1 [2].

Metoda obliczania ugięć przyjęta w PN-84/B-03264, a także metoda podana w Eurokodzie 2.1 określają średnią krzywiznę  $k_m$  zginanego elementu żelbetowego, wyznaczoną z ogólnej zależności zachodzącej między promieniem krzywizny i odkształceniami skrajnych włókien przekroju, przy założeniu płaskich przekrojów.

W obu metodach wprowadzono uśrednione odkształcenia  $\varepsilon_{sm}$  rozciąganej stali zbrojeniowej i  $\varepsilon_{cm}$  betonu ściskanego w przekrojach zarysowanych oraz uwzględniono wpływ pełzania betonu strefy ściskanej na przyrost ugięcia elementu przy długotrwałym działaniu obciążenia.

Obie metody różnią się natomiast:

- przebiegiem funkcji moment-krzywizna,
- rozkładem naprężeń w ściskanej strefie przekroju zarysowanego,
- sposobem uwzględnienia współpracy stali zbrojeniowej i betonu na odcinkach między rysami,
- sposobem uwzględnienia pełzania betonu strefy ściskanej na przyrost ugięcia elementu pod obciążeniem długotrwałym.

---

\* dr inż. – adiunkt w ITB

Celem artykułu jest:

- wskazanie, w jakim stopniu różne założenia przyjęte w obu metodach wpływają na obliczone wartości ugięć, a także
- określenie zgodności wyników badań doświadczalnych z wartościami ugięć obliczonych według obu metod.

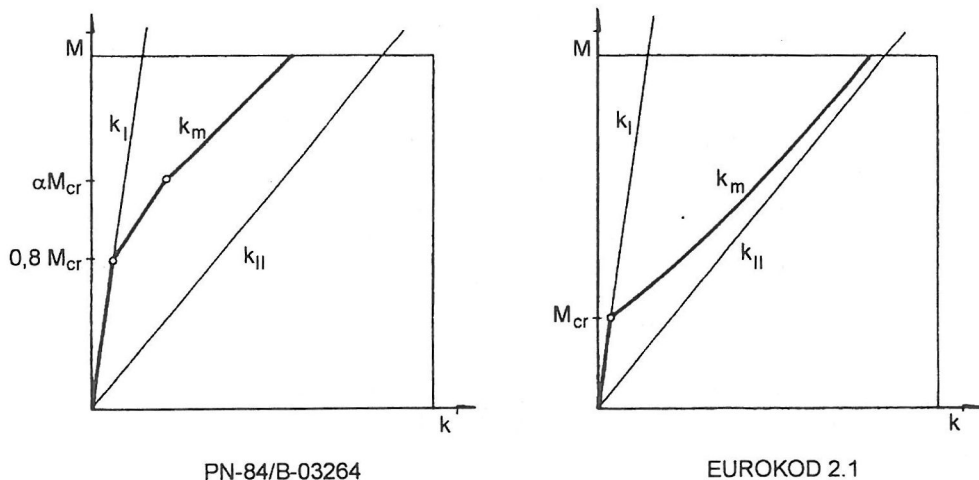
## 2. Zależność moment-krzywizna

W PN-84/B-03264 przyjęto, zgodnie z propozycją [3], trzyodcinkową zależność moment-krzywizna (rys. 1). Odcinki wykresu  $M(k)$  odpowiadają kolejnym fazom pracy zginanego elementu żelbetowego, występującym przy wzroście obciążenia eksploatacyjnego: fazie I (element niezarysowany), fazie pośredniej  $I_a$  (początek i rozwój procesu zarysowania) oraz fazie II (element o ustabilizowanym rozstawie rys). Poszczególne fazy pracy są opisane za pomocą odpowiedniej wartości  $M_{cr}$  momentu rysującego ( $0,8 M_{cr}$  – początek fazy pośredniej  $I_a$ ,  $\alpha M_{cr}$  – początek fazy II, przy czym  $\alpha$  jest współczynnikiem obliczanym w funkcji stopnia  $\rho_1$  zbrojenia rozciąganego).

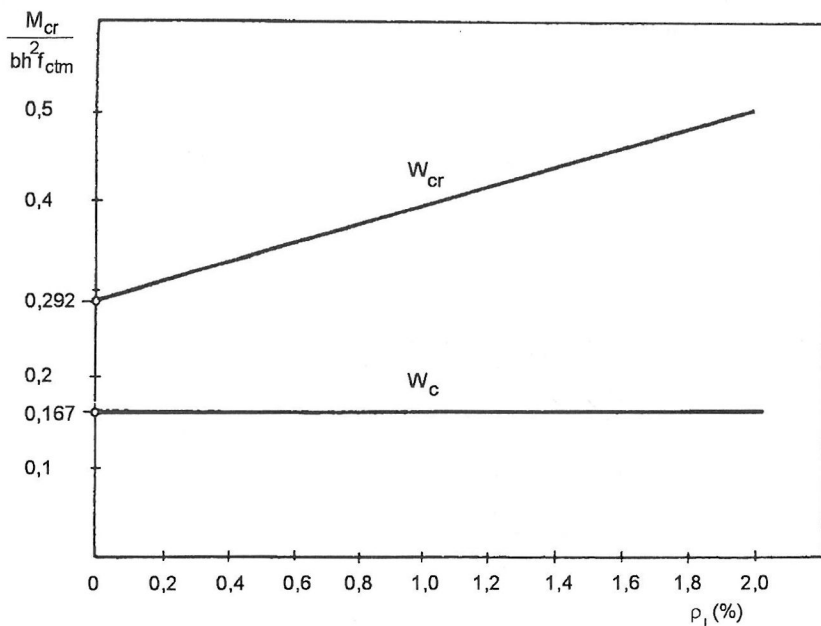
Zależność moment-krzywizna według Eurokodu 2.1 jest dwuodcinkowa, uwzględniająca fazę I przy  $M < M_{cr}$  oraz fazę II przy  $M > M_{cr}$ .

Wartość  $M_{cr}$  momentu rysującego wyraża się w obu metodach iloczynem wskaźnika wytrzymałości przekroju  $W$  i wytrzymałości betonu na rozciąganie (średniej  $f_{ctm}$  w Eurokodzie 2.1 i charakterystycznej  $f_{ck}$  w PN-84/B-03264).

W Eurokodzie 2.1 przyjęto wskaźnik wytrzymałości  $W_c$  przekroju betonowego przy założeniu, że beton jest materiałem liniowosprężystym.



Rys. 1. Wykresy zależności moment-krzywizna według PN-84/B-03264 i Eurokodu 2.1



Rys. 2. Wartości wskaźników wytrzymałości przekroju prostokątnego:  $W_{cr}$  według PN-84/B-03264 oraz  $W_c$  według Eurokodu 2.1

W normie PN-84/B-03264 przyjęto wskaźnik wytrzymałości  $W_{cr}$  przekroju żelbetowego obliczany według uproszczonego wzoru W.I. Muraszowa, z uwzględnieniem uplastycznienia betonu strefy rozciąganej bezpośrednio przed zarysowaniem.

Na rysunku 2 przedstawiono wykresy wartości wskaźników wytrzymałości  $W_c$  i  $W_{cr}$  przekroju prostokątnego w funkcji stopnia  $\rho_1$  zbrojenia rozciąganego. W przypadku przekroju betonowego ( $\rho_1 = 0$ ) wskaźnik  $W_{cr} = 1,75 W_c$ . Jeśli stopień zbrojenia  $\rho_1 = 1,0\%$ , otrzymuje się  $W_{cr} = 2,3 W_c$ , a w przypadku  $\rho_1 = 2,0\%$  – wskaźnik  $W_{cr}$  jest prawie trzykrotnie większy od wskaźnika  $W_c$ .

Przyjęcie różnych wskaźników wytrzymałości przekroju wpływa na zróżnicowanie poziomu obciążenia, przy którym określany jest początek wystąpienia II fazy pracy elementu, a zatem wpływa również na zróżnicowanie wartości ugięć (krzywizn), obliczanych według obu metod.

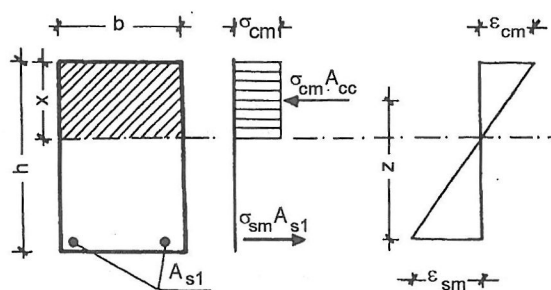
### 3. Rozkład naprężeń w ściskanej strefie przekroju

Wykres rozkładu naprężeń w ściskanej strefie zarysowanego przekroju zginanego elementu żelbetowego jest jednym z podstawowych założeń przyjmowanych w metodach obliczania ugięć, w których sztywność wyznacza się z ogólnych zależności zachodzących między krzywizną, odkształceniami skrajnych włókien przekroju oraz momentem zginającym. Przyjęcie określonego rozkładu naprężeń determinuje oblicze-

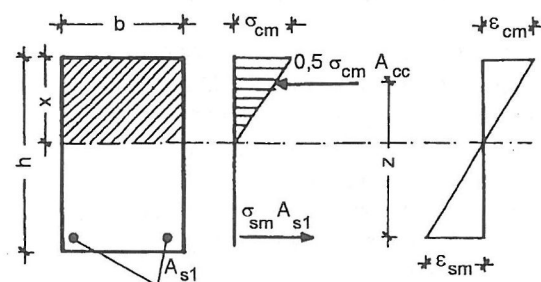
niowe wartości odkształceń z uwagi na zróżnicowanie wysokości  $x$  strefy ściskanej i ramienia z sił wewnętrznych.

W PN-84/B-03264 przyjęto (jak w metodzie W.I. Muraszowa) prostokątny wykres naprężeń w ściskanej strefie zarysowanego przekroju elementu żelbetowego (rys. 3). Wysokość strefy ściskanej obliczana jest w tym przypadku ze wzoru wyprowadzonego z empirycznej zależności zachodzącej między naprężeniami i odkształceniami betonu ściskanego.

PN-84/B-03264



EUROKOD 2.1

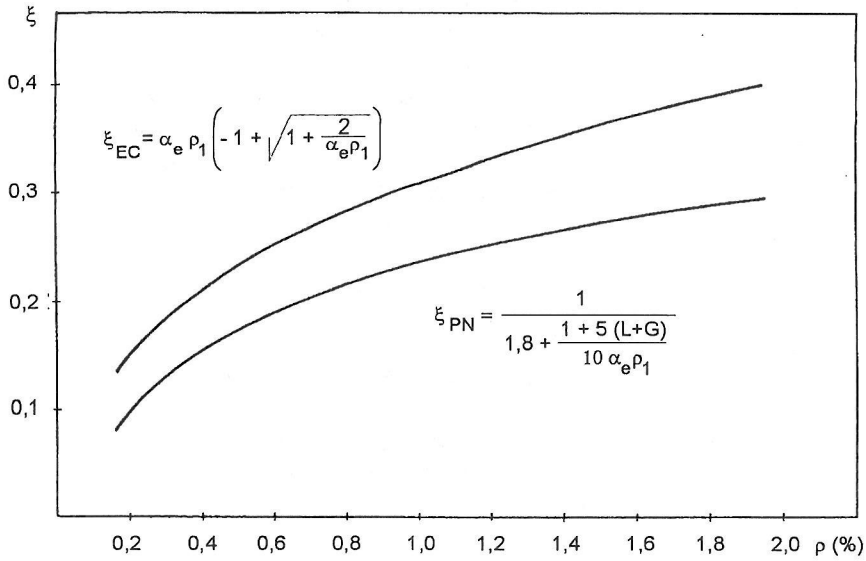


Rys. 3. Rozkład naprężeń i odkształceń w zarysowanym przekroju zginanego elementu żelbetowego przyjęty w PN-84/B-03264 i w Eurokocie 2.1

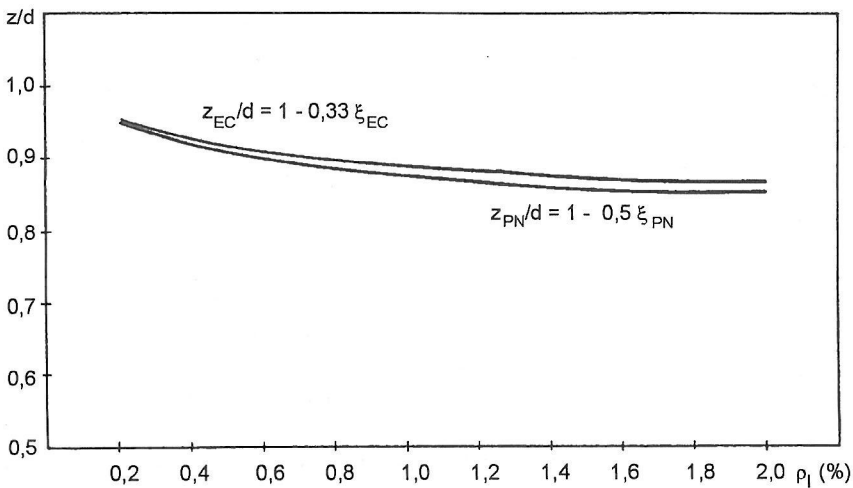
W Eurokocie 2.1 przyjęto liniowy (trójkątny) rozkład naprężeń w ściskanej strefie zarysowanego przekroju żelbetowego, co umożliwiła przy obliczaniu sztywności stosowanie wzorów wyprowadzonych w metodzie naprężeń liniowych do określenia wysokości tej strefy oraz momentów bezwładności przekroju.

Założenie liniowego rozkładu naprężeń przyjmowano – za klasyczną teorią żelbetu – już w pierwszych metodach obliczania ugięć (G.A. Maney [4], G.F. Swain [5]).

Liniowy rozkład naprężeń w zarysowanym przekroju żelbetowym przyjmowali również w swoich metodach F. Leonhardt [6], I.I. Ullicki [7], W.W. Yu i G. Winter [8] oraz H. Mayer [9].



Rys. 4. Względna wysokość strefy ściskanej zarysowanego przekroju zginanego:  $\xi_{EC}$  według Eurokodu 2.1 oraz  $\xi_{PN}$  według PN-84/B-03264



Rys. 5. Ramię sił wewnętrznych w zarysowanym, zginanym przekroju żelbetowym:  $z_{EC}$  według Eurokodu 2.1 oraz  $z_{PN}$  według PN-84/B-03264

Na rysunku 4 przedstawiono wykresy względnej wysokości  $\xi = x/d$  strefy ściskanej zarysowanego przekroju zginanego o wysokości użytecznej  $d$ , obliczone według Eurokodu 2.1 oraz według PN-84/B-03264.

Wartości  $\xi_{EC}$  obliczone według Eurokodu 2.1 przy założeniu liniowego rozkładu naprężeń w strefie ściskanej są – w całym przedziale rozpatrywanego stopnia zbrojenia od  $\rho_1 = 0,2\%$  do  $\rho_1 = 2,0\%$  – większe średnio o 30% od empirycznych wartości  $\xi_{PN}$ , obliczonych według PN-84/B-03264 przy prostokątnym wykresie naprężeń.

Wartości ramienia z sił wewnętrznych natomiast, obliczone przy liniowym i prostokątnym wykresie naprężeń, różnią się bardzo nieznacznie. Wartości  $z_{EC}$  obliczone według Eurokodu 2.1 są prawie równe wartościom  $z_{PN}$  obliczonymi według PN-84/B-03264 (rys. 5).

Wartość stosunku  $z_{EC}/z_{PN}$  nie przekracza 2% w rozpatrywanym przedziale stopnia zbrojenia.

Przyjęcie liniowego lub prostokątnego wykresu naprężeń w strefie ściskanej zarysowanego przekroju żelbetowego jest konwencją, która ma na celu uśrednienie wysokości strefy ściskanej występującej w przekrojach poprzez rysę i na odcinkach między rysami. Zarówno w Eurokodzie 2.1, jak i w PN-84/B-03264 uwzględniono przy obliczaniu sztywności zarysowanych elementów żelbetowych średnie odkształcenie  $\varepsilon_{cm}$  skrajnego ściskanego włókna betonu oraz średnie odkształcenie  $\varepsilon_{sm}$  zbrojenia rozciąganego.

Z relacji odkształceń przekroju – przy zachowaniu założenia płaskich przekrojów – można otrzymać uśrednioną wysokość strefy ściskanej w postaci

$$x_m = \frac{\varepsilon_{cm}}{\varepsilon_{cm} + \varepsilon_{sm}} d \quad (1)$$

zależnej wprost od odkształceń skrajnych włókien przekroju weryfikowanych doświadczalnie zarówno przy krótkotrwałym, jak i długotrwałym działaniu obciążenia.

W wyniku weryfikacji doświadczalnej przyjęto w PN-84/B-03264 wartość współczynnika uplastycznienia betonu strefy ściskanej  $\nu = 0,5$  przy obciążeniu krótkotrwałym, co sprowadza pole  $A_{cc}$  ściskanej strefy betonu do pola powierzchni trójkąta  $A_{cc} = 0,5 b x_m$ ,

#### 4. Współpraca stali zbrojeniowej i betonu na odcinkach między rysami

W.I. Muraszow jako pierwszy stwierdził, że średnie odkształcenia  $\varepsilon_{sm}$  zbrojenia rozciąganego, mierzone na odcinku zarysowanego elementu żelbetowego zginanego stałym momentem  $M$ , są mniejsze od odkształceń  $\varepsilon_s$ , określonych w przekrojach zarysowanych przy identycznych wartościach naprężeń  $\sigma_s$ . Jest to wynikiem współpracy stali zbrojeniowej i betonu na odcinkach między rysami, na których beton przenosi część siły rozciągającej.

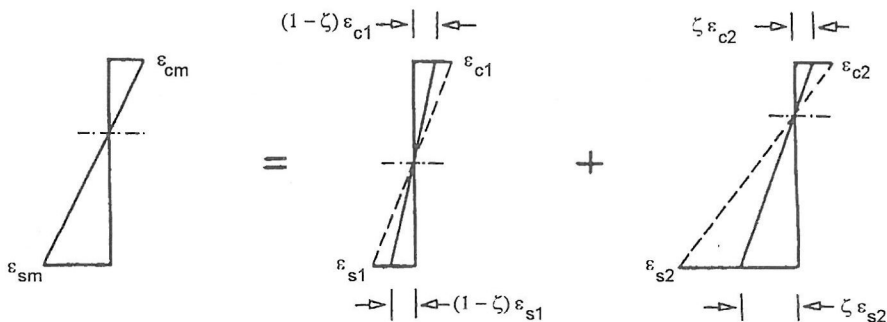
Uśrednienie odkształceń  $\varepsilon_{sm}$  stali zbrojeniowej prowadzi do uśrednienia krzywizny  $k_m$ , przy czym zgodnie z rysunkiem 1:

$$k_I < k_m \leq k_{II} \quad (2)$$

Miarą współpracy stali zbrojeniowej i betonu rozciąganego na odcinkach między rysami (określanej pojęciem *tension stiffening*) jest stosunek  $\varepsilon_{sm} / \varepsilon_s \leq 1$ , którego sens fizyczny jest interpretowany w PN-84/B-03264 przez wprowadzenie współczynnika  $\psi_s$ , a w Eurokodzie 2.1 – współczynnika  $\zeta$ .

Sposób uśrednienia odkształceń  $\epsilon_{sm}$  stali zbrojeniowej przyjęty w PN-84/B-03264 polega na pomnożeniu odkształceń  $\epsilon_s$  określonych w przekroju zarysowanym przez współczynnik  $\psi_s$ , którego wartość jest funkcją liniową stosunku  $\alpha M_{cr}/M$ . Moment rysujący  $\alpha M_{cr}$  determinuje fazę II pracy elementu żelbetowego (tzw. fazę pełnego zarysowania), w której występuje obszar zarysowania strefy rozciąganej elementu o ustabilizowanej długości i stałym rozstawie rys.

Uśrednienie odkształceń  $\epsilon_{sm}$  stali zbrojeniowej według Eurokodu 2.1 uzyskuje się drogą sumowania (rys. 6) odkształceń  $\epsilon_{s2}$  (w fazie II) pomnożonych przez współczynnik  $\zeta$  oraz odkształceń  $\epsilon_{s1}$  (w fazie I) pomnożonych przez różnicę  $(1 - \zeta)$ . Współczynnik  $\zeta$  charakteryzuje rozkład naprężeń w zbrojeniu rozciągającym na długości zarysowanego odcinka elementu żelbetowego, a jego sens fizyczny odpowiada współczynnikowi  $\psi_s$  przyjętemu w PN-84/B-03264. Postać wzoru określającego wartość współczynnika  $\zeta$  jest identyczna z postacią wzoru opisującego wartość współczynnika  $\psi_s$ , zaproponowanego przez J.M. Niemirowskiego [10] w 1958 r.



Rys. 6. Sumowanie odkształceń zginanego przekroju żelbetowego według Eurokodu 2.1

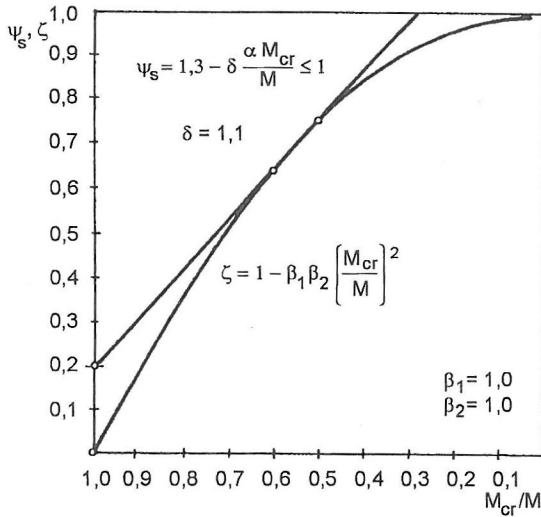
Na rysunku 7 przedstawiono wykresy wartości współczynników  $\psi_s$  i  $\zeta$  przy obciążeniu krótkotrwałym, obliczone w funkcji stosunku  $M_{cr}/M$  w przypadku przekroju prostokątnego zbrojonego prętami żebrowanymi. Wartości tych współczynników wykazują stosunkowo niewielkie różnice, a przy stosunku  $M_{cr}/M$  w przedziale od 0,5 do 0,6 (co odpowiada przedziałowi obciążeń eksploatacyjnych) wartości współczynników  $\psi_s$  i  $\zeta$  są równe.

Podobnie dużą zgodność wartości współczynników  $\psi_s$  i  $\zeta$  uzyskuje się przy obciążeniu długotrwałym (rys. 8). Przy wartości stosunku  $M_{cr}/M=0,6$  wartości tych współczynników są identyczne, równe 0,82.

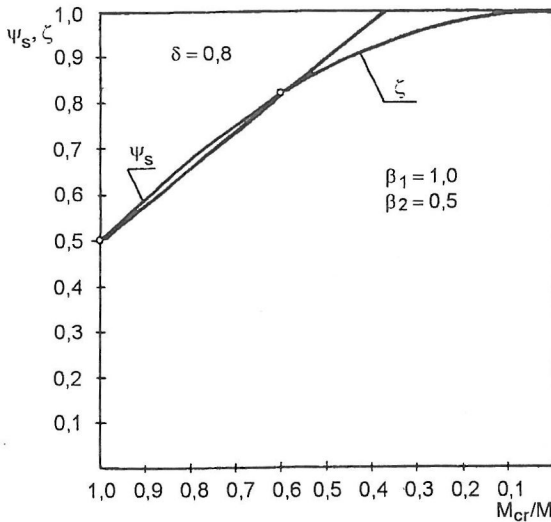
Wartości współczynnika  $\psi_s$  określone według PN-84/B-03264 i wartości współczynnika  $\zeta$  uzyskiwane według Eurokodu 2.1 są zgodne w obszarze wartości stosunków  $M_{cr}/M \approx 0,6$  zarówno w przypadku krótkotrwałego, jak i długotrwałego działania obciążenia.

Należy jednak podkreślić, że wartości  $M_{cr}$  momentu rysującego określone według obu norm – są różne. Według PN-84/B-03264 – jak to przedstawiono w p. 2 – uzyskuje się znacznie większe wartości momentu rysującego niż według Eurokodu 2.1. Wpływa to na zróżnicowanie poziomu obciążenia, przy którym zakłada się, że zginany element żelbetowy pracuje w fazie II. W przypadku elementów o małych stopniach zbrojenia przekroju

można spodziewać się dużych różnic w ocenie średnich odkształceń  $\epsilon_{sm}$ , a tym samym znacznego zróżnicowania wartości krzywizn (ugięć) obliczonych według obu metod.



Rys. 7. Wartości współczynników  $\psi_s$  i  $\zeta$  przy obciążeniu krótkotrwałym



Rys. 8. Wartości współczynników  $\psi_s$  i  $\zeta$  przy obciążeniu długotrwałym

## 5. Pełzanie betonu strefy ściskanej

Pełzanie betonu strefy ściskanej jest podstawowym czynnikiem wpływającym na przyrost ugięcia (redukcję sztywności) zginanych elementów żelbetowych w czasie  $t$  działania obciążenia długotrwałego.



Za pomocą metod normowych obliczania ugięć można w zasadzie określić maksymalne  $y_{II, \infty}$  ugięcie długotrwałe zarysowanych elementów żelbetowych, spodziewane w czasie  $t \rightarrow \infty$ , jako miarodajne do sprawdzenia warunku  $y_{II, \infty} \leq y_{lim}$  stanu granicznego ugięć.

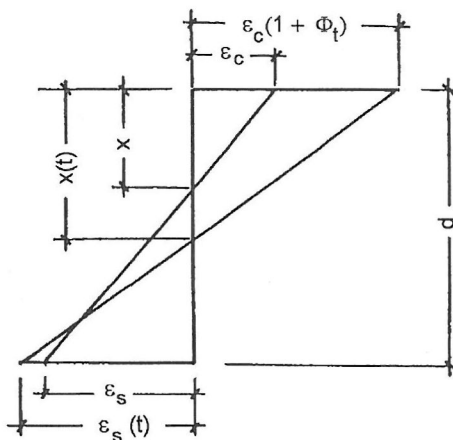
Ugięcie długotrwałe  $y(t)$  elementu żelbetowego w funkcji czasu  $t$  działania obciążenia uwzględniono po raz pierwszy przed pięćdziesięciu laty w zaleceniach Portland Cement Association. Zaproponowano wówczas, aby ugięcie  $y(t)$  obliczać mnożąc ugięcie krótkotrwałe  $y_0$  elementu betonowego przez współczynnik  $K_t$ , opisujący przyrost ugięcia w postaci funkcji hiperbolicznej parametru  $t$  (wyrażonego w dniach działania obciążenia) zmierzającej asymptotycznie do wartości  $K_t = 3,80$ , przy  $t \rightarrow \infty$ .

Podobny sposób obliczania ugięcia zaproponowali w metodzie uproszczonej W.W.Yu i G. Winter [8]. Ugięcie  $y_{II}(t)$  zarysowanego elementu żelbetowego oblicza się według tej metody mnożąc ugięcie krótkotrwałe  $y_{II,0}$  przez współczynnik empiryczny zależny od czasu działania obciążenia oraz pola powierzchni  $A_{s2}$  zbrojenia ściskanego.

W metodach analitycznych, opisujących krzywiznę  $k(t)$  zginanego elementu żelbetowego, z ogólnej zależności zachodzącej między promieniem krzywizny i odkształceniami – odkształcenie  $\varepsilon_c(t)$  skrajnego włókna betonu strefy ściskanej określa się przez superpozycję odkształcenia sprężystego  $\varepsilon_c$  oraz odkształcenia  $\varepsilon_{cp}(t)$  wywołanego pełzaniem betonu w czasie  $t$  działania obciążenia (rys. 9), to jest

$$\varepsilon_c(t) = \varepsilon_c + \varepsilon_{cp}(t) = \varepsilon_c(1 + \Phi_t) \quad (3)$$

gdzie  $\Phi_t$  – współczynnik pełzania betonu.



Rys. 9. Rozkład odkształceń w zarysowanym przekroju zginanego elementu żelbetowego przy krótkotrwałym i długotrwałym działaniu obciążenia

Zakładając, że naprężenia  $\sigma_c$  w betonie strefy ściskanej są stałe w czasie  $t$ , można również wyrazić zmienność (redukcję) modułu sprężystości  $E_c(t)$  betonu w funkcji czasu działania obciążenia

$$E_c(t) = \frac{\sigma_c}{\varepsilon_c(1 + \Phi_t)} = \frac{E_c}{1 + \Phi_t} \quad (4)$$

Powyższy sposób oceny wpływu pełzania na redukcję modułu sprężystości betonu, przyjęty pierwotnie przez F. Dischingera, adaptowany został w metodach F. Leonhardta [6], I.I. Ulickiego [7], [11], D.E. Bransona [12], a także w CEB/FIP Model Code [13] oraz w Eurokodzie 2.1.

W metodzie obliczania ugięć przyjętej w PN-76/B-03264 i następnie w PN-84/B-03264 ugięcie  $y_{II}$  elementów żelbetowych obliczano przy sztywności  $B_{II}$ , określonej w czasie  $t \rightarrow \infty$ . Odształcenia plastyczne betonu strefy ściskanej wyrażono współczynnikiem  $v$ , przedstawiającym stosunek odkształceń sprężystych  $\varepsilon_c$  do odkształceń całkowitych  $\varepsilon_c + \varepsilon_{pl}$  oraz uwzględniającym kształt wykresu naprężeń w strefie ściskanej

$$v = \omega \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_c + \varepsilon_{pl}} \quad (5)$$

gdzie  $\omega$  – współczynnik przedstawiający stosunek powierzchni rzeczywistego wykresu naprężeń w betonie strefy ściskanej do powierzchni wykresu prostokątnego.

W metodzie normowej przyjęto prostokątny wykres naprężeń ściskających w zarysowanym przekroju żelbetowym. Jednakże przy krótkotrwałym działaniu obciążenia wykres naprężeń w strefie ściskanej przekroju zbliżony jest do trójkątnego ( $\omega = 0,5$ ). Przyjmując, że odkształcenia plastyczne betonu  $\varepsilon_{pl}$  przy długotrwałym działaniu obciążenia są wywołane głównie pełzaniem betonu, J. Kubicki [3] zaproponował dostosowanie metody normowej do obliczania przyrostu ugięcia w czasie  $t$  działania obciążenia, nadając współczynniki  $v$  postać  $v(t)$  określoną w funkcji współczynnika pełzania betonu, co na podstawie wzoru (4) pozwalało redukować wartość  $E_c(t)$  modułu sprężystości betonu.

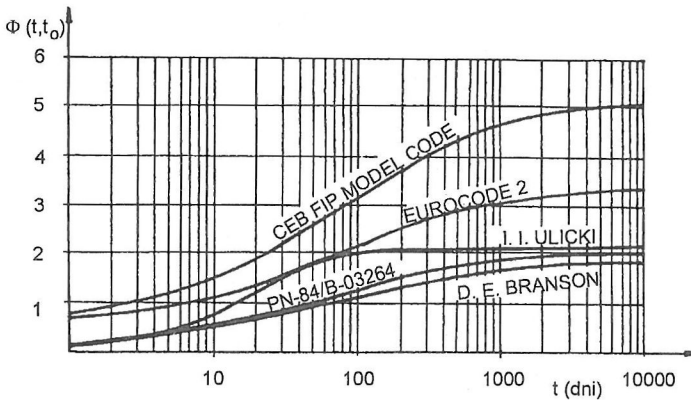
Stopień redukcji modułu sprężystości betonu (wyrażający zmniejszenie sztywności elementu żelbetowego na skutek przyrostu odkształceń betonu wywołanych pełzaniem) jest zależny od sposobu określenia współczynnika pełzania betonu.

W załączniku 5 do PN-84/B-03264 pełzanie betonu uzależniono tylko od wilgotności względnej  $RH$  środowiska oraz określono postępowanie pełzania w czasie  $t$  działania obciążenia, wprowadzając współczynnik  $\kappa(t)$ .

W załączniku 1 do Eurokodu 2.1 przedstawiono znacznie dokładniejszy sposób wyznaczania wartości współczynnika pełzania betonu, uwzględniający: wiek betonu  $t_o$  w chwili obciążenia elementu, wilgotność względną środowiska, średnią wytrzymałość betonu  $f_{cm}$  po 28 dniach twardnienia, wymiar sprowadzony  $h_o$  przekroju poprzecznego elementu oraz postępowanie pełzania w czasie  $t$  działania obciążenia.

Na rysunku 10 przedstawiono wartości  $\Phi(t, t_o)$  współczynnika pełzania betonu obliczone według I.I. Ulickiego, D.E. Bransona, CEB/FIP Model Code 1978, Eurokodu 2.1 oraz PN-84/B-03264. W obliczeniach przyjęto przekrój prostokątny wykonany z betonu klasy B25, o wymiarach  $b = 0,15$  m i  $h = 0,30$  m, założono  $RH = 50\%$ , a postępowanie pełzania rozpatrzono w czasie  $t = 10\,000$  dni.

Z rysunku 10 wynika, że wartości współczynnika pełzania betonu określone według PN-84/B-03264 są bliskie wartościom proponowanym przez I.I. Ulickiego i D.E. Bransona. Maksymalne wartości współczynnika pełzania betonu określone według Eurokodu 2.1 są około 50% większe od wartości uzyskanych według PN-84/B-03264 i około 50% mniejsze od wartości wyznaczonych według CEB/FIP Model Code 1978.



Rys. 10. Wartości  $\Phi(t, t_0)$  współczynnika pełzania betonu

W czasie  $t$  działania obciążenia długotrwałego następuje również stosunkowo niewielki przyrost odkształceń  $\epsilon_s(t)$  zbrojenia rozciąganego w zarysowanym elemencie żelbetowym (rys. 9). Przyrost ten jest określany w metodach normowych w czasie  $t \rightarrow \infty$  i uwzględniany przyjęciem maksymalnych wartości współczynnika  $\psi_{s,\infty}$  w PN-84/B-03264 lub współczynnika  $\zeta$  w Eurokodzie 2.1 przy obciążeniu długotrwałym (rys. 8). Jak wykazały wyniki badań belek żelbetowych przeprowadzone przez I.I. Ulickiego [7] i J. Kubickiego [3], przyrost odkształceń  $\epsilon_s(t)$  zachodzi głównie w początkowym  $t \leq 45$  dni okresie działania obciążenia i w takim okresie zalecano w PN-84/B-03264 uwzględniać przyrost  $\epsilon_s(t)$  poprzez interpolację liniową różnicy wartości parametru  $\delta$ , występującego we wzorach na określenie wartości współczynników  $\psi_s$  przy krótkotrwałym i długotrwałym działaniu obciążenia, tj.

$$\psi_s(t) = \psi_s + \Delta\psi_s(t) = \psi_s + \delta(t) \frac{t}{45} \quad (6)$$

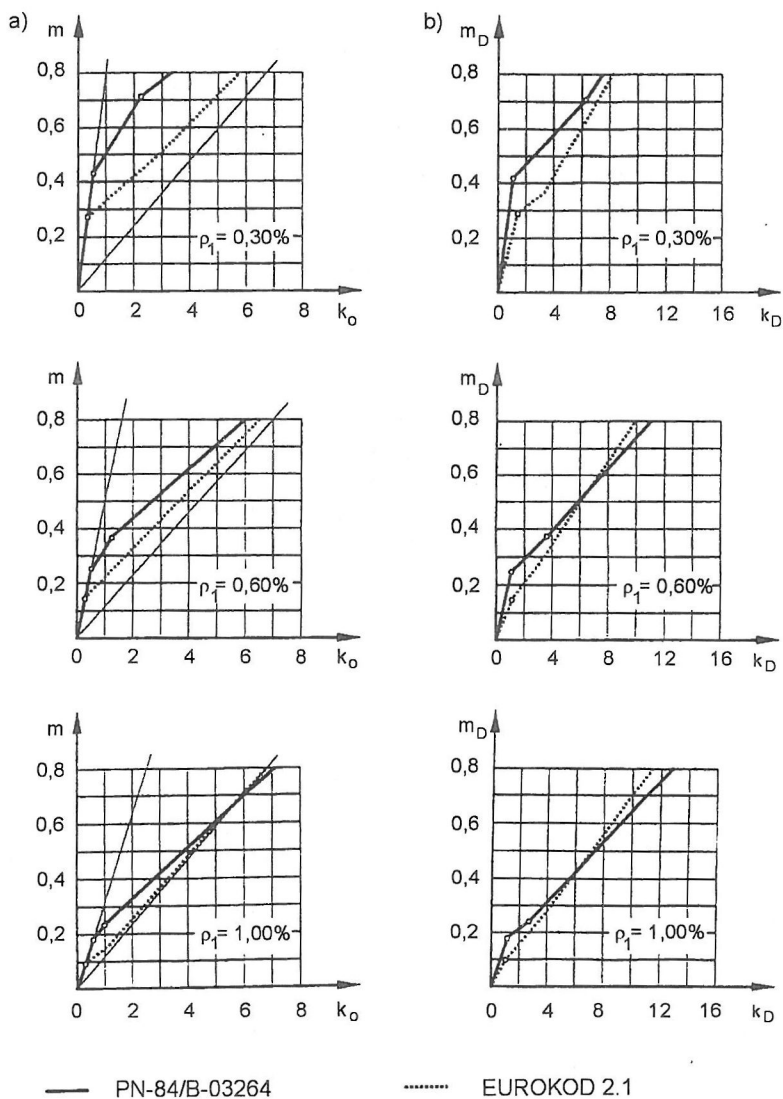
gdzie:  $\delta(t) = 0,2$  w przypadku prętów gładkich,  
 $\delta(t) = 0,3$  w przypadku prętów żebrowanych.

W obu metodach normowych, zarówno podanych w PN-84/B-03264, jak też w Eurokodzie 2.1, uwzględniono analogicznie wpływ pełzania betonu strefy ściskanej na przyrost ugięć zarysowanych elementów żelbetowych w funkcji czasu  $t$  działania obciążenia, przy czym przedstawiony w Eurokodzie 2.1 sposób określania wartości współczynnika pełzania betonu pozwala dokładniej oszacować ugięcie długotrwałe.

## 6. Porównanie wartości ugięć belek żelbetowych obliczanych według PN-84/B-03264 i Eurokodu 2.1

W celu wykazania, w jakim stopniu różne założenia przyjęte w obu metodach wpływają na wartości obliczanych ugięć, w pracy [14] przedstawiono wykresy funkcji  $m(k)$  moment-krzywizna prostokątnych belek żelbetowych o wymiarach przekroju  $b = 0,15$  m,

$h = 0,30$  m,  $d = 0,27$  m i zmiennym stopniu zbrojenia od  $\rho_1 = 0,25\%$  do  $\rho_1 = 2,00\%$ , zakładając beton klasy B25 i stal klasy A-III. Przy obliczaniu funkcji  $m(k_D)$  w przypadku długotrwałego działania obciążenia przyjęto wiek betonu w chwili realizacji obciążenia  $t_o = 28$  dni oraz wilgotność względną powietrza  $RH = 50\%$ .



Rys. 11. Wartości funkcji moment-krzywizna: a –  $m(k_o)$  przy obciążeniu krótkotrwałym, b –  $m(k_D)$  przy obciążeniu długotrwałym

Krzywiznę  $k_o$  pod obciążeniem krótkotrwałym oraz krzywiznę  $k_D$  pod obciążeniem długotrwałym przedstawiono w funkcji parametru  $m$ , wyrażającego stosunek wartości  $M$  momentu zginającego do wartości  $M_N$  momentu niszczącego przekrój żelbetowy. Wartość parametru  $m$  przyjęto w przedziale od  $m = 0$  do  $m = 0,8$ , co pozwoliło uzyskać wykresy przebiegu funkcji  $m(k)$  w poszczególnych fazach pracy elementu żelbetowego występujących pod obciążeniem eksploatacyjnym.

Na rysunku 11a przedstawiono wykresy funkcji  $m(k_o)$  obliczone przy obciążeniu krótkotrwałym według PN-84/B-03264 (linia ciągła) oraz według Eurokodu 2.1 (linia przerywana). Cienkimi liniami oznaczono krzywizny  $k_I$  i  $k_{II}$  obliczone odpowiednio w I i II fazie pracy.

Na podstawie wykresów funkcji  $m(k_o)$  można stwierdzić, że wartości ugięcia elementów żelbetowych obliczone pod obciążeniem krótkotrwałym według PN-84/B-03264 są w przypadku elementów o stopniu zbrojenia przekroju  $\rho_1 \leq 0,60\%$  mniejsze niż wartości ugięcia obliczone według Eurokodu 2.1.

Największe różnice wartości ugięć krótkotrwałych występują w obszarze obciążenia, w którym według PN-84/B-03264 element pracuje w fazie  $I_a$ , pośredniej między fazami I i II, zdeterminowanymi wartościami momentów rysujących znacznie większymi niż wartość  $M_{cr}$  przyjęta w Eurokodzie 2.1 (p. 4). Wartość stosunków ugięć krótkotrwałych  $y_{PN}$  do  $y_{EC}$ , określonych w przedziale wartości  $m = 0,6-0,7$  (przyjmowanym umownie jako zakres obciążeń eksploatacyjnych) wynosi: 0,4 dla  $\rho_1 = 0,30\%$  i 0,8 dla  $\rho_1 = 0,60\%$ . Przy stopniu zbrojenia  $\rho_1 \geq 0,80\%$  wartości ugięć krótkotrwałych obliczone według obu metod są prawie jednakowe.

Z wykresów funkcji  $m(k_D)$  wyznaczonych przy obciążeniu długotrwałym według PN-84/B-03264 oraz Eurokodu 2.1 (rys. 11b) wynika, że różnice między wartościami ugięć obliczonymi według obu metod nie są już tak znaczne, jak w przypadku obciążenia krótkotrwałego. W przedziale  $m = 0,6-0,7$  stosunek ugięć długotrwałych  $y_{PN}$  do  $y_{EC}$  przybiera wartość 0,7 w przypadku  $\rho_1 = 0,30\%$ . Przy stopniu zbrojenia przekroju  $\rho_1 > 0,3$  wartości ugięć pod obciążeniem długotrwałym obliczone według obu metod są prawie jednakowe. Wynika to z bliskich sobie wartości współczynników  $\psi_s$  i  $\zeta$  przyjmowanych przy obciążeniu długotrwałym oraz wartości końcowych współczynników pełzania betonu.

## 7. Porównanie obliczonych i doświadczalnych wartości ugięć belek żelbetowych

### 7.1. Charakterystyka analizowanych wyników badań doświadczalnych

Ocenę zgodności wyników obliczeń z wynikami badań ugięć belek żelbetowych wykonano na podstawie analizy wyników badań eksperymentalnych 107 belek żelbetowych pod obciążeniem krótkotrwałym, przeprowadzonych przez I.I. Ulickiego, W.W. Figarowskiego, J.C. Maldague, G. Franza i H. Brenkera, K. Hajnal-Kónyi oraz badań wykonanych przez autora w Instytucie Techniki Budowlanej.

Oceny zgodności ugięć długotrwałych w funkcji czasu działania obciążenia dokonano na podstawie analizy wyników długotrwałych badań 10 belek żelbetowych, przeprowa-

dzonych przez I.I. Ulickiego oraz 56 belek zbadanych przez autora, wykonanych z betonu o wytrzymałości  $f_{cm} = 12 \text{ MPa} - 47 \text{ MPa}$ .

Analizowane wyniki badań dotyczą belek wolnopodpartych o przekroju prostokątnym, zbrojonych stalą gładką i żebrowaną, przy stopniu zbrojenia od  $\rho_1 = 0,20\%$  do  $\rho_1 = 2,50\%$ , obciążonych dwiema siłami skupionymi (usytuowanymi w 1/3 lub 1/4 rozpiętości), jedną siłą skupioną w środku rozpiętości oraz obciążonych równomiernie. Parametry geometryczne i fizyczne rozpatrywanych w analizie belek przedstawiono w tablicach załączonych do pracy [14].

### **Badania I.I. Ulickiego [7]**

Analizowane były ugięcia doświadczalne pod obciążeniem krótkotrwałym i długotrwałym 10 belek żelbetowych serii BI, BI', BII i BIII.

Serie BI i BI' to dwie belki, a serie BII i BIII trzy belki bliźniacze o przekroju prostokątnym  $100 \times 200 \text{ mm}$ , zbrojone stalą klasy A-III. Założony stopień zbrojenia belek wynosił w przypadku serii BI i BI':  $\rho_1 = 0,40\%$ , w przypadku serii BII:  $\rho_1 = 1,40\%$ , a serii BIII:  $\rho_1 = 0,40\%$  i  $\rho_2 = 0,3\%$ .

Belki zostały wykonane z przygotowanej fabrycznie masy betonowej sporządzonej z zastosowaniem cementu portlandzkiego „400” w ilości  $290 \text{ kg/m}^3$ . Stosunek objętościowy składników betonu wynosił  $1 : 2,35 : 4,97$  przy wskaźniku  $w/c = 0,50$ . Zagęszczanie betonu przeprowadzono wibracyjnie w bateryjnych formach drewnianych. W okresie twardnienia betonu stosowano nawilżanie. Temperatura i wilgotność powietrza w laboratorium w okresie twardnienia betonu wynosiły odpowiednio:  $T = 27 - 29^\circ\text{C}$  i  $RH = 65 - 75\%$ .

Belki zostały obciążone w wieku betonu  $t_0 = 21 - 28$  dni do stopnia zaawansowania obciążenia  $m = 0,65$  i przebywały pod tym obciążeniem w okresie  $t = 276 - 304$  dni. Średnia wilgotność względna powietrza wynosiła:  $RH = 60 - 80\%$  w okresie od  $t = 0 - 70$  dni oraz  $RH = 80 - 90\%$  w okresie  $t = 75 - 310$  dni.

W badaniach belek przyjęto schemat statyczny belki wolnopodpartej o rozpiętości  $l_{eff} = 2,00 \text{ m}$ , obciążonej dwiema siłami skupionymi, umieszczonymi w odległości  $0,25 l_{eff}$  od podpór.

Wytrzymałość betonu  $f_{cm}$  na ściskanie określano na sześcianach o krawędzi  $100 \text{ mm}$  i  $150 \text{ mm}$ , a następnie przeliczano na wytrzymałość odpowiadającą sześcianowi o krawędzi  $200 \text{ mm}$ . Moduł sprężystości betonu  $E_c$  określano z badań prostopadkościanów o wymiarach  $100 \times 100 \times 400 \text{ mm}$ .

### **Badania W.W. Figarowskiego [15]**

Analizowane były ugięcia doświadczalne pod obciążeniem krótkotrwałym 6 belek żelbetowych serii I, zbrojonych stalą gładką klasy A-I. Seria obejmowała trzy pary prostokątnych belek bliźniaczych o przekroju  $180 \times 250 \text{ mm}$ , o zróżnicowanym stopniu zbrojenia:  $\rho_1 = 0,36\%$ ,  $0,49\%$  i  $0,61\%$ .

Belki bliźniacze wykonano z jednego zarobu masy betonowej przy zastosowaniu cementu portlandzkiego „600” w ilości  $320 \text{ kg/m}^3$ . Stosunek objętościowy składników betonu wynosił  $1 : 2,4 : 3,8$  przy wskaźniku  $w/c = 0,65$ .

W okresie twardnienia betonu belki były nawilżane, przy czym temperatura i wilgotność powietrza w laboratorium wynosiły odpowiednio:  $T = 10 - 15^\circ\text{C}$  i  $RH = 60 - 75\%$ .

Belki zostały obciążone w wieku betonu  $t_o = 28-30$  dni do stopnia zaawansowania obciążenia  $m = 0,54$  (belki o symbolu 1k) i  $m = 0,80$  (belki o symbolu 2k).

W badaniach belek przyjęto schemat statyczny belki wolnopodpartej o rozpiętości  $l_{eff} = 3,00$  m, obciążonej dwiema siłami skupionymi, umieszczonymi w odległości  $1/3 l_{eff}$  od podpór.

Wytrzymałość betonu na ściskanie  $f_{cm}$  określano na sześcianach o krawędzi 200 mm, a moduł sprężystości  $E_c$  na prostopadłościanach o wymiarach  $100 \times 100 \times 400$  mm.

### **Badania J.C. Maldague [16]**

Analizowane były ugięcia doświadczalne pod obciążeniem krótkotrwałym 8 belek żelbetowych o symbolach A2, A8, B2, B8, E9, F9, H2 i H8, o stopniu zbrojenia przekroju  $\rho_1 = 0,48-0,83\%$ .

Belki A2, A8, B2 i B8 były zbrojone stalą gładką, a belki E9, F9, H2 i H8 – stalą żebrowaną. Przekroje poprzeczne badanych belek, prostokątne, miały wymiary  $250 \times 280$  mm oraz  $150 \times 280$  mm.

Beton belek wykonano z cementu portlandzkiego „200” i „300”. Stosunek objętościowy składników betonu wynosił: w belkach typu A, B i H – 1 : 1,97 : 3,17, w belkach E9 – 1 : 2,43 : 3,8, w belkach F9 – 1 : 1,54 : 2,73.

Belki badano pod obciążeniem doraźnym w wieku betonu  $t_o = 23-98$  dni. W badaniach przyjęto schemat statyczny belki wolnopodpartej o rozpiętości  $l_{eff} = 2,80$  m, stosując obciążenie jedną siłą skupioną w środku rozpiętości (belki A2, A8, E9, H2 i H8) lub dwiema siłami skupionymi, usytuowanymi w odległości  $1/3 l_{eff}$  od podpór (belki B2 i B8). Obciążenie doraźne belek realizowane było stopniowo, do osiągnięcia wartości  $M_N$  momentu niszczonego. W analizie uwzględniono ugięcia belek występujące przy stopniu zaawansowania obciążenia  $m \equiv 0,7$ .

Wytrzymałość betonu na ściskanie  $f_{cm}$  określano na sześcianach o krawędzi 140 mm oraz na walcach  $\phi 150/300$  mm. Moduł sprężystości betonu określano na prostopadłościanach o wymiarach  $70 \times 70 \times 280$  mm.

### **Badania G. Franza i H. Brenkera [17]**

Analizowano ugięcia doświadczalne pod obciążeniem krótkotrwałym 15 prostokątnych belek żelbetowych o wymiarach przekroju  $200 \times 390$  mm, usystematyzowanych w 3 serie.

Belki serii 1 (A1, B1 i C1) były zbrojone stalą gładką, belki serii 2 (A2a, A2b, A2c, B2a, B2b, B2c) oraz belki serii 3 (A3, B3 i C3) – stalą żebrowaną. Założony stopień zbrojenia przekroju belek wynosił: w belkach typu A:  $\rho_1 = 1,50\%$ , w belkach typu B:  $\rho_1 = 0,9\%$  i w belkach typu C –  $\rho_1 = 0,33\%$ .

Belki badano pod obciążeniem doraźnym, realizowanym stopniowo, do osiągnięcia momentu niszczonego. W analizie uwzględniono ugięcia belek występujące przy stopniu zaawansowania obciążenia  $m \equiv 0,7$ . W badaniach doświadczalnych przyjęto schemat statyczny belki wolnopodpartej o rozpiętości  $l_{eff} = 3,00$  m, stosując obciążenie:

– dwiema siłami skupionymi usytuowanymi w odległości 900 mm od podpór (belki serii 1 i 2),

– jedną siłą skupioną usytuowaną w środku rozpiętości (belki serii 3).

Wytrzymałość betonu na ściskanie  $f_{cm}$  określano na sześcianach o krawędzi 200 mm, wytrzymałość betonu na rozciąganie na walcach o średnicach  $\phi 150$  mm i  $\phi 200$  mm

oraz długości 350 mm. Moduł sprężystości betonu określano na prostopadłościanach o wymiarach 160 × 160 × 420 mm oraz na walcach o średnicy  $\phi$  200 mm i długości 520 mm.

### **Badania K. Hajnal-Kónyi [18]**

Analizowano ugięcia doświadczalne pod obciążeniem krótkotrwałym 12 prostokątnych belek żelbetowych o wymiarach przekroju 127 × 190 mm.

Badane belki tworzyły 6 par złożonych z belki zbrojonej dwoma prętami  $\phi$  12,7 mm ze stali gładkiej ( $A_s = 253 \text{ mm}^2$ ) oraz z belki zbrojonej dwoma prętami  $\phi$  9,5 mm ze stali żebrowanej ( $A_s = 142 \text{ mm}^2$ ).

W badaniach realizowano schemat statyczny belki wolnopodpartej, równomiernie obciążonej, o rozpiętości:  $l_{eff} = 6,40 \text{ m}$  (belki 1, 2, 7 i 8),  $l_{eff} = 4,80 \text{ m}$  (belki 3, 4, 9 i 10) oraz  $l_{eff} = 3,20 \text{ m}$  (belki 5, 6, 11 i 12).

Wytrzymałość betonu na ściskanie określano na sześciangach o krawędzi 200 mm.

### **Badania własne [3], [19]**

Analizowano ugięcia doświadczalne pod obciążeniem krótkotrwałym i długotrwałym 56 belek żelbetowych o przekroju prostokątnym, usystematyzowanych w 4 serie:

- seria I obejmowała 24 belki o wymiarach przekroju 150 × 150 mm, zbrojone stałą gładką klasy A-I przy stopniach zbrojenia  $\rho_1 = 0,84\text{--}2,50\%$ ,
- seria II obejmowała 20 belek o wymiarach przekroju 150 × 150 mm, zbrojonych stałą żebrowaną klasy A-III przy stopniach zbrojenia  $\rho_1 = 0,53\text{--}1,67\%$ ,
- seria III obejmowała 8 belek o wymiarach przekroju 140 × 220 mm oraz 160 × 370 mm, zbrojonych stałą żebrowaną klasy A-III o podwyższonej granicy plastyczności do 600 MPa (poprzez skręcanie) przy stopniach zbrojenia  $\rho_1 = 0,20\text{--}0,80\%$ ,
- seria IV obejmowała 4 belki o wymiarach przekroju 100 × 200 mm oraz 100 × 150 mm, zbrojone stałą żebrowaną klasy A-IV przy stopniach zbrojenia  $\rho_1 = 0,63\text{--}0,87\%$ .

Każdy typ (numer) belek reprezentowały 2 belki bliźniacze, wykonane z jednego zarobu masy betonowej. Beton wykonywano w laboratorium, stosując cement portlandzki „350” w ilości 320 kg/m<sup>3</sup>, przy wskaźniku w/c = 0,50–0,74. Beton zagęszczano w drewnianych formach bateryjnych, a w okresie 7 kolejnych dni twardnienia – nawilżano. Temperatura i wilgotność względna powietrza w laboratorium w okresie twardnienia betonu wynosiły odpowiednio:  $T = 18\text{--}22^\circ\text{C}$  i  $RH = 75\text{--}85\%$ .

W badaniach belek realizowano schemat statyczny belki wolnopodpartej, obciążonej dwiema siłami skupionymi, umieszczonymi w 1/3 rozpiętości wynoszących:  $l_{eff} = 3,50 \text{ m}$  w przypadku belek serii I i II oraz  $l_{eff} = 3,00 \text{ m}$  w przypadku belek serii III i IV.

Belki serii I, II i IV obciążone zostały w jednakowym wieku betonu  $t_0 = 28$  dni, belki serii III natomiast w wieku betonu  $t_0 = 60$  dni. Stopień zaawansowania obciążenia wynosił  $m \approx 0,7$ , a tylko w przypadku belek III-3 był niższy:  $m = 0,35$ .

W dniu obciążenia belek określano wytrzymałość betonu na ściskanie za pomocą badania walców  $\phi$  160/160 mm. Moduł sprężystości betonu określano na podstawie badań prostopadłościanów o wymiarach 150 × 150 × 500 mm.

Badane belki przebywały pod obciążeniem długotrwałym w następujących okresach:

belki serii I od 330 do 400 dni,  
belki serii II około 7200 dni,

belki serii III 540 dni,  
belki serii IV 370 dni.



W okresie prowadzenia badań rejestrowano temperaturę i wilgotność względną powietrza w laboratorium.

## 7.2. Ugięcia pod obciążeniem krótkotrwałym

W pracy [14] zestawiono wartości  $y_{exp}$  krótkotrwałych ugięć doświadczalnych, uzyskanych z badań 107 belek żelbetowych oraz obliczone wartości ugięć krótkotrwałych:  $y_{PN}$  według PN-84/B-03264 oraz  $y_{EC}$  według Eurokodu 2.1. Przedmiotem analizy porównawczej były wartości stosunku  $y_{PN}/y_{exp}$  oraz  $y_{EC}/y_{exp}$ .

Wartości stosunku  $y_{PN}/y_{exp}$  ugięć krótkotrwałych obliczonych według PN-84/B-03264 do ugięć doświadczalnych rozpatrywanych belek żelbetowych przedstawiono na rysunku 12 w funkcji iloczynu  $\alpha_e \rho_1$  (tj. ilorazu modułów sprężystości stali i betonu pomnożonego przez stopień zbrojenia). Najmniejsze wartości stosunku  $y_{PN}/y_{exp}$  równe od 0,4 do 0,6 odnoszą się do belek o stopniu zbrojenia  $\rho_1 = 0,20-0,40\%$ . Belki te według normowego kryterium rozróżnienia faz pracują w fazie I<sub>a</sub> przy stopniu zaawansowania obciążenia  $m = 0,5-0,6$ . Wartość stosunku ugięć obliczonych do doświadczalnych zwiększa się wraz ze wzrostem stopnia  $\rho_1$  zbrojenia przekroju belek. Najlepszą zgodność wartości ugięć obliczonych i doświadczalnych uzyskano w przypadku belek o stopniu zbrojenia  $\rho_1 = 0,80-1,20\%$  i wyniki tych badań posłużyły do opracowania wzorów normowych.

Średnia wartość stosunku  $y_{PN}/y_{exp}$  wyniosła  $x_m = 0,919$  przy współczynniku zmienności  $v = 27,5\%$ .

Wartości stosunku  $y_{EC}/y_{exp}$  ugięć krótkotrwałych obliczonych według Eurokodu 2.1 do ugięć doświadczalnych (przedstawione na rysunku 13) są w przeważającej liczbie przypadków większe od jedności, co oznacza, że za pomocą metody przyjętej w Eurokocie 2.1 określa się obliczone wartości ugięć z pewnym zapasem w stosunku do wartości ugięć doświadczalnych, niezależnie od stopnia zbrojenia przekroju.

Średnia wartość stosunku  $y_{EC}/y_{exp}$  wyniosła  $x_m = 1,21$  przy współczynniku zmienności  $v = 22,6\%$ .

W rezultacie przeprowadzenia analizy korelacyjnej stosunków  $y_{PN}/y_{exp}$ ,  $y_{EC}/y_{exp}$  oraz iloczynu  $\alpha_e \rho_1$  otrzymano następujące równania prostych regresji:

- w przypadku metody PN-84/B-03264

$$\frac{y_{PN}}{y_{exp}} = 2,171 \alpha_e \rho_1 + 0,7225 \quad (7)$$

przy wartościach współczynnika korelacji  $R = 0,45$  i współczynnika regresji 0,76.

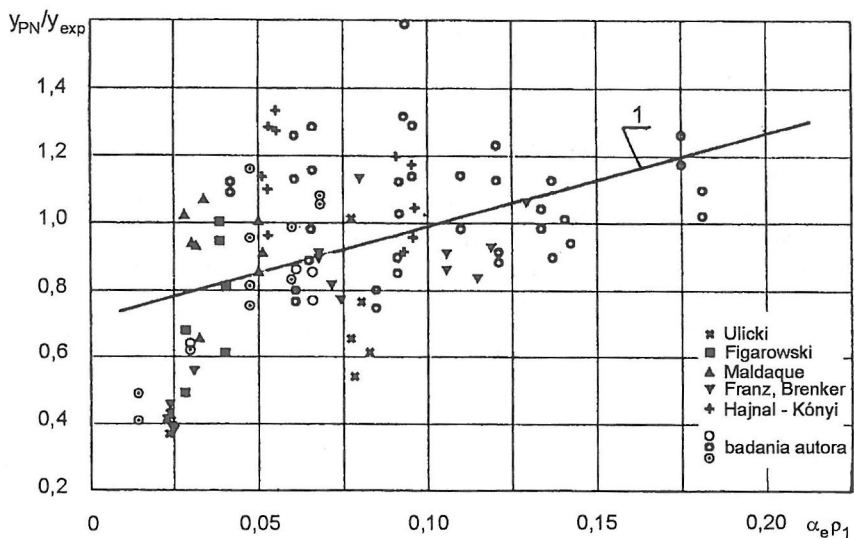
- w przypadku metody Eurokodu 2.1

$$\frac{y_{EC}}{y_{exp}} = -1,8372 \alpha_e \rho_1 + 1,3462 \quad (8)$$

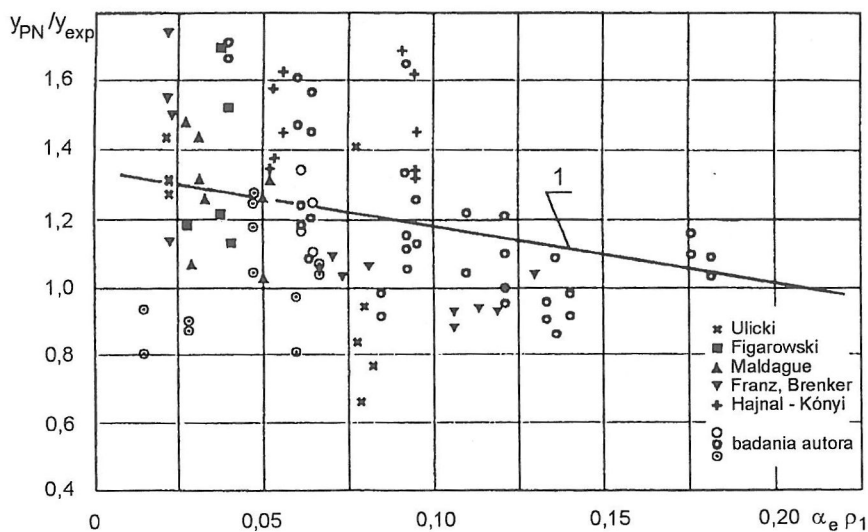
przy wartościach współczynnika korelacji  $R = 0,29$  i współczynnika regresji 1,32.

Proste regresji naniesiono na rysunki 12 i 13. Odmierne nachylenie prostych regresji w przypadku metody PN-84/B-03264 i metody Eurokodu 2.1 wynika z różnej oceny

wartości momentu rysującego, a zatem różnego oszacowania w obu metodach granicy między fazami I i II pracy belek żelbetowych w przedziale obciążeń eksploatacyjnych.



Rys. 12. Porównanie wartości ugięć krótkotrwałych, obliczonych według PN-84/B-03264, z wartościami ugięć doświadczalnych: 1 – prosta regresji określona równaniem (7)



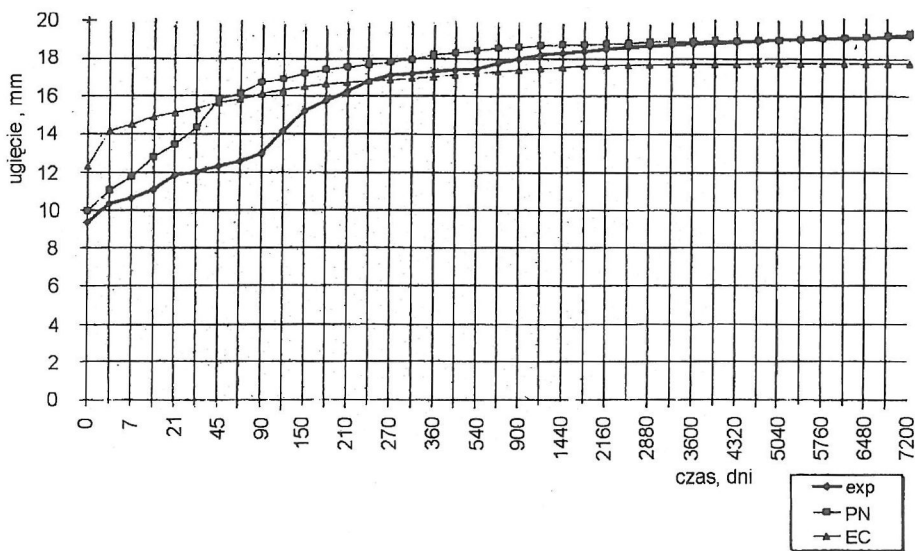
Rys. 13. Porównanie wartości ugięć krótkotrwałych obliczonych według Eurokodu 2.1 z wartościami ugięć doświadczalnych: 1 – prosta regresji określona równaniem (8)

### 7.3. Ugięcia pod obciążeniem długotrwałym

W pracy [14] przedstawiono wartości  $y_{exp}$  długotrwałych ugięć doświadczalnych w funkcji czasu działania obciążenia uzyskanych w wyniku przeprowadzonych przez autora badań 56 belek żelbetowych oraz wykonanych przez I.I. Ulickiego badań 10 belek. Wartości  $y_{exp}$  ugięć doświadczalnych są wartościami średnimi, określonymi na podstawie badań bliźniaczych o identycznych parametrach fizycznych i geometrycznych. Obliczenia wartości ugięć długotrwałych wykonano w funkcji czasu działania obciążenia:  $y_{PN}$  – według PN-84/B-03264 oraz  $y_{EC}$  – według Eurokodu 2.1.

Wartości  $y_{exp}$  ugięć doświadczalnych oraz wartości ugięć obliczeniowych  $y_{PN}$  i  $y_{EC}$ , zilustrowano graficznie na wykresach w funkcji czasu  $t$  działania obciążenia długotrwałego.

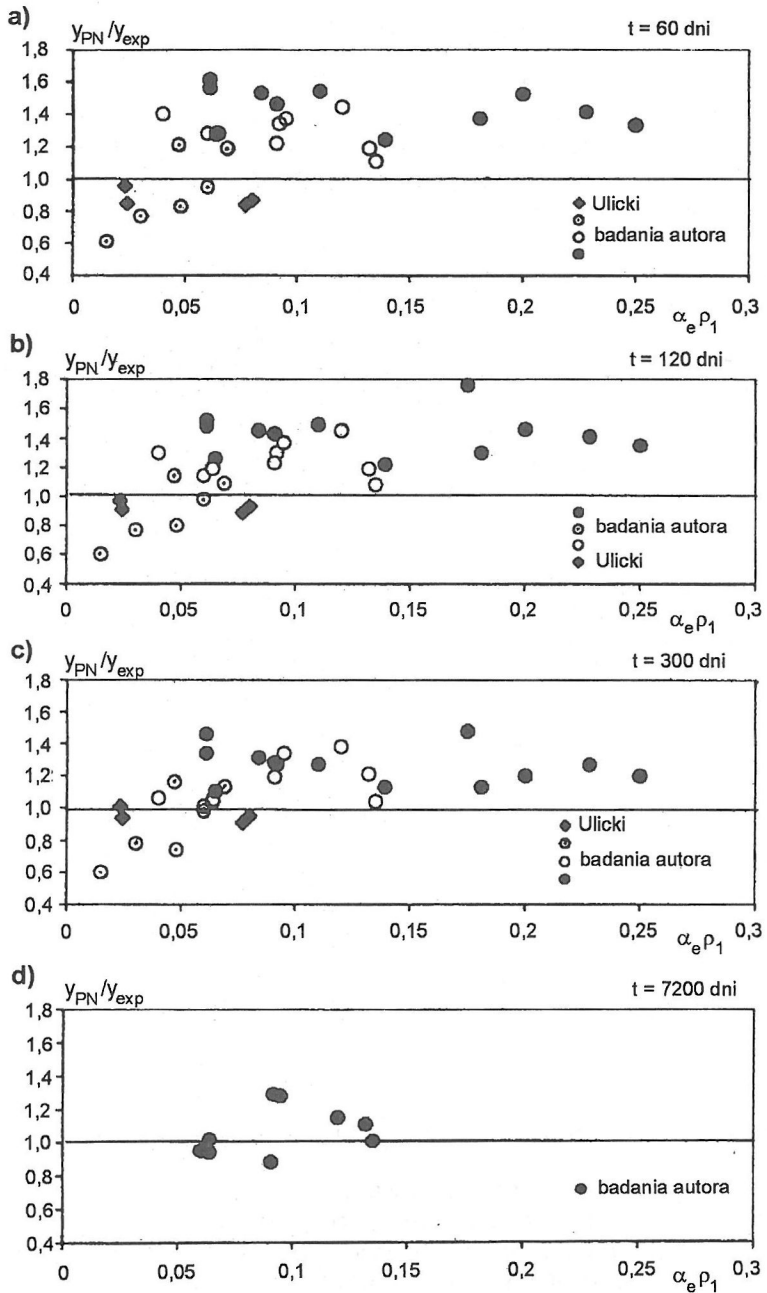
Na rysunku 14 przedstawiono przykładowo wykresy doświadczalnego i obliczeniowego ugięcia belek serii II-5 symetrycznie zbrojonych stalą klasy A-III, przy  $\rho_1 = \rho_2 = 0,84\%$  (z badań autora). Z wykresów ugięć w funkcji czasu działania obciążenia można stwierdzić, że zgodność ugięć doświadczalnych oraz obliczonych według PN-84/B-03264, a także według Eurokodu 2.1 rośnie wraz z upływem czasu działania obciążenia.



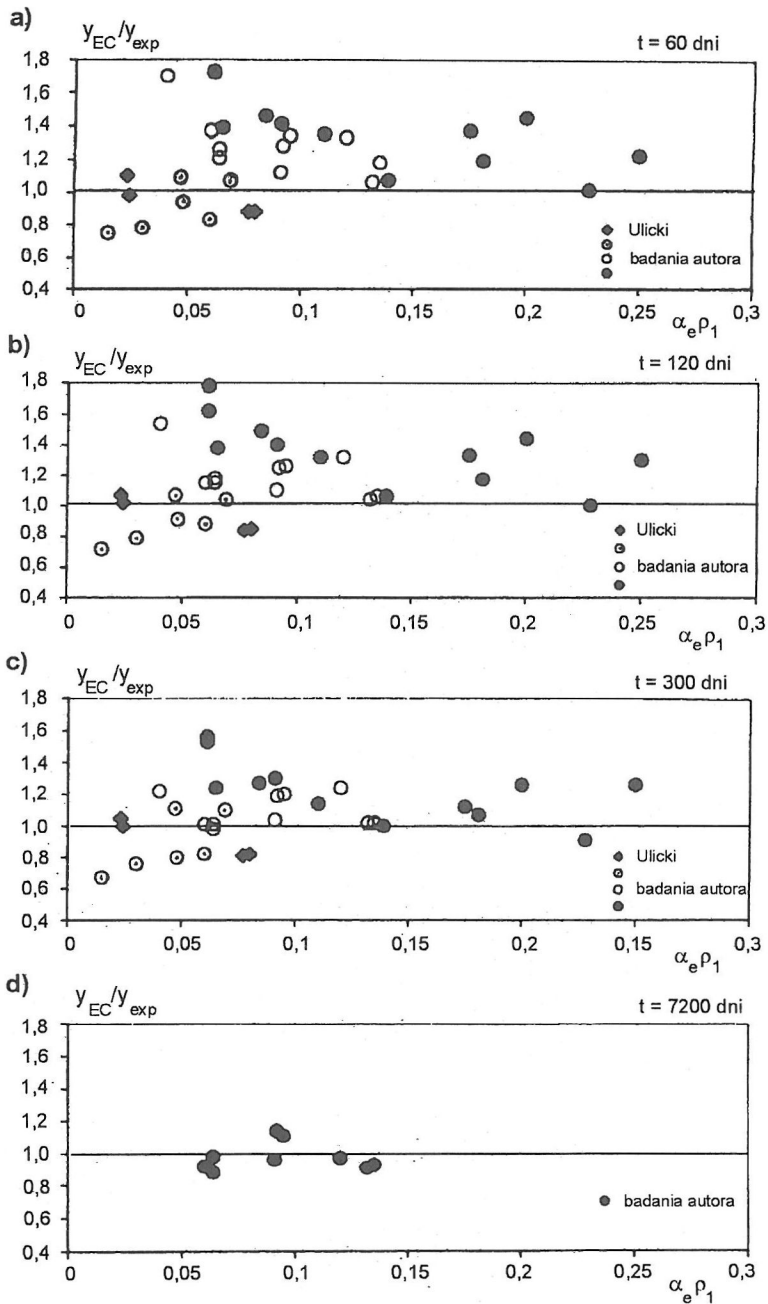
Rys. 14. Doświadczalne i obliczeniowe ugięcia belek serii II-5 (z badań autora)

Przedmiotem analizy porównawczej były wartości stosunku  $y_{PN}/y_{exp}$  oraz  $y_{EC}/y_{exp}$  ugięć długotrwałych w funkcji czasu działania obciążenia.

Na rysunku 15 przedstawiono wartości stosunku  $y_{PN}/y_{exp}$  ugięć długotrwałych obliczonych według PN-84/B-03264 do ugięć doświadczalnych rozpatrywanych belek żelbetowych w funkcji iloczynu  $\alpha_e \rho_1$ , uzyskane w czasie  $t$  działania obciążenia wynoszącego 60, 120, 300 i 7200 dni.



Rys. 15. Porównanie wartości ugięć długotrwałych obliczonych według PN-84/B-03264 z wartościami ugięć doświadczalnych, występujących w czasie: a – 60 dni, b – 120 dni, c – 300 i d – 7200 dni działania obciążenia



Rys. 16. Porównanie wartości ugięć długotrwałych obliczonych według Eurokodu 2.1 z wartościami ugięć doświadczalnych, występujących w czasie: a – 60 dni, b – 120 dni, c – 300 i d – 7200 dni działania obciążenia

Z obliczeń statystycznych otrzymano następujące wartości średnie  $x_m$  oraz współczynniki zmienności  $v$  tego stosunku:

$$t = 60 \text{ dni: } x_m = 1,24, v = 22,6\%$$

$$t = 120 \text{ dni: } x_m = 1,21, v = 21,3\%$$

$$t = 300 \text{ dni: } x_m = 1,12, v = 18,0\%$$

$$t = 7200 \text{ dni: } x_m = 1,07, v = 13,7\%.$$

Wartości stosunku  $y_{EC} / y_{exp}$  ugięć długotrwałych obliczonych według Eurokodu 2.1 do ugięć doświadczalnych, uzyskanych po upływie takiego samego czasu działania obciążenia przedstawiono na rysunku 16. Wartości średnie  $x_m$  i współczynniki zmienności tego stosunku wynoszą:

$$t = 60 \text{ dni: } x_m = 1,20, v = 21,6\%$$

$$t = 120 \text{ dni: } x_m = 1,17, v = 21,3\%$$

$$t = 300 \text{ dni: } x_m = 1,08, v = 19,1\%$$

$$t = 7200 \text{ dni: } x_m = 0,98, v = 9,1\%.$$

W wyniku statystycznej oceny wartości stosunku ugięć obliczonych do ugięć doświadczalnych (przedstawionej w tablicach pracy [14] z uwzględnieniem całego okresu prowadzenia badań poszczególnych typów belek) można stwierdzić, że zarówno metoda podana w PN-84/B-03264, jak i metoda przyjęta w Eurokodzie 2.1 wykazują podobnie dobrą zgodność przy oszacowaniu przyrostu ugięć belek żelbetowych w funkcji czasu działania obciążenia. Wartość średnia stosunku przyrostu ugięć długotrwałych do ugięć obliczonych uzyskana według obu metod w przypadku wszystkich analizowanych belek wynosi 1,03 przy współczynniku zmienności 20,4% według PN-84/B-03264 i 14,1% według Eurokodu 2.1.

## 8. Podsumowanie

Metody obliczania ugięć przyjęte w PN-84/B-03264 oraz w Eurokodzie 2.1 stanowią wyraz aktualnego stanu wiedzy w zakresie oceny ugięć zginanych elementów żelbetowych.

Obie metody określają średnie odkształcenia stali zbrojeniowej i betonu na odcinkach między rysami oraz uwzględniają wpływ pełzania betonu strefy ściskanej na przyrost ugięcia przy długotrwałym działaniu obciążenia. Krzywizna określana jest według obu metod z ogólnej zależności zachodzącej między promieniem krzywizny i średnimi odkształceniami skrajnych włókien zginanego przekroju żelbetowego.

Różnice między obiema metodami polegają na przyjęciu odmiennego rozkładu naprężeń w ściskanej strefie zarysowanego przekroju żelbetowego, odmiennego rozgraniczenia I i II fazy pracy elementu, sposobu uwzględnienia współpracy betonu ze zbrojeniem na odcinkach między rysami, a także wpływu pełzania betonu na przyrost ugięcia długotrwałego.

Wartości ugięć długotrwałych obliczone w funkcji czasu  $t$  działania obciążenia według PN-84/B-03264 oraz według Eurokodu 2.1 są większe od wartości ugięć doświadczalnych rozpatrywanych w analizie belek żelbetowych.

Ocena statystyczna stosunku ugięć obliczonych według PN-84/B-03264 oraz według Eurokodu 2.1 do ugięć długotrwałych, uzyskanych z badań 20 belek żelbetowych po

upływie około dwudziestu lat działania obciążenia (kiedy nastąpiła stabilizacja przyrostu ugięć) wykazała, że średnie wartości tych stosunków wynoszą: 1,07 w przypadku PN-84/B-03264 oraz 0,98 w przypadku Eurokodu 2.1, przy współczynnikach zmienności równych odpowiednio 13,7 i 9,1%.

Wielkości rozrzutów stosunku obliczonych ugięć długotrwałych do ugięć doświadczalnych, scharakteryzowane współczynnikiem zmienności w odniesieniu do obu metod, maleją razem ze wzrostem czasu działania obciążenia.

Otrzymana wartość współczynnika zmienności nie wydaje się wysoka, biorąc pod uwagę fakt, że analiza porównawcza obejmuje wyniki badań uzyskane w różnych laboratoriach, a współczynnik zmienności wytrzymałości betonu na rozciąganie, mającej duży wpływ na sztywność belki zarysowanej, jest zwykle rzędu 20%.

Z przedstawionych analiz wynika więc, że przy ocenie stanu użyteczności zginanych elementów żelbetowych obie metody obliczania ugięć belek pod obciążeniem długotrwałym można uznać za równorzędne.

## Literatura i dokumenty

- [1] PN-B-03264:1999. Konstrukcje betonowe, żelbetowe i sprężone. Obliczenia statyczne i projektowanie. Norma ustanowiona przez Polski Komitet Normalizacyjny w styczniu 1999 r.
- [2] Eurocode 2: Design of concrete structures – Part 1: General rules and rules for buildings. European Standard EN 1992-1-1 (1 st draft). Brussels, March 1999
- [3] Kubicki J.: Uogólnienie normowej metody obliczania ugięć belek żelbetowych. XVIII Konferencja Naukowa Komitetu Inżynierii PAN i Komitetu Nauki PZITB. Krynica 1972
- [4] Maney G.A.: Relation Between Deformations and Deflections in Reinforced Concrete Beams, ASTM Proceedings 14, part II, 1914
- [5] Swain G.F.: Structural Engineering, Strength of Materials. Mc Graw-Hill Book Co., New York 1924
- [6] Leonhardt F.: Anfängliche und nachträgliche Durchbiegungen von stahlbetonbalken im Zustand II. *Beton und Stahlbetonbau*, 10, 1959
- [7] Ulicki I.I., Meteliuk N.S., Reminieć G.M.: Żostkost' izgibajemych żelezobietonnych elementow. Gostrojizdat USSR, Kijew 1963
- [8] Yu W.W., Winter G.: Instantaneous and Long-Time Deflections of Reinforced Concrete Beams Under Working Loads. *Journal of the American Concrete Institute*, July 1960
- [9] Mayer H.: Die Berechnung der Durchbiegung von Stahlbetonbauteilen. Deutscher Ausschuss für Stahlbeton, Heft 194, Berlin 1967
- [10] Niemirowski J.M., Nikitin N.W.: O koeficientie  $\psi$  dla rasczota żostkosti żelezobietonnych elementow. *Bieton i żelezobieton*, 2, 1958
- [11] Lewicki B., Kubicki J.: Obliczanie ugięć konstrukcji żelbetowych pod obciążeniem długotrwałym według metody prof. I.I. Ulickiego, *Inżynieria i Budownictwo*, 11, 1963
- [12] Branson D.E.: Deformation of Concrete Structures. Mc Graw-Hill International Book Company, New York 1977
- [13] Comité Euro-International du Béton: CEB-FIP Model Code for Concrete Structures. CEB-FIP International Recommendations, 3rd Edition 1978

- [14] Kubicki J.: Ugięcie belek żelbetowych jako funkcja czasu w świetle wzorów normowych i wyników badań. Rozprawa doktorska. Instytut Techniki Budowlanej, Warszawa 1998, Biblioteka ITB
- [15] Figarowski W.W.: Uwieliczenie progibow żelzobietonnych bałok pri dlitielnom diejstwwi nagruzki. *Bieton i Żelzobieton*, 11, 1962
- [16] Maldague J.C.: Détermination expérimentale des lois moments-courbures des poutres en béton armé. *Annales de l'Institut Technique du Bâtiment et des Travaux Publics*, No 209, Mai 1965
- [17] Franz G., Brenker H.: Verformungsversuche an Stahlbetonbalken mit hochfestem Bewehrungsstahl. Deutscher Ausschuss für Stahlbeton. Berlin 1967
- [18] Hajnal-Kónyi K.: Test on beams with sustained loading. *Magazine of Concrete Research*, V 15, No 43, March 1963
- [19] Kubicki J.: Ugięcia belek żelbetowych pod obciążeniem długotrwałym – dostosowanie PN do ustaleń zachodnioeuropejskich. Praca naukowo-badawcza nr SK(1) 2.1.3.1.d/NK-22/92. Instytut Techniki Budowlanej, Warszawa 1992, Biblioteka ITB

DEFLECTIONS OF REINFORCED CONCRETE BEAMS CALCULATED ACCORDING  
TO PN-84/B-03264 AND EUROCODE 2.1 METHODS IN COMPARISON  
WITH TEST RESULTS

Summary

Deflections of reinforced concrete beams, calculated according to methods recommended in Polish standard PN-84/B-03264 and in Eurocode 2.1, are compared with theoretical values and test results. The comparison considers a large set of test results on simply supported, rectangular beams under short-term and long-term loading, coming from six different laboratories. The results of comparison are given in several figures represent the ratios, for both method of calculated short-term or long-term deflection to actual measured, experimental deflection. It can be concluded, that both methods may be used as equivalent to checking limit state of deformation for r.c. elements subjected to bending.

*Praca wpłynęła do Redakcji 10 VIII 1999*