

BADANIA I STUDIA – RESEARCH AND STUDIES

Wojciech Kukulski\*

## OBLICZANIE SMUKŁYCH ELEMENTÓW ŻELBETOWYCH

W artykule omówiono warunki, w jakich – w myśl normy amerykańskiej, CEB/FIP Model Code, Eurokodu 2 oraz normy polskiej – przy obliczaniu nośności smukłych słupów żelbetowych można pominąć wpływ efektów drugiego rzędu, a następnie podano sposób obliczania nośności smukłych słupów żelbetowych według ww. norm. Szczególną uwagę poświęcono wpływowi, jaki na sztywność słupów wywiera współpraca rozciąganego betonu na odcinkach między rysami. Wyniki obliczeń nośności słupów porównano z wynikami badań Tala i Czysziakowa [9], które posłużyły do kalibracji wzorów podanych w normach polskich. Zaproponowano poprawkę do wzoru na  $N_{crit}$ , przybliżającą zgodność z wynikami badań dotyczącymi obliczeń nośności słupów silnie zbrojonych.

### 1. Uwagi wstępne

Postanowienia projektu PrPN-B-03264 dotyczące określania nośności elementów smukłych w niewielkim tylko stopniu różnią się od postanowień PN-84/B-03264 [1]. Wprowadzone zmiany polegają głównie na obniżeniu smukłości, przy której jej wpływ na nośność elementów może być w obliczeniach pomijany, oraz usunięcia uproszczonego wzoru na siłę krytyczną.

O tak małych zmianach i niewprowadzaniu do projektu PN98 [2] szeregu postanowień EC2 zadecydowały następujące czynniki:

- Duże prawdopodobieństwo, że postanowienia dotyczące słupów smukłych podane w obecnej wersji EC2 ulegną w jego wersji końcowej wielu modyfikacjom. Obecna wersja EC2 wzorowana jest – jak wiadomo – na MC78 [3], natomiast jego wersja końcowa będzie zapewne uwzględniać szereg zmian wprowadzonych do wydanego w międzyczasie MC90 [4], w związku z czym wprowadzenie do PN98 dość ostro krytykowanych postanowień związanych z projektowaniem słupów smukłych, zawartych w obecnej wersji EC2, może spowodować, że za kilka lat, w następnym wydaniu PN, która będzie dosłownym przekładem końcowej wersji EC2, wyniknie konieczność ich zmiany.

- Fakt, że z podanych w EC2 trzech metod obliczania nośności elementów smukłych pierwsze dwie nie mogą być stosowane bez posługiwania się komputerem, natomiast metoda trzecia, którą można stosować bez użycia komputera, jest metodą bardzo upro-

\*doc. dr inż.

szczoną, z której według EC2 należy korzystać tylko w przypadkach, gdy obliczenia dokładne nie są niezbędne.

- Występowanie w p. 4.3.5 i w Załączniku 3 do EC2 postanowień sformułowanych w sposób bardzo ogólny, jak np. „uwzględnianie wpływu pełzania jest konieczne, jeżeli może ono w sposób znaczący obniżyć stateczność konstrukcji”. W naszych normach nie mamy zwyczaju formułowania wymagań w sposób tak ogólny i w związku z tym w PN98 niezbędne byłoby uzupełnienie ich odpowiednimi warunkami liczbowymi.

Szerokie omówienie postanowień EC2 dotyczących elementów smukłych, łącznie z przykładami obliczeń, zostało zamieszczone w pracy [5].

## 2. Pomijanie wpływu smukłości

Norma PN84 zezwala na pomijanie w obliczeniach wpływu efektów drugiego rzędu do smukłości krytycznej  $\lambda_{crit,1} = 35$ . W projekcie PN 98, wzorując się na EC2, smukłość tę zmniejszono do  $\lambda_{crit,1} = 25$ . Nie uwzględniono natomiast pozostałych dwóch warunków z EC2, pozwalających na przyjmowanie w obliczeniach większych smukłości krytycznych w przypadku gdy:

- słupy występujące w ustrojach nieprzesuwanych obciążone są jedynie siłą podłużną, która przyłożona jest na końcach słupów z niejednakowymi mimośrodami  $e_{01} \neq e_{02}$ ; w takim przypadku smukłość krytyczną można według EC2 podwyższyć do wartości

$$\lambda_{crit,2} = \lambda_{crit,1} \left( 2 - \frac{e_{01}}{e_{02}} \right) = 25 \left( 2 - \frac{e_{01}}{e_{02}} \right) \quad (1)$$

z tym że  $|e_{01}| \leq |e_{02}|$ ;

- względna wartość działającej na słup siły podłużnej, odpowiadającej ilorazowi

$v_u = \frac{N_{Sd}}{f_{cd} A_c}$ , nie przekracza wartości 0,36; w takim przypadku smukłość krytyczną można

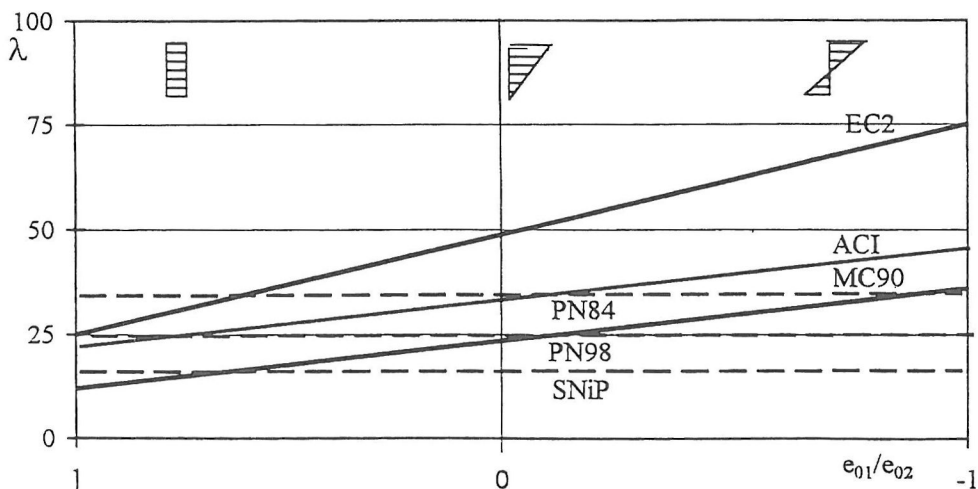
według EC2 zwiększyć do

$$\lambda_{crit,3} = \frac{15}{\sqrt{v_u}} \leq 50 \quad (2)$$

W projektowaniu przyjmuje się większą z tych dwóch wartości,  $\lambda_{crit}$ .

Należy tu odnotować, że przyjęta w EC2 wartość  $\lambda_{crit,1} = 25$ , zgodna z podaną w MC78, została w MC90 obniżona do 12, a współczynnik 15 występujący we wzorze (2) został zmniejszony do 7,5. W normie ACI318 [6] przyjęto  $\lambda_{crit,1} = 22$  oraz podano także wzór (1). W normie SNIp84 [7] przyjęto  $\lambda_{crit,1} = 14$ , a więc prawie na poziomie MC90, nie pozwalając przy tym na żadne zwiększanie smukłości krytycznej w przypadkach, gdy zgodnie z EC2 i MC90 mogą być przyjmowane  $\lambda_{crit,2}$  i  $\lambda_{crit,3}$ .

Podane w wymienionych normach smukłości  $\lambda_{crit,1}$  i  $\lambda_{crit,2}$  przedstawione są w funkcji stosunku  $e_{01} / e_{02}$  na rysunku 1. Jak widać z rysunku, w przypadku gdy słup obciążony jest na końcach z mimośrodami o tej samej wielkości, lecz o znakach przeciwnych wartości  $\lambda_{crit,2}$ , rośnie trzykrotnie w stosunku do  $\lambda_{crit,1}$  i osiąga według EC2 wartość 75, według ACI 318 wartość 46 oraz według MC90 wartość 36.



Rys. 1. Wartości graniczne  $\lambda_{crit,2}$  dla słupów z różnymi wartościami mimośrodków na końcach według EC2, ACI i MC90 oraz  $\lambda_{crit,1}$  według PN84, PN98 i SNiP

W pracy [8] podano procentowe oszacowanie różnicy między siłami niszczącymi, wyznaczonymi bez uwzględnienia i z uwzględnieniem wpływu smukłości dla  $\lambda_{crit,1}$ , podawanych przez różne normy. Z tego oszacowania, dokonanego dla słupów z betonu B30 zbrojonych stalą 34GS, którego rezultaty przedstawione są w tabelcy 1, wynika że dopuszczony nadmiar nośności dla słupów o  $\lambda_{crit,1}$ , projektowanych bez uwzględniania wpływu smukłości, zależy w dużej mierze (jak można było przypuszczać) od stopnia zbrojenia, oraz że dla podanej w PN84 wartości  $\lambda_{crit,1} = 35$  i minimalnego stopnia zbrojenia przekracza on 30%. Obniżenie w PN98 dotychczasowej smukłości granicznej do podanej w EC2 wartości 25 było więc absolutnie konieczne.

Tabela 1. Nadmiar w ocenie nośności słupów przy pomijaniu wpływu smukłości wyznaczony dla  $\lambda_{crit,1}$  według różnych norm (wyrażony w procentach)

$\mu$	$\frac{e_0}{h}$	MC (12)	SNiP (14)	DIN (20)	ACI (22)	EC2 (25)	PN (35)
0,0030	0,4	4,3	5,7	11,1	12,7	15,9	33,4
	0,6	8,1	10,2	16,5	18,0	21,7	32,0
	0,8	5,6	6,9	10,6	11,7	13,6	19,4
0,0060	0,4	2,5	3,4	6,6	7,7	10,1	19,9
	0,6	4,5	5,9	11,7	13,7	16,7	26,6
	0,8	4,8	6,1	9,8	11,0	12,9	19,1
0,0200	0,4	1,0	1,4	2,9	3,2	3,6	9,1
	0,6	1,4	1,8	3,0	4,0	5,5	10,4
	0,8	1,5	2,0	3,6	4,4	5,6	10,6

UWAGA: W nagłówku tabelcy, pod symbolami norm, zamieszczone są w nawiasach wartości  $\lambda_{crit,1}$  podawane w poszczególnych normach.

Obniżeniu temu nie towarzyszyło natomiast wprowadzenie do PN98 wartości  $\lambda_{crit, 2}$  i  $\lambda_{crit, 3}$  określanych wzorami (1) i (2), uzasadnione małym znaczeniem praktycznym tych wzorów wobec powszechnego wykonywania obliczeń przy pomocy komputerów. Wzór (2) ma jednak swoich zwolenników i nic nie stoi na przeszkodzie, aby wprowadzić go do projektu normy. Z przeprowadzonych szacunków wynika, że dopuszczany przez ten wzór nadmiar nośności dla słupów z niejednakowymi mimośrodami zbliżony jest do nadmiaru otrzymywanego przy  $\lambda_{crit, 1}$  dla jednakowych mimośrodów.

### 3. Smukłość obliczeniowa

Ogólne zasady określania smukłości obliczeniowej słupów podane w EC2 i w PN98 są identyczne. W Eurokodzie 2 nie przewiduje się uwzględnienia przy określaniu długości obliczeniowej możliwości niejednoczesnej utraty stateczności przez słupy występujące w układach ramowych, tak jak to dopuszczała norma PN84, w związku z tym w PN98 nie zamieszczono już tego dopuszczenia i w załączniku C (tabl. C.1) pominięto redukcję smukłości w zależności od liczby współpracujących słupów.

Wzory do obliczania wartości  $\beta$  służących do określania długości obliczeniowych słupów ram, podane w PN98 w tabelicy C.2, utrzymano w dotychczasowej postaci. Dają one wartości  $\beta$  dość bliskie otrzymywanym z nomogramów zamieszczonych w EC2, a przy tym mogą być – w przeciwieństwie do nomogramów – wprowadzane bezpośrednio do programów komputerowych.

### 4. Obliczanie nośności słupów

#### 4.1. Projekt PN-B-03264

W projekcie utrzymano stosowaną dotychczas metodę uwzględniania wpływu smukłości na nośność słupów. Dokonane w PN98 zmiany, polegające na obniżeniu obliczeniowych wytrzymałości betonu na ściskanie  $f_{cd}$ , wprowadzeniu współczynnika  $\alpha = 0,85$  obniżającego wytrzymałość betonu oraz podwyższeniu średniego modułu sprężystości betonu  $E_{cm}$  nie spowodowały istotnych różnic między nośnościami słupów określanymi według PN84 i PN98. Jak widać na rysunkach 2 i 3, nośności wyznaczone na podstawie PN84 są nawet przy wysokim stosunku  $l_0 / h = 30$  tylko o parę procent niższe od nośności określanych według PN84.

Jak wiadomo, w metodzie PN84 przyjmowana do obliczeń wielkość mimośrodu  $e_{tot}$ , odpowiadającego sumie mimośrodu początkowego  $e_0$  i mimośrodu drugiego rzędu  $e_2$  równego ugięciu słupa, określana jest z iloczynu

$$e_{tot} = \eta e_0 \quad (3)$$

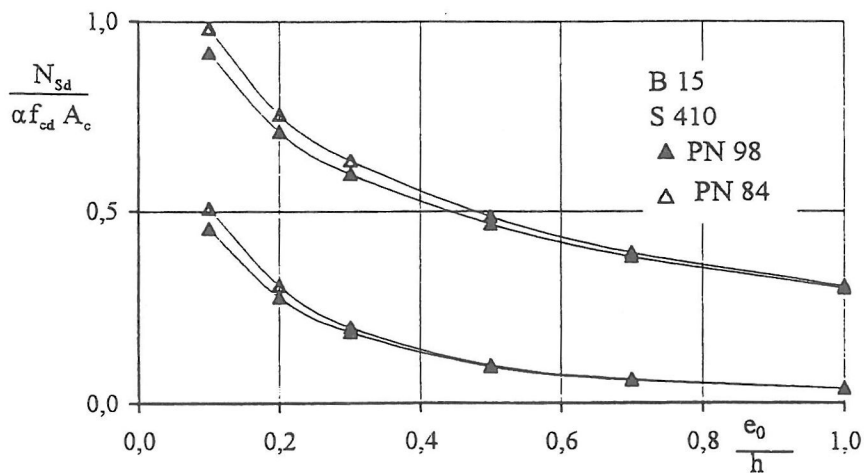
w którym

$$\eta = \frac{1}{1 - \frac{N_{Sd}}{N_{crit}}} \quad (4)$$

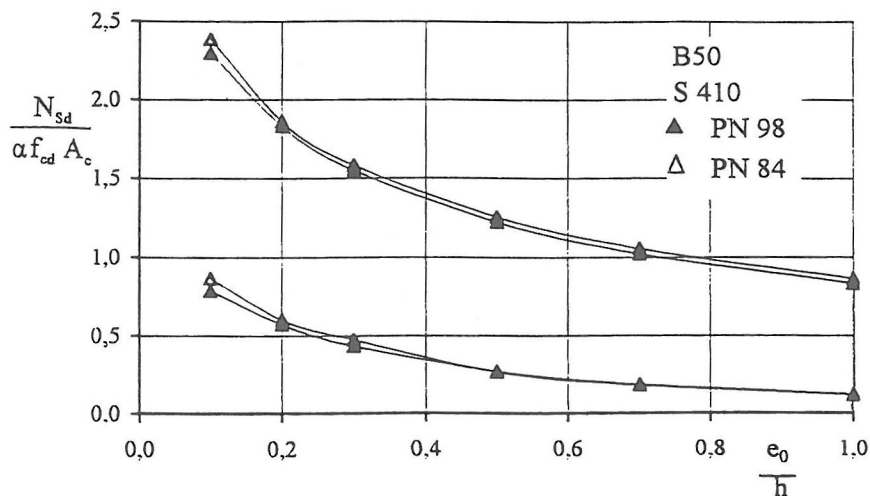
Występująca w tym wzorze siła krytyczna  $N_{crit}$ , wykalibrowana na podstawie wyników badań przeprowadzonych przez autorów metody Tala i Czistiakowa [9], ma postać

$$N_{crit} = \frac{8}{l_0^2} \left[ \frac{E_c I_c}{k_d} \left( \frac{0,11}{0,1 + \frac{e_0}{h}} + 0,1 \right) + E_s I_s \right] \quad (5)$$

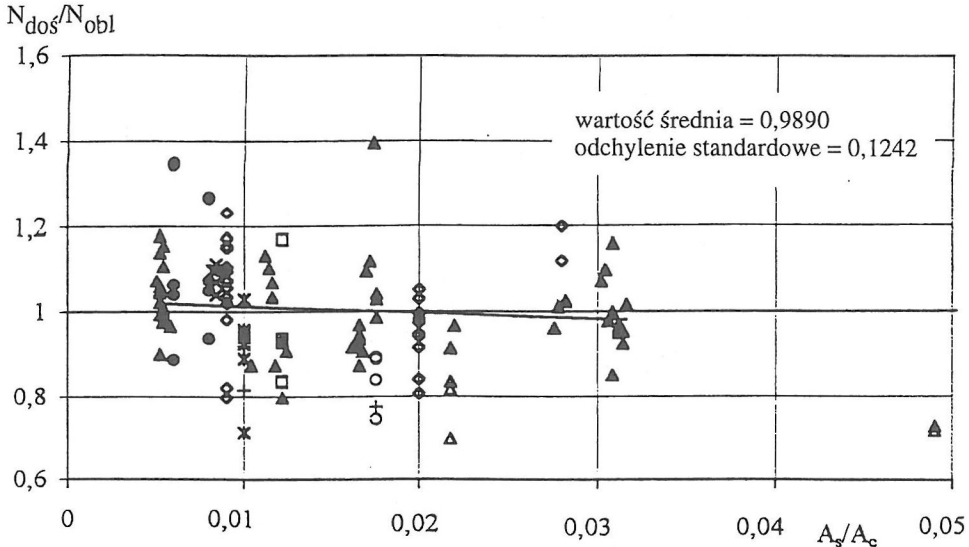
Natomiast w wersji normowej przyjęto – zamiast występującego na początku tego wzoru współczynnika 8 – współczynnik 6,4 w celu obniżenia wartości  $N_{crit}$  o 20%.



Rys. 2. Porównanie nośności słupów obliczonych według PN84 i PN98, beton B15



Rys. 3. Porównanie nośności słupów obliczonych według PN84 i PN98, beton B50



Rys. 4. Porównanie nośności słupów obliczonych według PN98 z wynikami badań przeprowadzonych przez Baumanną – ●, Changa i Fergusona – ○, Ernsta, Hromadika i Rivelanda – □, Gaedego – ✕, Gehlera i Hüttera – ◇, Hansona i Rosenströma – x, Rambolla – +, Tala i Czi-stiakowa – ▲, Thomasa – △

Jak widać z rysunku 4, wzór (5) prowadzi do bardzo dobrej zgodności doświadczalnych i teoretycznych nośności słupów, badanych nie tylko przez twórców metody, lecz także przez Baumanną [10], Changa i Fergusona [11], Ernsta, Hromadika i Rivelanda [12], Gaedego [13], Gehlera i Hüttera [14], Hansona i Rosenströma [15], Rambolla [16] oraz Thomasa [17].

## 4.2. Eurokod 2

Według EC2 do obliczania nośności smukłych słupów żelbetowych mogą być stosowane trzy metody:

- metoda ogólna,
- metoda słupa modelowego,
- uproszczona wersja metody słupa modelowego.

**Metodę ogólną** zdefiniowano w Załączniku 3 do EC2 jako metodę opartą na analizie nieliniowej przy stosowaniu „odpowiednich modeli projektowych konstrukcji”, dodając przy tym, że w metodzie tej przy wyznaczaniu ugięć elementów powinno się uwzględniać współpracę betonu i stali na odcinkach między rysami, nazywaną w literaturze angielskiej efektem „tension stiffening”.

W EC2 nie zdefiniowano więc tej metody w sposób jednoznaczny. Można przyjąć, że jest to metoda, w której nie zakłada się z góry postaci odkształconej słupa, lecz wyznacza się ją na podstawie odkształceń skrajnych przekrojów elementu, zmieniających się na jego długości odpowiednio do zmieniającego się nieliniowo rozkładu naprężeń w jego przekrojach.

Podstawowa trudność przy posługiwaniu się tą metodą polega na tym, że nośność elementu może zostać wyczerpana albo na skutek materiałowego zniszczenia przekroju najbardziej wyjątkowego – przy osiągnięciu przez stal i/lub beton odkształceń granicznych, albo na skutek wcześniejszej utraty przez element równowagi statecznej. Powoduje to, że obliczenia muszą być prowadzone metodą przyrostową siły  $N$ , z iteracyjnym uzgadnianiem wyników na każdym poziomie siły, aż do osiągnięcia przez nią wartości maksymalnej, przy nieznanymi z góry wartościach odkształceń skrajnych najbardziej wyjątkowego przekroju elementu. Rozwiązanie zadania polega na znalezieniu takiej pary sił  $N_{Rd}$  i  $M_{Rd}$ , przy której ugięcie końców słupa obciążonych z mimośrodkami  $e_0$  jest równe zeru.

W „Podręczniku” [18] jako przykład metody ogólnej podano metodę różnic skończonych, która po raz pierwszy zastosowana została do określania nośności słupów żelbetonowych przez A. Habela [19]. Autor referatu dostosował metodę Habela do ustaleń EC2 przez wprowadzenie do niej zależności  $\sigma - \epsilon$ , opisanej w Eurokodzie za pomocą wzoru (4.2), oraz uwzględnienie wpływu „tension stiffening” przy zastosowaniu podejścia zaproponowanego przez Quasta [20], polegającego na wprowadzaniu w zarysowanej części przekroju równomiernie rozłożonych fikcyjnych naprężeń rozciągających w betonie, malejących w miarę wzrostu naprężeń w zbrojeniu i przy naprężeniach w stali równych granicy plastyczności i spadających do zera.

Z przeprowadzonych obliczeń wynika, że wielkości sił powodujących wyczerpanie nośności słupa, wyznaczone za pomocą opisanej metody ogólnej, bez uwzględnienia efektu „tension stiffening”, są zbliżone do sił określanych metodą słupa modelowego, natomiast przy uwzględnieniu tego efektu ich wzrost zależy od stopnia zbrojenia i uwiadczenia się wyraźnie przy zbrojeniu słabym.

**Metoda słupa modelowego**, zaliczona w EC2 do metod uproszczonych, dotyczy jedynie słupów pryzmatycznych o stałym przekroju betonu i stali, podlegających działaniu momentów zginających pierwszego rzędu, zmieniających się liniowo na długości słupa, a więc obciążeniem słupa mogą być jedynie siła podłużna i momenty przyłożone na jego końcach.

Uproszczenie polega na przyjęciu, że kształt linii ugięcia słupa jest znany, co pozwala sprowadzić analizę słupa do analizy najbardziej wyjątkowego jego przekroju i uniknąć całkowania wzdłuż elementu.

Całkowity mimośród  $e_{tot}$  siły podłużnej w przekroju najbardziej wyjątkowym odpowiada sumie

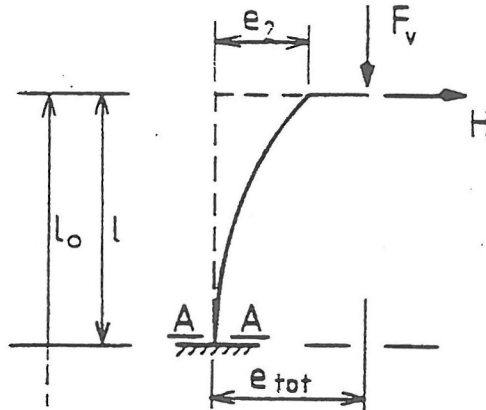
$$e_{tot} = e_0 + e_a + e_2 \quad (6)$$

gdzie:  $e_0$  – mimośród pierwszego rzędu:  $e_0 = \frac{M_{Sd,1}}{N_{Sd,1}}$ ,

$e_a$  – mimośród (nie zmierzony mimośród przypadkowy),

$e_2$  – mimośród drugiego rzędu wyznaczany za pomocą podanych niżej metod przybliżonych.

„Słup modelowy” jest według definicji podanej w EC2 słupem wspornikowym, zamocowanym u podstawy i swobodnym na górnym końcu (rys. 5), o krzywiźnie wywołanej działaniem sił dających największy moment u jego podstawy.



Rys. 5. Schemat słupa modelowego

Do określenia maksymalnego ugięcia słupa, które stanowi mimośród drugiego rzędu  $e_2$ , służy wzór

$$e_2 = K_1 \frac{l_0}{10} \frac{1}{r} \quad (7)$$

w którym:

$\frac{1}{r}$  – krzywizna w przekroju krytycznym, u podstawy słupa wyznaczona z warunków równowagi sił wewnętrznych i zewnętrznych,

$K_1$  – współczynnik, którego zadaniem jest zachowanie ciągłości wzoru (7) przy przejściu z obszaru niskich smukłości, dla których wpływ efektów drugiego rzędu może być w obliczeniach pomijany, do obszaru w którym należy uwzględnić go w obliczeniach. Współczynnik ten przybiera następujące wartości:

– dla  $15 \leq \lambda \leq 35$  jest

$$K_1 = \frac{\lambda}{20} - 0,75$$

– dla  $\lambda > 35$  przyjmuje się natomiast  $K_1 = 1,0$ .

Krzywiznę  $\frac{1}{r}$  w przekroju u podstawy słupa wyznaczać należy z wzoru

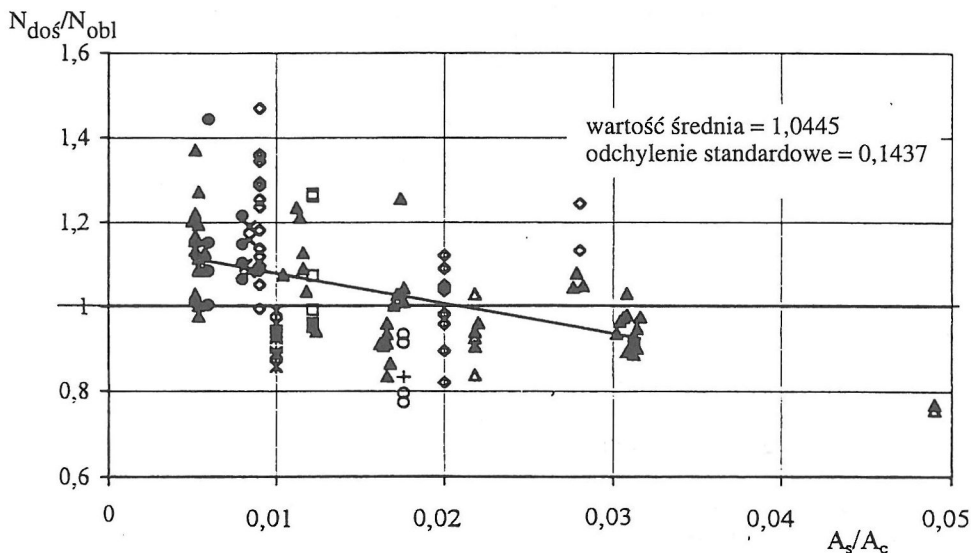
$$\frac{1}{r} = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{h} \quad (8)$$

w którym  $\varepsilon_1$  i  $\varepsilon_2$  są odkształceniami krawędziowymi przekroju, doprowadzając do równowagi sił wewnętrznych i zewnętrznych. W celu wyznaczenia krzywizny  $1/r$  musi być stosowana – tak jak w metodzie ogólnej – metoda przyrostowa z iteracyjnym uzgadnianiem wyników, a uproszczenie polega na ograniczeniu analizy jedynie do przekroju utwierdzenia słupa.



W EC2 ograniczono stosowanie metody słupa modelowego do elementów o smukłości  $\lambda < 140$  i o przekroju prostokątnym lub kołowym, obciążonych z mimośrodem początkowym  $e_0 > 0,1 h$ .

Jak widać z rysunku 6, metoda słupa modelowego daje prawie tak samo dobrą zgodność z wynikami badań, jak nasza metoda normowa przy stosowaniu wzoru (5). Z rysunku widać wyraźnie, że metoda ta prowadzi do oszacowania nośności słupów o niskim stopniu zbrojenia z niedomiarem rzędu 15%, co wynika z pomijania w niej wpływu, jaki na ugięcia słupów ma współpraca zbrojenia z betonem na odcinku między rysami i co można jednocześnie traktować jako dowód na występowanie efektu „tension stiffening” w słupach o słabym zbrojeniu.



Rys. 6. Porównanie nośności słupów obliczonych wg EC2 metodą słupa modelowego z wynikami badań (oznaczenia wyników badań jak na rys. 4)

Uproszczona wersja metody słupa modelowego, która według EC2 może być stosowana w tych przypadkach, „w których duża dokładność nie jest wymagana”, pozwala do wzoru (7) podstawiać krzywiznę u podstawy słupa wyznaczoną bez iteracyjnego uzgadniania odkształceń krawędziowych przekroju, posługując się wzorem

$$\frac{1}{r} = \frac{2 K_2 \varepsilon_{yd}}{0,9 d} \quad (9)$$

w którym:

$\varepsilon_{yd}$  – odkształcenie odpowiadające granicy plastyczności stali zbrojeniowej równe  $\frac{f_{yd}}{E_s}$ ,

$d$  – wysokość użyteczna przekroju mierzona w kierunku spodziewanego ugięcia słupa,

$K_2$  – współczynnik uwzględniający zmniejszenie krzywizny  $1/r$  przy wyższych wartościach siły osiowej, obliczany z wzoru

$$K_2 = \frac{N_{ud} - N_{Sd}}{N_{ud} - N_{bal}} \quad (10)$$

gdzie:  $N_{ud}$  – nośność obliczeniowa przekroju poddanego działaniu samej tylko siły osiowej; można przyjmować ją jako równą  $\alpha f_{cd} + f_{yd} A_s$ ,

$N_{Sd}$  – obliczeniowa siła osiowa,

$N_{bal}$  – siła, przy której moment zginający osiąga wartość maksymalną; dla symetrycznie zbrojonego przekroju prostokątnego można przyjmować  $N_{bal} = 0,4 f_{cd} A_c$ .

Jako oszacowanie bezpieczne przyjmować można zawsze  $K_2 = 1,0$ .

W metodzie tej nośność słupa wyznacza się przy założeniu materiałowego zniszczenia przekroju krytycznego, nie uwzględniając – tak jak w poprzednich metodach – możliwości wyczerpania nośności słupa na skutek utraty stateczności. Dzięki temu w obliczeniach przeprowadzonych tą metodą można korzystać z wzoru na nośność przekroju mimośrodkowo ściskanego, co jest dużym ułatwieniem praktycznym.

Według EC2 uwzględnianie wpływu pęcznienia betonu wywołanego długotrwałym działaniem obciążenia jest konieczne, jeśli powoduje ono wzrost momentów zginających, obliczonych według teorii pierwszego rzędu, o więcej niż 10%. Dopuszczane są różne metody jego uwzględniania w obliczeniach, z tym że w EC2 nie wskazano żadnej z nich i podano jedynie wzór na zredukowaną wartość modułu sprężystości  $E_{eff}$ , zależną od współczynnika pęcznienia.

Warto więc odnotować, że w podręczniku [21], w części dotyczącej EC2, jej autor H.U.Litzner, kierujący pracami nad EC2, zastosował w przykładzie obliczeń uproszczoną metodę uwzględniania wpływu pęcznienia, polegającą na mnożeniu długości obliczeniowej  $l_0$  słupa przez współczynnik

$$\eta_\varphi = \sqrt{1 + \frac{M_{Sg}}{M_{Sd}}} \quad (11)$$

co powoduje zwiększenie w obliczeniach ugięcia słupa (w przykładzie obliczeń podanym przez Litznera współczynnik  $\eta_\varphi$  pomnożony został przez imośród dodatkowy  $e_a$ ). Sposób ten jest stosowany w naszej normie do uwzględnienia wpływu obciążeń długotrwałych na nośność elementów niezbrojonych.

### 4.3. CEB/FIP Model Code 90

Opisane wyżej trzy metody określania nośności słupów smukłych, podane w EC2, zaczerpnięte zostały z MC78. W nowszym wydaniu MC90 [3] do metody słupa modelowego w obydwu jej wersjach – podstawowej i uproszczonej – wprowadzono natomiast pewne korekty we wzorach na mimośród drugiego rzędu  $e_2$  oraz na krzywiznę  $1/r$  przyjmowaną w wersji uproszczonej.

Podany wyżej wzór (7) zapisany został w MC90 w postaci

$$e_2 = K_1 \frac{l_0^2}{10} \left( \frac{1}{r_{tot}} + \frac{1}{4 r_0} \right) \quad (12)$$

gdzie:  $\frac{l}{r_{tot}}$  – krzywizna odpowiadająca mimośrodkowi  $e_{tot}$ ,  
 $\frac{l}{r_0}$  – krzywizna odpowiadająca mimośrodkowi  $e_0$ , którą można uznać za równą  $\frac{e_0}{e_{tot}} \frac{l}{r_{tot}}$ .

Podstawiając do wzoru (13) krzywiznę  $\frac{l}{r_0} = \frac{e_0}{e_{tot}} \frac{l}{r_{tot}}$  otrzymuje się

$$e_2 = K_1 \frac{l_0^2}{10} \left( 1 + \frac{e_0}{4 e_{tot}} \right) \frac{1}{r_{tot}} \quad (13)$$

W podanym wyżej wzorze (11) zwiększono natomiast występujący w liczniku współczynnik liczbowy z 2 na 2,5 oraz usunięto z mianownika współczynnik 0,9, w związku z czym

$$\frac{1}{r_{tot}} = K_2 \frac{2,5 \varepsilon_{yd}}{d} \quad (14)$$

Wprowadzone zmiany spowodowały, że posługując się wzorami z MC90 otrzymuje się nośności słupów o kilka procent niższe od otrzymywanych przy korzystaniu ze wzorów podanych w MC78 i w EC2.

#### 4.4. Norma amerykańska ACI 318

Podane w normie ACI [6] zasady wyznaczania mimośrodu całkowitego  $e_{tot}$  są identyczne jak w PN, z tym że siłę krytyczną określa się z wzoru:

$$N_{crit} = \frac{\pi^2}{l_0^2} \left( \frac{0,2 E_c I_c + E_s I_s}{1 + \beta_d} \right) \quad (15)$$

gdzie  $\beta_d$  jest stosunkiem obciążenia stałego do obciążenia całkowitego.

Wzór ten ma taką samą budowę jak wzór na siłę krytyczną podany w PN84 i PN98. Różni się on natomiast od naszego wzoru tym, że na jego początku zamiast 6,4 wstawiono  $\pi^2$  (tak jak we wzorze Eulera) oraz że zrezygnowano w nim z uzależnienia sztywności przekroju betonowego od mimośrodu początkowego, wprowadzając stały współczynnik przed iloczynem  $E_c I_c$  o wartości 0,2. Ponadto odpowiednik naszego współczynnika  $k_d$  występuje w nim jako dzielnik całej sztywności przekroju, podczas gdy w PN jest on dzielnikiem tylko sztywności przekroju betonu.

#### 4.5. Porównanie nośności słupów obliczanej według przedstawionych metod

Na rysunkach 7, 8 i 9 przedstawiono porównanie nośności słupów określanych według PN98, według EC2 – przy stosowaniu podstawowej i uproszczonej metody słupa modelowego – oraz przy posługiwaniu się wzorem na siłę krytyczną podanym w ACI 318. W tym ostatnim przypadku nośność najbardziej wyężonego przekroju słupa wyznaczana była zgodnie z PN98, tak aby rozbieżności w uzyskanych wynikach spowodowane były jedynie stosowaniem różnych wzorów na siłę krytyczną, a nie różnymi metodami zapewniania bezpieczeństwa konstrukcji.

Na rysunkach nie zamieszczono nośności wyznaczonych według MC90, aby nie zaciemniać wykresów. Nośności te, zarówno dla podstawowej, jak i uproszczonej metody słupa modelowego, sytuują się regularnie o kilka procent poniżej otrzymywanych z EC2.

Wykresy sporządzone zostały dla trzech klas betonu: B15, B25 i B50 i w ramach każdej klasy dla trzech stopni zbrojenia  $A_s/A_c$ : 0,005; 0,030 i 0,060.

Jak widać z wykresów, stosując każdą z czterech porównywanych metod uzyskuje się przy betonie B15 i B25 oraz średnim stopniu zbrojenia 0,030 zadziwiająco dobrą zgodność wyników. Dla betonu B50 zgodność ta jest nieco gorsza.

Natomiast w ramach każdej z trzech klas betonu zgodność nośności określanych za pomocą różnych metod pogarsza się wyraźnie, zarówno przy niskim, jak i wysokim stopniu zbrojenia. Nie dotyczy to jedynie słupów z betonu B50 z małym zbrojeniem, przy czym w słupach o stopniu zbrojenia 0,060 nośności wyznaczone według PN98 sytuują się wyraźnie poniżej nośności określanych za pomocą pozostałych metod. Interesująca nas najbardziej różnica między PN98 i podstawową wersją metody słupa modelowego z EC2 jest największa przy betonie B50 i przekracza 10%.

Przy niskim stopniu zbrojenia mamy sytuację odwrotną. Nasza norma przy małych mimośrodkach daje nośności zdecydowanie wyższe od pozostałych norm. Jeśli chodzi o różnice między PN84 i EC2, to wyjątkiem jest znów beton B50, przy którym obie metody dają nieomal identyczne nośności. Dla pozostałych dwóch betonów różnice te dochodzą natomiast prawie do 20%. Z wykresów widać przy tym, że obszar małych mimośrodków i niskiego stopnia zbrojenia jest obszarem największych niezgodności także i między pozostałymi metodami, w tym również podstawową i uproszczoną wersją słupa modelowego.

#### 4.6. Możliwe korekty metody PN 98

Stwierdzone rozbieżności między wynikami otrzymanymi metodą PN98 i metodą słupa modelowego z EC2 wynikają głównie stąd, że wzór na siłę krytyczną  $N_{crit}$  w stosowanej u nas metodzie wykalibrowany został przez Tala i Czistiakowa [9] na podstawie wyników przeprowadzonych przez nich badań słupów o niskim i średnim stopniu zbrojenia, wykonanych z dwóch betonów o wytrzymałościach średnich wynoszących około 12 i 30 Mpa. Jak widać z rysunku 4, zaproponowane przez nich empiryczne wyrażenie na sztywność przekroju betonowego zapewnia dobrą zgodność metody z wynikami badań w granicach określonych przez parametry badanych elementów.

Jak można natomiast stwierdzić na podstawie wykresów (rys. 7, 8, 9 i 9), metoda ta daje dla wysokich stopni zbrojenia niższe nośności od metod pozostałych\*. Wszystko przemawia za tym, że jest to wynik przyjęcia przez autorów metody wysokiej sztywności przekroju betonowego w celu uwzględnienia efektu „tension stiffening” występującego przy niskim stopniu zbrojenia, a także wynik konieczności przyjmowania przy projektowaniu siły krytycznej niższej od wykalibrowanej na podstawie wyników badań, z uwagi na przejście od średnich do obliczeniowych wytrzymałości betonu i stali.

Rezultaty uznano jednak za niezadowolające i poszukiwano możliwości skorygowania wzoru na siłę krytyczną, tak aby PN98 była w pełni zgodna z EC2.

Według Timoshenki [22] przyjęty w polskiej i amerykańskiej normie wzór (3) wyprowadzony został dla słupów obciążonych osiowo i mających początkową krzywiznę o strzałce  $e_{tot}$ , natomiast dla interesującego nas przypadku słupów obciążonych siłami przyłożonymi na ich końcach z mimośrodkami  $e_{tot}$  powinien być stosowany wzór

$$\eta = \frac{1 + \left( \frac{4}{\eta} - 1 \right) \frac{N}{N_{crit}}}{1 + \frac{N}{N_{crit}}} \quad (16)$$

Jak sprawdzono, zbliżone wartości  $\eta$  do otrzymywanych z tego wzoru można również otrzymać z wzoru (3) pod warunkiem odpowiedniego zmniejszenia współczynnika  $\pi^2$  w eulerowskim wzorze na siłę krytyczną. W granicach od  $\frac{N}{N_{crit}} = 0,1$  do  $0,6$  wzór (3) dość dobrze aproksymuje wzór (16) po zastąpieniu  $\pi^2$  przez 9.

Wprowadzając do wzoru normowego 9 oraz dzieląc pierwszy wyraz w nawiasie kwadratowym przez 2 otrzymuje się:

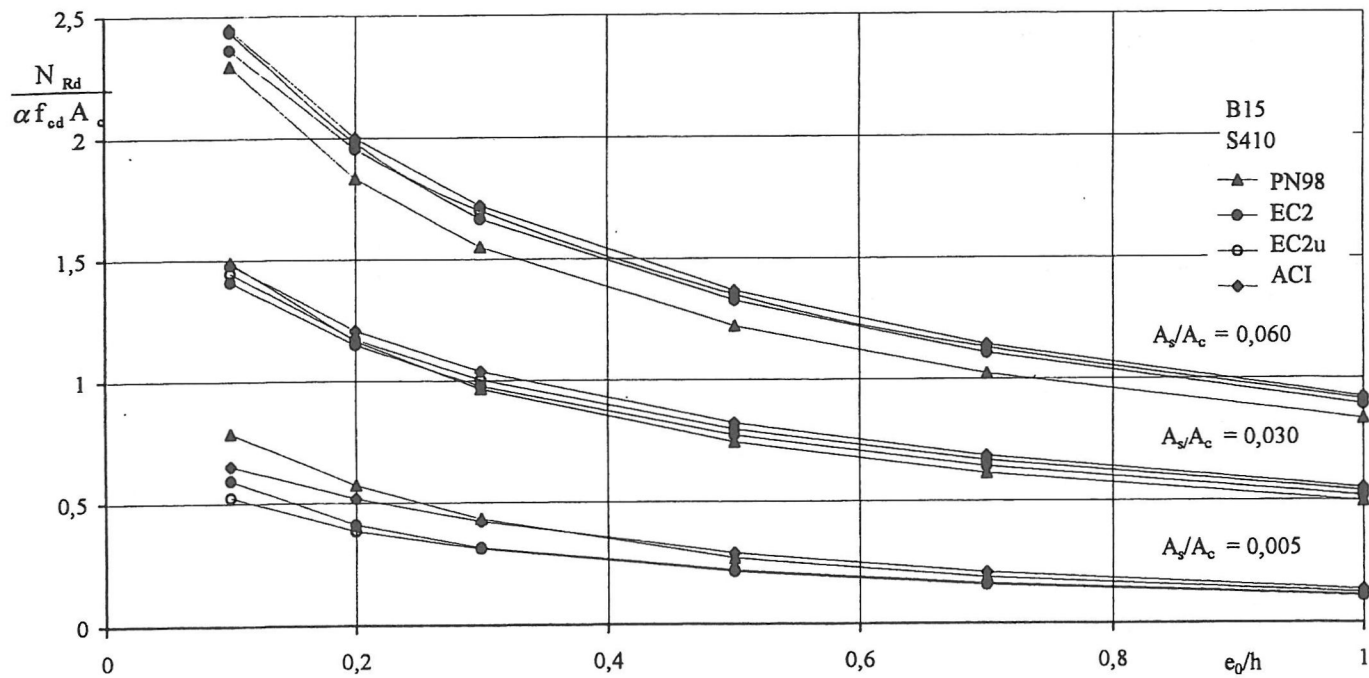
$$N_{crit} = \frac{9}{I_0^2} \left[ \frac{E_c I_c}{2 k_d} \left( \frac{0,11}{0,1 + \frac{e_0}{h}} + 0,1 \right) + E_s I_s \right] \quad (17)$$

W wyniku tej korekty sztywność przekroju betonowego ulega zmniejszeniu o około 30%.

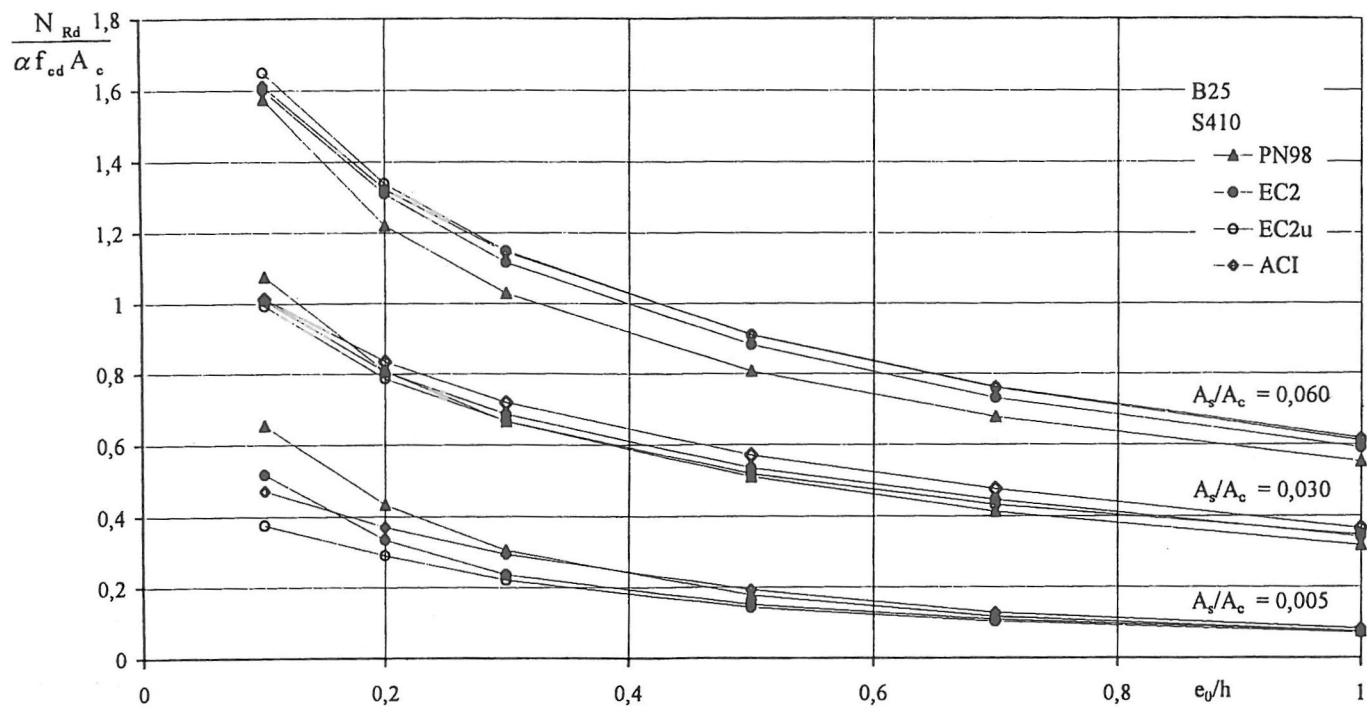
Jak widać z rysunków 10, 11 i 12, dokonana korekta poprawia znacznie zgodność między PN98 i EC2.

Wprowadzenie do PN98 wzoru (17) pozwoliłoby na oszczędniejsze projektowanie słupów o wysokim stopniu zbrojenia. Spowodowałoby ono jednocześnie konieczność nieco mniej oszczędnego projektowania słupów słabo zbrojonych, wynikającą ze zmniejszenia w tych słupach efektu współpracy stali z betonem na odcinkach między rysami. Jest to jednak w pełni uzasadnione tym, że wpływ tego efektu w obecnym projekcie PN98 ustalony został doświadczalnie na podstawie badań słupów pod obciążeniem krótkotrwałym i zapewne maleje przy długotrwałym działaniu obciążenia.

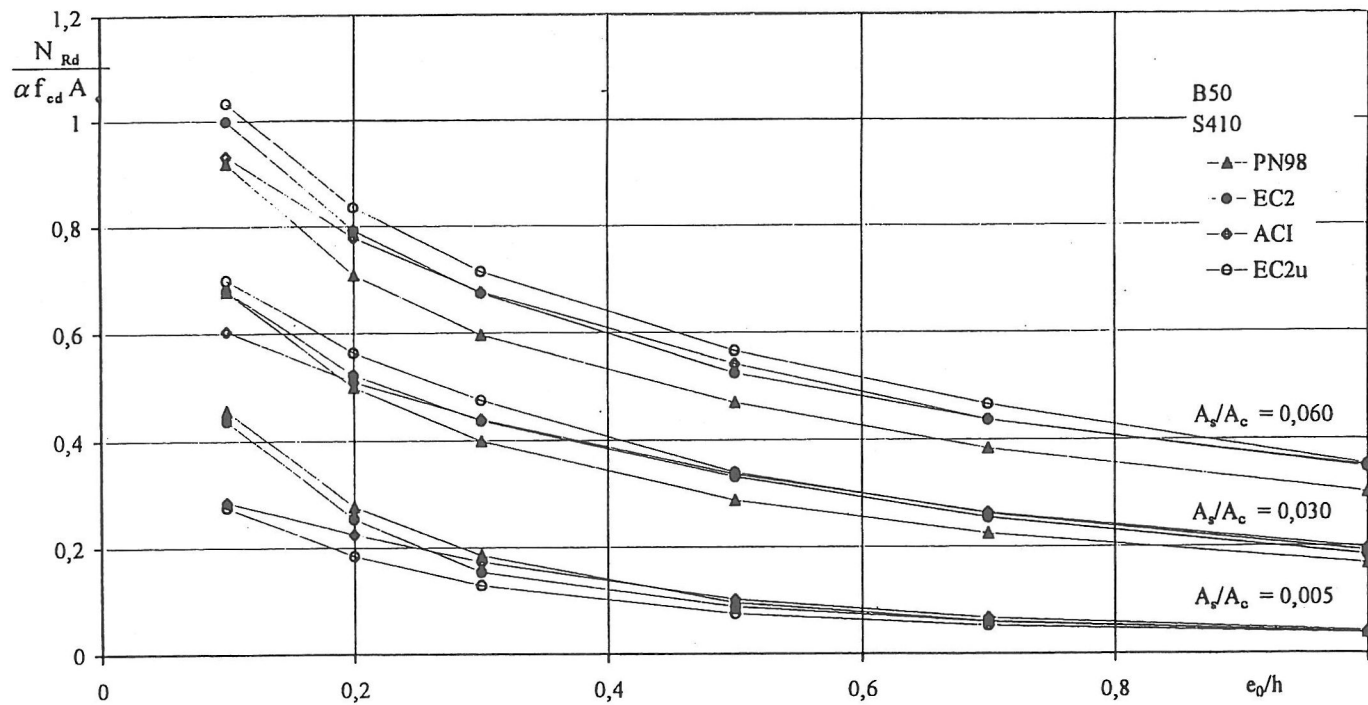
\* Programy do obliczeń porównawczych przygotował mgr inż. Jacek Bielawski.



Rys. 7. Porównanie nośności słupów obliczonych według PN98, według EC2 metodą słupa modelowego w wersji podstawowej i uproszczonej oraz według ACI 318 – beton B15

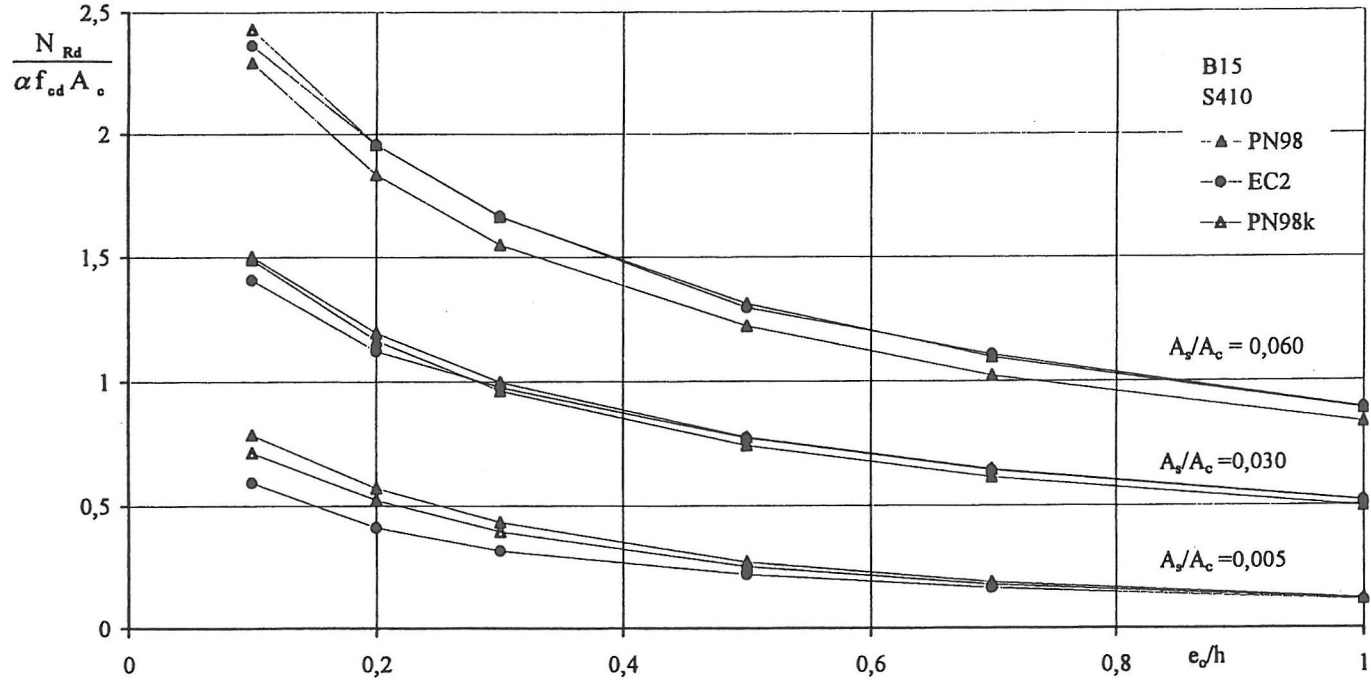


Rys. 8. Porównanie nośności słupów obliczonych według PN98, według EC2 metodą słupa modelowego w wersji podstawowej i uproszczonej oraz według ACI 318 – beton B25

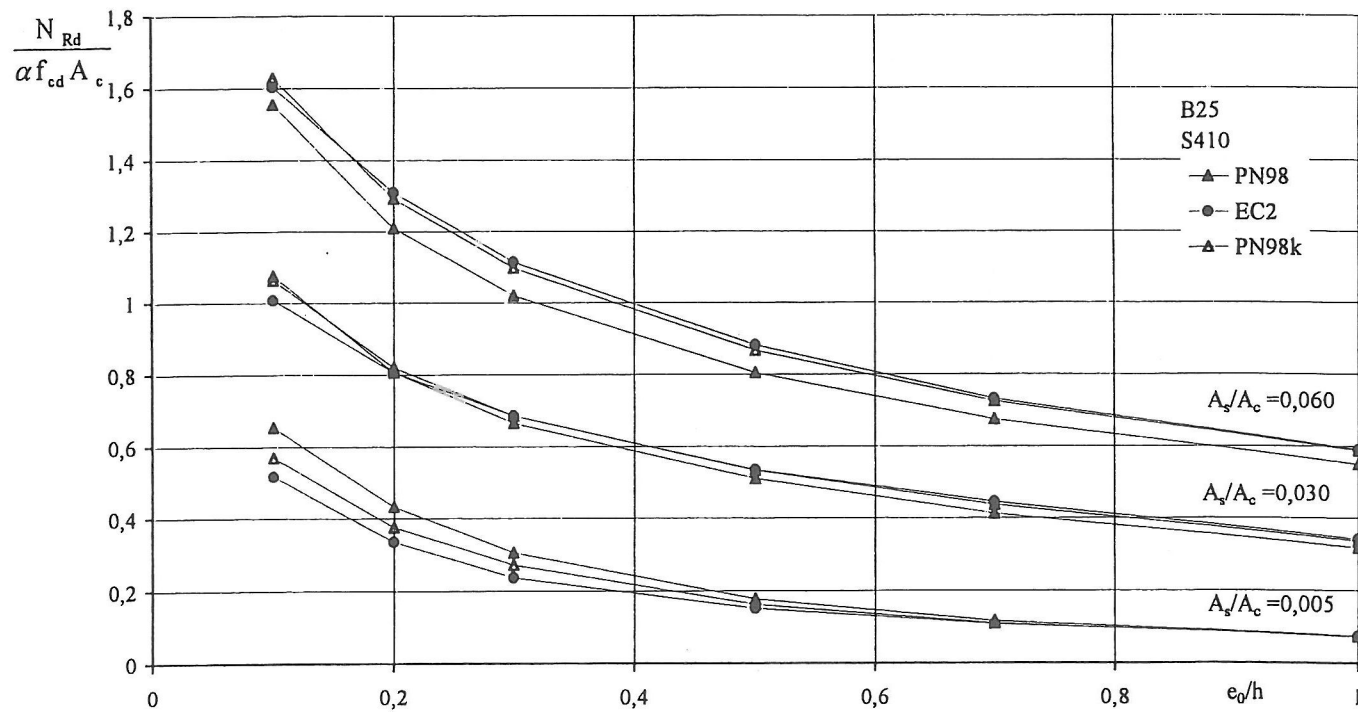


Rys. 9. Porównanie nośności słupów obliczonych według PN98, według EC2 metodą słupa modelowego w wersji podstawowej i uproszczonej oraz według ACI 318 – beton B50

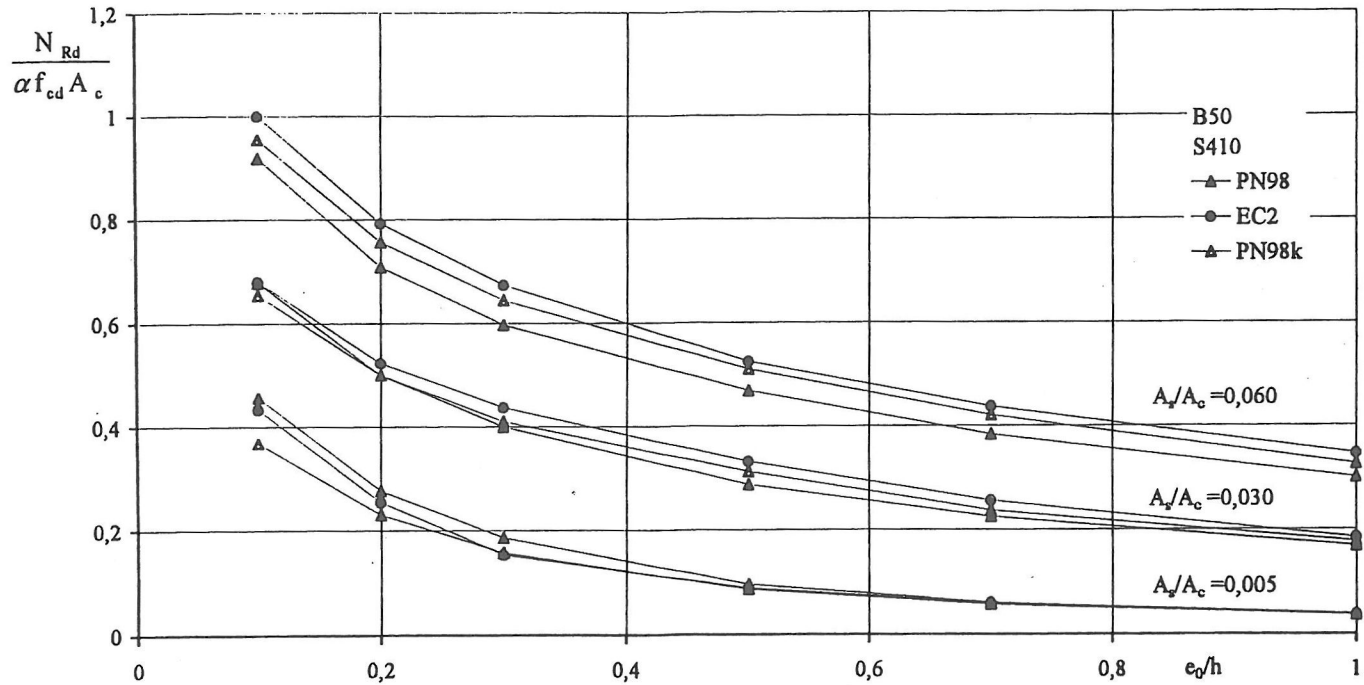




Rys. 10. Porównanie nośności słupów obliczonych według PN98 bez korekty i z korektą wzoru na siłę krytyczną oraz według EC2 metodą słupa modelowego w wersji podstawowej – beton B15



Rys. 11. Porównanie nośności słupów obliczonych według PN98 bez korekty i z korektą wzoru na siłę krytyczną oraz według EC2 metodą słupa modelowego w wersji podstawowej – beton B25



Rys. 12. Porównanie nośności słupów obliczonych według PN98 bez korekty i z korektą wzoru na siłę krytyczną oraz według EC2 metodą słupa modelowego w wersji podstawowej – beton B50

## Literatura i dokumenty

- [1] PN-84/B-03264: Konstrukcje betonowe, żelbetowe i sprężone. Obliczenia statyczne i projektowanie. PKNMiJ. Wyd. ALFA, Warszawa 1984
- [2] prPN-B-03264 Konstrukcje betonowe, żelbetowe i sprężone. Obliczenia statyczne i projektowanie (projekt)
- [3] CEB - FIP Model Code for Concrete Structures. CEB - FIP International Recommendations, 3-rd Edition 1978
- [4] CEB - FIP Model Code 1990. CEB Bulletin d'Information No 213/214, Mai 1993
- [5] Kukulski W., Sulimowski Z.: Rozdział 10. Stan graniczny nośności z udziałem efektów odkształceń konstrukcji; w: Podstawy projektowania konstrukcji żelbetowych i sprężonych według Eurokodu 2. Opracowanie wykonane w ramach projektu badawczego KBN nr PB 0536/S1/94/07, Warszawa 1997 (praca nie publikowana)
- [6] ACI 318-89: Building code requirements for reinforced concrete structures
- [7] SNIP 2.03.01-84 Stroitielnyje normy i prawa. Betonnyje i żelezobetonnyje konstrukcii
- [8] Kukulski W., Bielawski J.: Pomijanie wpływu smukłości przy obliczaniu słupów żelbetowych. Politechnika Warszawska, Sesja Naukowa z okazji jubileuszu prof. W. Stachurskiego, Warszawa 1996
- [9] Tal K. E., Czistiakov E. A.: Rasczot niesuszczej sposobnosti gibkich żelezobetonnych elementow; w: Rasczot i konstruirowanie elementow żelezobetonnych konstrukcii. Strizdat, Moskwa 1964
- [10] Baumann O.: Die knickung der Eisenbeton-Sulen. Laboratoire Fdral d'essai des Matriaux. Rapport no 89. Zurich 1934
- [11] Chang W.F., Fergusson P.M.: Long Hinged Reinforced Concrete columns. Journal of The American Concrete Institute, January 1963
- [12] Ernst G.C., Hromadik J.J., Riveland A.R.: Inelastic Buckling of plain and reinforced concrete columns, plates and shells. University of Nebraska Engineering Experiment Station. Bulletin no 3, Lincoln 1953
- [13] Gaede K.: Knicken von Stahlbetonstaben unter Kurz und Longzeibelastung. Deutscher Ausschuss fr Stahlbeton, n0 129. Ed. W.Ernst & Sohn, Berlin 1958
- [14] Gehler W., Hütter A.: Knickversuche mit Stahlbeton-Sulen. Deutscher Ausschuss fr Stahlbeton, no 113. Ed. W.Ernst & Sohn, Berlin, 1954
- [15] Hanson R., Rosenström S.: Tryckfrsk med. Slanga betongpelare, Betong, vol 32, no 3. Stockholm, pp.247-262, 1947
- [16] Ramboll B.J.: Reinforced concrete columns. Teknisk Forlag. Copenhagen, 1951
- [17] Thomas F.G.:The strength of long reinforced concrete columns in short period tests to destruction. Department of Scientific and Industrial Research, Building Research. Technical paper No 24. London 1939
- [18] CEB Design Manual on Buckling and Instability. CEB Bulletin d'Information No 123, Decembre 1977
- [19] Habel A.: Die Trägfähigkeit der aussermittig gedrückten Stahlbetonsäulen. *Beton und Stahlbeton*, 8, 1953
- [20] Quast U.: Towers, piers, chimneys, and masts. CEB Bulletin d'Information No 155, Septembre 1983
- [21] Lintzer H.U.: Design of Concrete Structures to ENV 1992 - Eurocode 2; w: Concrete Structures Euro-Design Handbook, Ernst & Sohn Verlag, Berlin 1995
- [22] Timoshenko S.P., Gere J.M.: Teoria stateczności sprężystej. Arkady, Warszawa 1963

- [18] CEB Design Manual on Buckling and Instability. CEB Bulletin d'Information No 123, Decembre 1977
- [19] Habel A.: Die Trägfähigkeit der aussermittig gedrückten Stahlbetonsäulen. *Beton und Stahlbeton*, 8, 1953
- [20] Quast U.: Towers, piers, chimneys, and masts. CEB Bulletin d'Information No 155, Septembre 1983
- [21] Lintzer H.U.: Design of Concrete Structures to ENV 1992 - Eurocode 2; w: Concrete Structures Euro-Design Handbook, Ernst & Sohn Verlag, Berlin 1995
- [22] Timoshenko S.P., Gere J.M.: Teoria stateczności sprężystej. Arkady, Warszawa 1963

## DESIGN OF SLENDER R.C. COLUMNS

### Summary

Conditions allowing for omitting second order effects while calculation of slender r.c. columns according to American Code, CEB/FIP Model Code, Eurocode 2 and Polish Code are discussed in the paper as well as calculation methods for slender r.c. columns given in mentioned above codes. Particular attention is paid to tension stiffening caused by interaction of tensioned concrete between cracks. Calculation results are compared with test results of Tal and Tshistiakov [9], used for calibration of design formulae given in Polish Code. Suggested correction of formula on  $N_{crit}$  brings about better conformity of calculation with test results.

*Referat przygotowany na konferencję naukowo-techniczną  
„Podstawy projektowania konstrukcji z betonu  
w ujęciu normy PN-B-03264:1998 – w świetle Eurokodu 2”  
Puławy, 15-17 czerwca 1998 r.*