

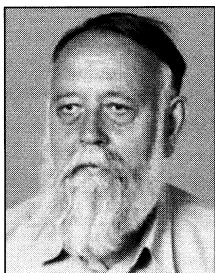
Adam ŻUCHOWSKI

POLITECHNIKA SZCZECIŃSKA
INSTYTUT AUTOMATYKI PRZEMYSŁOWEJ

Wyznaczanie parametrów rozszerzonego modelu Strejca w oparciu o pomiar charakterystyki skokowej

Prof dr hab. inż. Adam ŻUCHOWSKI

– profesor zwyczajny w Instytucie Automatyki Przemysłowej Politechniki Szczecińskiej. Ze szkolnictwem wyższym związany zawodowo od 1955 r. (Politechnika Wrocławska, Politechnika Szczecińska). Jest współtwórcą polskiej szkoły miernictwa dynamicznego. Posiada w dorobku 230 publikacji z dziedziny miernictwa i automatyki.



Streszczenie

Model Strejca nadaje się do opisu i identyfikacji dynamiki obiektów o charakterystykach skokowych rosnących monotonicznie. Przedstawiono metodę wyznaczania parametrów modelu z uwzględnieniem opóźnienia rzeczywistego i rozrzutu jego stałych czasowych.

Abstract

If system step response monotonically increases then Strejca's model can be useful for representation and identification of system dynamic. The method for estimation of model parameters including real delay and dispersion of time-constants is presented in the paper.

WSTĘP

Wspólną nazwą „model Strejca” [5] obejmuje się dziś często zarówno transmitancję o klasycznej postaci:

$$K_m(s)_1 = \frac{k}{(1+sT)^n} \quad (1)$$

gdzie: k jest współczynnikiem statycznego wzmocnienia, n - rzędem inercji, T - stałą czasową, jak i transmitancje z uzupełnieniami:

$$K_m(s)_2 = \frac{k \exp(-st_0)}{(1+sT)^n}, \quad K_m(s)_3 = \frac{k}{(1+sT)^m(1+sT_0)} \quad (2)$$

$$K_m(s)_4 = \frac{k \exp(-st_0)}{(1+sT)^m(1+sT_0)}$$

uwzględniającymi występowanie opóźnienia rzeczywistego t_0 , lub pewnego rozrzutu wartości stałych czasowych wyrażonego parametrami m , T i T_0 . Model Strejca nadaje się dobrze do opisu i identyfikacji dynamiki obiektów o charakterystykach skokowych $h(t)$ rosnących monotonicznie. Znanych i rozpowszechnionych jest kilka takich metod identyfikacji np. [1], [3], [4] opartych o pomiar charakterystyki skokowej i nadających się do praktycznego zastosowania. Warto zauważyć, że istnienie niewielkiego, trudnego do wyodrębnienia opóźnienia rzeczywistego, wieloinercyjność obiektów (różne stałe czasowe przy rzędzie dynamiki $n \geq 2$), oraz występowanie

nie zakłóceń obciążających charakterystykę $h(t)$ powodują, że wyznaczany rząd inercji n jest zwykle liczbą niecałkowitą, co nie znajduje teoretycznego uzasadnienia i stwarza asumpt do pewnych manipulacji parametrami uzyskiwanego modelu (zaokrąglanie rzędu inercji do najbliższej liczby całkowitej i korygowanie wartości T , korygowanie niedokładnie wyznaczonej wartości t_0 , wprowadzanie dodatkowej stałej czasowej T_0 itp.). Manipulacje takie są dopuszczalne przy istnieniu odpowiednich uzasadnień teoretycznych, ponadto w warunkach występowania losowych zakłóceń charakterystyki skokowej istotne wydaje się stosowanie takich metod identyfikacji, które nie wymagają różniczkowania przebiegu $h(t)$ (wykreślanie stycznych [3], wyznaczanie progowych chwil czasu t_0 dla których $h(t_0) \geq 0$ [1]), a jednocześnie są względnie proste. W niniejszym artykule zaproponowano metodę, która zdaje się spełniać wymienione warunki.

OGÓLNE WŁASNOŚCI MODELU STREJCA

Zapiszemy transmitancję $K_m(s)_2$ w następującej, równoważnej postaci:

$$K_m(s)_5 = \frac{k \exp(-st_0)}{\left(1 + s \frac{T_1}{n}\right)^n} \quad (3)$$

gdzie oczywiście $T_1 = nT$. Charakterystyka impulsowa określona jest wzorem:

$$k(t) = k \frac{n^n}{(n-1)! T_1} \left(\frac{t-t_0}{T_1}\right)^{n-1} \exp\left(-n \frac{t-t_0}{T_1}\right) l(t-t_0) \quad (4)$$

a charakterystykę skokową można wyznaczyć w postaci nieskończonego, zbieżnego szeregu podanego np. w [6]. Obie charakterystyki są określone dla dowolnych, dodatnich (także ułamkowych) wartości n , a charakterystyki obiektów wieloinercyjnych z opóźnieniem rzeczywistym mogą być z niewielkim błędem zastąpione charakterystykami (4), te ostatnie wolno więc potraktować jako „uniwersalne”, godząc się na niewielkie błędy systematyczne takiej metody.

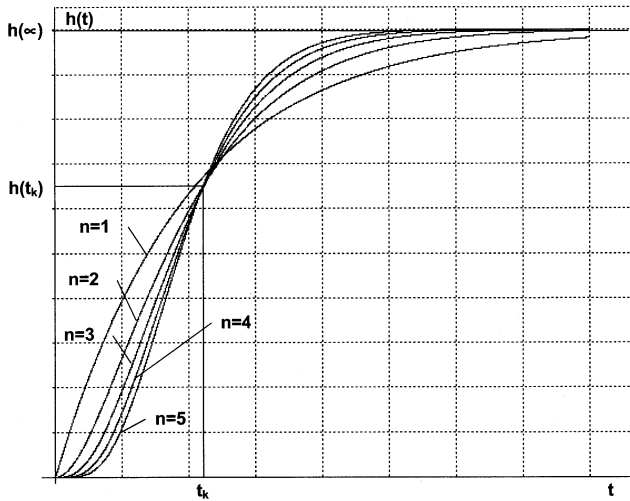
Jak łatwo sprawdzić przy $t_0 = \text{const}$, $T_1 = \text{const}$ oraz $k = \text{const}$, charakterystyki skokowe modelu (3) praktycznie przecinają się w jednym wspólnym punkcie [7] (rys. 1) o współrzędnych:

$$t_k = 1.11 T_1 + t_0$$

$$h(t_k) = \phi_1(n)k \approx 0,65 k \quad (5)$$

$$k = h(\infty)$$

Wartości funkcji $\phi_1(n)$ zestawiono w tabeli 1, przy tym największe odchylenie rzędnej od wartości $0,65 k$ występuje przy $n = 1$ i wynosi około $0,02 k$. W pierwszym przybliżeniu - zwłaszcza w obe-



Rys. 1. Charakterystyki skokowe modelu Strejca przy $k = const.$, $T_1 = const.$, $t_0 = 0$

ności zakłóceń wolno przyjąć $h(t_k) = 0,65 k$, a interpolacja dyskretnych wartości $\phi_1(n)$ umożliwia posługiwanie się wzorem (5) także dla ułamkowych wartości n .

Przyjmując, że:

$$\begin{aligned} h(t_d) &= 0.1 k & (6) \\ t_d &= \phi_2(n)T_1 + t_0 \end{aligned}$$

można w oparciu o wyniki symulacji komputerowej wyznaczyć wartości funkcji $\phi_2(n)$ zestawione również w tabeli 1. Jest to ciągła funkcja argumentu n , a jej wartości dla ułamkowych n można także wyznaczać np. metodami interpolacji. Wprowadzenie zależności (6) ma na celu umożliwienie wykrycia istnienia opóźnienia rzeczywistego t_0 i wyznaczenie jego wartości.

Porównania parametrów modeli $K_m(s)_4$ i $K_m(s)_5$ można dokonać postulując spełnienie warunków [2]:

$$\left. \frac{d K_m(s)_4}{ds} \right|_{s=0} = \left. \frac{d K_m(s)_5}{ds} \right|_{s=0}$$

oraz

$$K_m(s_1)_4 = K_m(s_1)_5 \quad (7)$$

przy

$$s_1 = \frac{2}{mT + T_0} = \frac{2}{T_1}$$

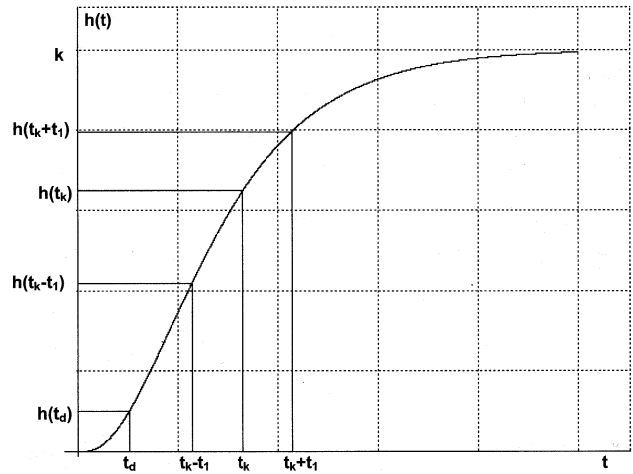
skąd po wprowadzeniu oznaczeń:

$$x = \frac{T}{mT + T_0}, \quad y = \frac{T_0}{mT + T_0} \quad (8)$$

wynika układ równań:

$$\begin{aligned} mx + y &= 1 \\ (1 + 2x)^m (3 - 2mx) &= \left(1 + \frac{2}{n}\right)^n \end{aligned} \quad (9)$$

pozwalających wyznaczyć T_0 i T przy danych n , T_1 i przyjętym m .



Rys. 2. Wyznaczanie rzędu inercji n w oparciu o charakterystykę skokową modelu Strejca

WYZNACZANIE PARAMETRÓW MODELU $K_m(s)_5$ BEZ OPÓŹNIENIA RZECZYWISTEGO

Przy $t_0 = 0$ wykorzystując wzór (5) otrzymuje się:

$$\begin{aligned} t_k &= 1.11 T_1 & (10) \\ k &= h(\infty) \end{aligned}$$

co stwarza możliwość wyznaczenia parametrów k oraz T_1 . Odchylając czas t_k o arbitralnie przyjęte wartości $\pm t_1$ otrzymuje się układ równań (rys. 2):

$$h(t_k + t_1) = h(t_k) + t_1 k(t_k) + \frac{1}{2} t_1^2 k^{(1)}(t_k) + \dots \quad (11)$$

$$h(t_k - t_1) = h(t_k) - t_1 k(t_k) + \frac{1}{2} t_1^2 k^{(1)}(t_k) - \dots$$

skąd:

$$h(t_k + t_1) - h(t_k - t_1) = D = 2t_1 k(t_k) + \frac{1}{3} t_1^3 k^{(2)}(t_k) + \frac{1}{60} t_1^5 k^{(4)}(t_k) + \dots \quad (12)$$

Po pominięciu we wzorze (12) członów zawierających wyższe potęgi t_1 , dopuszczalnym przy niewielkim t_1 , oraz po wykorzystaniu wzorów (4) i (10) otrzymuje się:

$$\frac{D}{k} = 2 \left(\frac{t_1}{T_1}\right) \frac{n^{n+1}}{n!} (1.11)^{n-1} \exp(-1.11 \ln) \quad (13)$$

skąd po zastosowaniu wzoru Stirlinga:

$$n! \cong n^n \sqrt{2\pi n} \exp(-n) \exp\left(\frac{1}{12n}\right) \quad (14)$$

i odpowiednich przekształceniach:

$$n \cong \frac{\pi}{2} \left(\frac{D t_k}{k t_1}\right)^2 \phi_3(n) \quad (15)$$

gdzie:

$$\phi_3(n) = \frac{1}{(1.11 \exp(-0.11))^{2n}} \exp\left(\frac{1}{6n}\right)$$

zmienia się nieznacznie przy szerokim zakresie zmian n . Wartości funkcji $\phi_3(n)$ zestawiono w tabeli 1.

Tabela 1. Wartości funkcji $\phi_1(n)$, $\phi_2(n)$ i $\phi_3(n)$

n	$\phi_1(n)$	$\phi_2(n)$	$\phi_3(n)$
1	0.6704	0.105	1.195
2	0.6503	0.265	1.112
3	0.6466	0.366	1.094
4	0.6475	0.436	1.091
5	0.6502	0.487	1.094
6	0.6538	0.526	1.096
...
10	0.6702	0.622	1.195

W pierwszym przybliżeniu wolno przyjąć $\phi_3(n) = 1,1$ i wtedy otrzymuje się zależności:

$$n \cong 1.73 \left[\frac{D t_k}{k t_1} \right]^2, \quad T_1 = 0,9 t_k, \quad T = \frac{T_1}{n} \quad (16)$$

UWZGLĘDNIENIE OPÓŹNIENIA RZECZYWISTEGO t_0

W przypadku istnienia opóźnienia rzeczywistego uwzględniając wzory (4) i (5) należy wzór (15) przedstawić w postaci:

$$n = \frac{\pi}{2} \phi_3(n) \left[\frac{D}{k} \frac{(t_k - t_0)}{t_1} \right]^2 \quad (17)$$

skąd wobec zależności (5) i (6):

$$\frac{\pi D}{2 k} \frac{(t_k - t_d)}{t_1} = \sqrt{\frac{n}{\phi_3(n)}} [1 - 0,9 \phi_2(n)] \quad (18)$$

Wykorzystując dane z tabeli 1 można prawą stronę wzoru (18) aproksymować zależnością $0,8283 + 0,1928 \sqrt{n-1}$ z błędem w zakresie zmian $1 \leq n \leq 5$ nie przekraczającym 1%, skąd ostatecznie:

$$1,513 \frac{D}{k} \frac{(t_k - t_d)}{t_1} = 1 + 0,2328 \sqrt{n-1} \quad (19)$$

Tabela 2. Wyniki symulowanych eksperymentów

Lp.	Transmitancja obiektu $K(s)$, numer rysunku	t_k s	t_d s	t_1 s	D	t_0 s	N	m	T_1 s	T s	T_0 s	Uwagi
1	$\frac{\exp(-0,5s)}{(1+rs)^2}$ Rys. 3a	2.73	1.04	0.75	0.363	0.52	1.98	1	1.99	1.13	0.86	Transmitancja obiektu odpowiada dokładnie modelowi Strejca. Nie użyto procedury iteracyjnej wobec $n \cong 2$
2	$\frac{\exp(-0,5s)}{(1+s)(1+2s)}$ Rys. 3b	3.80 (3.78)	1.25 (1.26)	0.75 1.00 1.50	0.224 (0.236) 0.308 (0.315) 0.450 (0.477)	0.71 (0.58) 0.58 (0.57) 0.71 (0.53)	1.59 (1.82) 1.79 (1.83) 1.60 (1.90)	1 1 1	2.84 (2.91) 2.94 (2.91) 2.83 (2.95)	2.26 (2.01) 2.08 (1.99) 2.24 (1.89)	0.58 (0.90) 0.86 (0.92) 0.59 (1.06)	Obiekt wieloinercyjny. Wykorzystano procedurę iteracyjną. W nawiasach podano wyniki uzyskane przy braku zakłóceń.
3	$\frac{\exp(-0,5s)}{(1+s)(1+2s)(1+3s)}$ Rys. 3.c	7.17 (7.12)	2.53 (2.56)	2.00	0.366 (0.372)	0.59 (0.69)	2.51 (2.47)	2	5.93 (5.79)	1.24 (1.18) 2.65 (2.61)	3.45 (3.43) 0.64 (0.57)	$x_1 = 0.2089$ (0.2036) $x_2 = 0.4464$ (0.4507) Obiekt wieloinercyjny. Wobec $2 \leq n \leq 3$ nie użyto procedury iteracyjnej. W nawiasach podano wyniki uzyskane przy braku zakłóceń
4	$\frac{(1+1,5s)\exp(-0,5s)}{(1+s)(1+2s)(1+3s)}$ Rys. 3d	5.38 (5.41)	1.62 (1.59)	1.50	0.309 (0.308)	0.74 (0.62)	1.68 (1.76)	1	4.24 (4.36)	3.18 (3.15)	1.03 (1.21)	Obiekt wieloinercyjny z członem forsującym. Zastosowano procedurę iteracyjną. W nawiasach podano wyniki uzyskane przy braku zakłóceń.

Wzór ten z danych pomiarowych pozwala wyznaczyć wartość n , zaś ze wzoru (17) można obliczyć czas opóźnienia rzeczywistego t_0 , uwzględniając wartości $\phi_3(n)$ z tabeli 1.

Ponadto zachodzi związek: (5)

$$t_k - t_0 = 1,11 T_1$$

pozwalający wyznaczyć czas T_1 .

Takie obliczenia obarczone są błędami (wzór (19) odpowiada metodzie różnicowej) spowodowanymi nie tylko istnieniem zakłóceń, ale także przyjęciem we wzorze (5) przybliżenia $\phi_1(n) = 0,65$ niezależnie od wartości n . Wynikający stąd błąd systematyczny wyznaczania n i t_0 można zmniejszyć posługując się następującą metodą iteracyjną:

W pierwszym kroku obliczeniowym w oparciu o omówione już reguły postępowania zostają obliczone wartości k , n , t_0 i T_1 . Znając n można skorygować regułę wyznaczania czasu t_k (wzór (5)) albo wykorzystując ponownie dane pomiarowe, albo też korzystając z możliwości obliczenia poprawki wynikającej z (11):

$$t_{k \text{ kor}} \cong t_k + 3T_1 \frac{[\phi_1(n) - 0,65]}{\sqrt{n}} \quad (20)$$

praktycznie już bez konieczności korygowania wartości D .

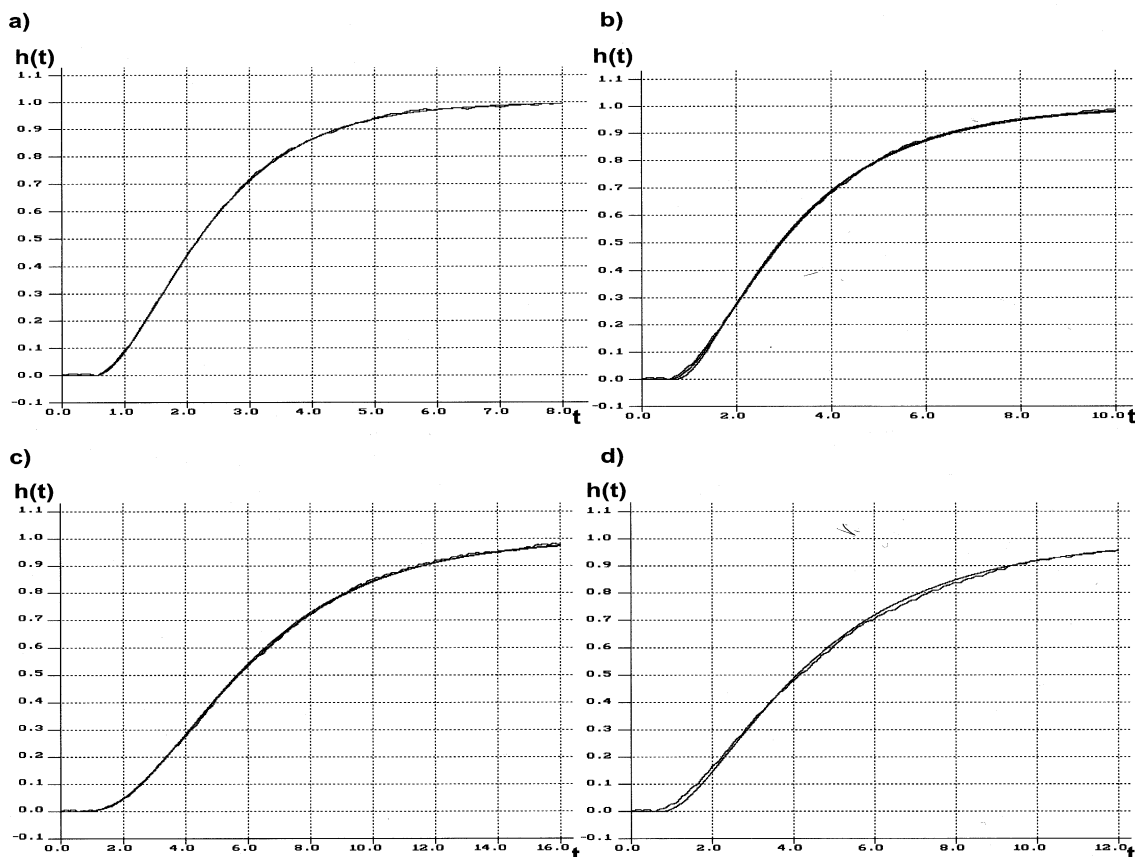
W drugim kroku przy wykorzystaniu nowego $t_{k \text{ kor}}$ zostają ponownie obliczone wartości n , t_0 i T_1 stanowiąc punkt wyjścia dla dokonania trzeciego kolejnego kroku obliczeniowego. Obliczenia kończą się po kilku krokach, po ustaleniu wartości t_k , t_0 , n i T_1 .

WYZNACZANIE PARAMETRÓW MODELU $K_m(s)_4$

Rząd inercji n wyznaczony z uwzględnieniem opóźnienia rzeczywistego t_0 metodą opisaną w poprzednim rozdziale jest zwykle ułamkiem. Przyjmując zaokrąglenie do mniejszej, całkowitej liczby:

$$m = E(n) \quad (21)$$

można z układu równań (9) wyznaczyć odpowiednie parametry T i T_0 i tym samym wszystkie parametry modelu $K_m(s)_4$. Przy $m \geq 2$ układ równań (9) może mieć więcej niż jedno rozwiązanie i tym samym może istnieć kilka odmian modelu $K_m(s)_4$.



Rys. 3. Zakłócone, skokowe charakterystyki symulowanych obiektów i skokowe charakterystyki ich modeli uzyskanych w oparciu o omawianą metodę

PRZYKŁADY ZASTOSOWAŃ I WNIOSKI

Metodą symulowanego eksperymentu wyznaczono skokowe charakterystyki kilku obiektów dynamicznych z uwzględnieniem pseudolosowego zakłócenia:

$$z(t) = 0.002[\sin(0.61t + 0.61) - \sin(1.17t - 1.17) + \sin(1.97t + 1.97) - \sin(2.51t - 2.51) + \sin(3.13t + 3.13) - \sin(11.7t - 11.7) + \sin(23.3t + 23.3)]$$

nałożonego na charakterystykę skokową każdego z obiektów. Ponieważ wyznaczanie współczynnika wzmocnienia k jest czynnością względnie prostą - przyjęto w każdym przypadku $k = 1$, by niepotrzebnie nie komplikować eksperymentu. Wielkości t_k , t_d , D wyznaczone w obecności zakłóceń przy arbitralnie przyjętych czasach t_1 , oraz obliczone proponowaną metodą parametry t_0 , n , m , T_1 , T i T_0 zestawiono w tabeli 2.

Zakłócone, skokowe charakterystyki symulowanych obiektów i charakterystyki uzyskanych modeli $K_m(s)_4$ pokazano na rysunkach 3, a, b, c i d, zgodnie z oznaczeniami w tabeli 2. Tylko w pierwszym przykładzie parametry modelu $K_m(s)_4$ odpowiadają zgrubsza parametrom transmitancji obiektu, w pozostałych przykładach wypracowane zostają parametry zastępcze, lecz charakterystyki skokowe uzyskanych modeli dobrze aproksymują charakterystyki rzeczywiste i to w stopniu słabo zależnym zarówno od arbitralnie przyjętej wartości t_1 , jak i od tego, które z rozwiązań układu równań (9) zostanie wybrane.

W przypadkach, gdy uzyskiwano $n < 2$, a więc w obszarze znacznych zmian wartości funkcji $\phi_1(n)$ i $\phi_3(n)$ stosowano procedurę iteracyjną, we wszystkich przykładach poza pierwszym podano także wyniki uzyskane przy braku zakłóceń (dane w nawiasach) dla zorientowania się w ich skutkach. W każdym z przykładów (poza pierwszym odpowiadającym dokładnie modelowi Strejca) wyzna-

zione wartości opóźnienia rzeczywistego były znacząco większe od wartości prawdziwej ($t_0 = 0,5$ s). Efekt ten najprawdopodobniej wynika z różnic w zachowaniu się modeli wieloinercyjnych o różnych stałych czasowych i modelu Strejca o ułamkowym rzędzie inercji (błąd systematyczny), nie wydaje się przy tym by w prosty sposób mógł on zostać wyeliminowany. Wpływ zakłóceń o amplitudzie rzędu 1% ustalonej wartości h (∞) jest niewielki, i tym samym metoda może być stosowana w praktyce. Długość czasu t_1 można orientacyjnie dobrać w taki sposób, by wartość D była rzędu 0,3 k , a procedurę iteracyjną warto stosować tylko dla obszaru zmian $1 \leq n \leq 2$.

LITERATURA

- [1] H. KUNERT: Analiza przydatności wybranych metod identyfikacji do regulacji z samonastaraniem. Rozprawa doktorska, Politechnika Wroclawska, Instytut Cybernetyki Technicznej, Wrocław 1999 r.
- [2] J. PAPLIŃSKI: Wykorzystanie modelu Strejca dla tworzenia pochodnych modeli dynamiki liniowych obiektów. Rozprawa doktorska, Politechnika Szczecińska, Wydział Elektryczny, Szczecin, 1996 r.
- [3] S. SKOCZOWSKI: Eine Bemerkungen zur Approximierung von Regelstrecken mit Ausgleich. Regelungstechnik 1983, 7.
- [4] S. SKOCZOWSKI: Metoda uproszczonej identyfikacji parametrów modelu Strejca na podstawie pierwszych próbek odpowiedzi skokowej. Kwartalnik Elektroniki i Telekomunikacji 1992, vo. 38 nr 2 - 3.
- [5] V. STREJC: Naherungsverfahren für aperiodische Übertragungs - charakteristiken. Regelungstechnik 1959, 4.
- [6] A. ŻUCHOWSKI: O uproszczonym modelu dynamiki z ułamkowym rzędem inercji. PAK 1985, 2.
- [7] A. ŻUCHOWSKI: O pewnej metodzie wyznaczania parametrów modelu Strejca. PAK 1993, 10.